

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПРИДНІПРОВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

КАФЕДРА БУДІВЕЛЬНОЇ І ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ ТА
ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ
З ДИСЦИПЛІНИ «БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА»
«РОЗРАХУНОК РАМ МЕТОДОМ СИЛ»**

**для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія»,
денної та заочної форми навчання**

Дніпро
2024

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з дисципліни «Будівельна механіка» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія», денної та заочної форми навчання / Укладачі: Кожемякіна І.Ф., Варяничко М.О. – Дніпро: ПДАБА, 2024. 26 с.

Методичні вказівки містять основні теоретичні відомості про метод сил та приклад розрахунку статично невизначуваної рами цим методом для студентів ступеня бакалавра спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» денної та заочної форм навчання. Наведено варіанти виконання контрольної роботи.

Укладачі: КОЖЕМЯКІНА І. Ф.

к.т.н., доцент кафедри будівельної і теоретичної механіки та опору матеріалів ПДАБА,

ВАРЯНИЧКО М.О.

к.т.н., доцент кафедри будівельної і теоретичної механіки та опору матеріалів ПДАБА.

Відповідальний за випуск: СЛОБОДЯНЮК С. О., д. т. н., проф., завідувач кафедри будівельної і теоретичної механіки та опору матеріалів ДВНЗ ПДАБА.

Рецензент: ВОЛЧОК Д.Л., к. т. н., доцент кафедри будівельної і теоретичної механіки та опору матеріалів ДВНЗ ПДАБА.

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні кафедри будівельної і теоретичної механіки та опору матеріалів

Протокол № 10 від 19.03.2024 р.

Завідувач кафедри Сергій СЛОБОДЯНЮК

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ

Навчально-методичною радою ПДАБА

Протокол № 6 від 18.04.2024 р.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
1.Статично невизначувані системи.....	5
2.Метод сил.....	6
3.Приклад розрахунку статично невизначуваної рами	9
4.Варіанти робіт і порядок їх вибору.....	24
Список рекомендованої літератури.....	26

ВСТУП

Усі інженерні конструкції повинні задовольняти умовам міцності, жорсткості, стійкості та економічності.

Будівельна механіка – це наука про методи розрахунку інженерних конструкцій і споруд на міцність, жорсткість та стійкість при дії на них зовнішнього навантаження.

Завданням будівельної механіки є:

- дослідження раціональних форм споруд;
- дослідження внутрішніх зусиль (згинальних моментів M , поперечних сил Q та поздовжніх сил N) від дії зовнішнього навантаження в елементах різного типу систем (споруд);
- аналіз пружних переміщень в елементах різного типу систем (споруд);
- дослідження жорсткості;
- дослідження стійкості.

В будівельній механіці вивчаються складні механічні системи, до яких входять стержні, пластини, оболонки, масивні тіла. Механічні системи, що складаються тільки зі стержнів називаються стержньовими системами. До них відносяться балки, ферми, рами.

Будівельна механіка стержньових систем, яку скорочено називають просто будівельною механікою, надає інженерам-будівельникам знання, що необхідні для розрахунку будівель і споруд промислового та цивільного призначення.

Будівельна механіка є наукою експериментально-теоретичною, оскільки базується на результатах випробувань споруд (в натурі і на моделях), досвіді їх експлуатації і теоретичних дослідженнях.

При розрахунку розглядають не реальну споруду, а її спрощену *розрахункову схему*, тобто ігноруються другорядні фактори (ознаки) реальної споруди:

-ідеалізують опорні та вузлові з'єднання (або ідеальний шарнір, або абсолютно жорсткий вузол);

-стержні споруди показують їх осями;

-перевіряють геометричну незмінність системи (переміщення можливі тільки в результаті деформацій);

-ідеалізують навантаження на споруду.

При аналізі розрахункових схем споруд важливе значення мають поняття: диск, кінематична в'язь, ступінь вільності, ступінь статичної невизначеності, геометрична незмінність та ін.

Для обрання методу розрахунку треба провести кінематичний аналіз механічної системи. Розглянемо деякі основні поняття кінематичного аналізу.

Інженерна споруда, яка складається з окремих елементів, може сприймати навантаження тільки в тому випадку, коли вона постійно зберігає геометричну форму і положення, які задані їй при зведенні (повинна бути нерухомою і незмінною). *Геометрично незмінна система* – це така система, форма якої не може мінятися без деформації матеріалу її елементів. *Елементи споруди, незмінність яких очевидна або доведена, називаються дисками.* Рухоме з'єднання двох дисків, яке обмежує взаємне їх переміщення, називається *кінематичною в'яззю*.

Найпростішою геометрично незмінною шарнірною системою є система з трьох стержнів (дисків), з'єднаних шарнірами в трикутник.

Рухомий шарнір еквівалентний одній кінематичній в'язі, тому що не перешкоджає ні взаємному повороту елементів, ні просторовому їх переміщенню.

Нерухомий опорний шарнір накладає на тіло дві в'язі, чим і пояснюється символічне зображення двома опорними стержнями шарнірно-нерухомої опори.

Стержнева система - це сукупність певного числа стержнів (два основних розміри яких малі порівняно з третім), з'єднаних між собою відповідним чином в'язями.

Ступінь вільності системи, складеної з дисків, з'єднаних між собою шарнірами, визначається наступним чином. Якщо число дисків позначається D , а ступінь вільності кожного диска дорівнює трьом, то розміщені на площині диски будуть мати ступінь вільності рівний $3D$. Враховуючи, що кожен простий шарнір, число яких позначається $Ш$, зменшує ступінь вільності на два, а кожен опорний стержень (опорна в'язь, число яких позначимо C_0) - на одиницю, то загальна ступінь вільності (W) стержневої системи визначиться за формулою Чебишева:

$$W = 3D - 2Ш - C_0 \quad (1)$$

Можливі три якісно різні результати:

1. $W > 0$ – система немає достатньої кількості в'язей, геометрично змінна;

2. $W = 0$ – система має достатню кількість в'язей, необхідну для забезпечення геометричної незмінності;
3. $W < 0$ – система незмінна, має зайву кількість в'язей, число яких

$$n = -W.$$

Для правильного застосування формули (1) потрібно розрізняти шарніри *прости* – з'єднують два диски, і *кратні* – з'єднують більше двох дисків.

Шарнір, який з'єднує не два, а n дисків (стержнів), еквівалентний $(n - 1)$ простим шарнірам.

Співвідношення (1) є *необхідною*, але ще *недостатньою* умовою незмінюваності споруд.

СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ СИСТЕМИ

Статично невизначуваними називають системи, які мають зайві в'язі, тому не можуть бути розраховані лише за допомогою рівнянь рівноваги.

До методів розрахунку статично невизначуваних систем належать метод сил, метод переміщень, змішаний і комбінований метод. У цих методах, як правило, нехтують впливом поздовжніх деформацій і деформаціями зсуву.

Задана система, система, що підлягає розрахунку, замінюється іншою (основною). **Основна система методу сил** – це статично визначувана система, яка отримана із заданої статично невизначуваної системи шляхом відкидання зайвих в'язей і заміни їх невідомими внутрішніми зусиллями або реакціями. Ці невідомі внутрішні зусилля або реакції називаються **основними невідомими**.

Для основної системи **методу переміщень** навпаки на задану систему накладаються додаткові в'язі. Основними невідомими є переміщення, які виключені цими додатковими в'язями.

Основною ознакою статично невизначуваних систем є ступінь статичної невизначуваності, що характеризує кількість “зайвих” в'язей. Ступінь статичної невизначуваності може бути обчислена за формулою Чебишева (1). Можна використовувати формулу

$$n = 3k - u, \quad (2)$$

де n – ступінь статичної невизначуваності плоскої стержньової системи, k – кількість замкнених контурів, u – кількість простих шарнірів.]

Рівняння для визначення основних невідомих складаються з умов еквівалентності заданої і основної систем. Тобто напружено-деформований

стан заданої і основної систем при дії зовнішнього навантаження повинен бути однаковим.

Розрахунок системи можна виконувати будь-яким з вище означених методів. Результати розрахунків будуть ідентичними.

Трудомісткість розрахунків залежить від кількості розв'язувальних рівнянь та складності обчислювання коефіцієнтів цих рівнянь.

МЕТОД СИЛ

Для розрахунку системи треба перейти від заданої статично невизначуваної системи (розрахункової схеми) до основної (статично визначуваної) системи.

Основною системою методу сил називається геометрично незмінювана і статично визначувана система, яка отримана із статично невизначуваної (заданої) системи шляхом відкидання “зайвих” в'язей і заміни їх невідомими внутрішніми зусиллями або реакціями. Реакції відкинутих в'язей (або внутрішні зусилля) прикладаються до основної системи разом із зовнішніми силами і називаються основними невідомими. Вони позначаються X_1, X_2, \dots, X_n , n – ступінь статичної невизначуваності системи. Кількість основних невідомих дорівнює ступеню статичної невизначуваності системи.

Оскільки напружено-деформовані стани заданої і основної системи повинні бути однаковими, треба виконати умови еквівалентності систем. Тобто переміщення в напрямку і місті відкинутих в'язей повинні дорівнювати нулю. Повне переміщення основної системи в напрямку і місті відкинутої зайвої в'язі визначається як сума переміщень від дії кожного основного невідомого і зовнішнього навантаження.

Канонічні рівняння методу сил мають вигляд:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де X_i - основні невідомі, δ_{ik} - переміщення в стані k основної системи в напрямку основного невідомого X_i , Δ_{iF} - переміщення основної системи в напрямку основного невідомого X_i від зовнішнього навантаження (у вантажному стані).

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (3) є математичною умовою еквівалентності заданої і основної систем, тобто переміщення основної

системи в місті i і напрямку відкинутих в'язей від основних невідомих X_i і від зовнішнього навантаження повинні дорівнювати нулю.

Основні особливості канонічних рівнянь методу сил:

-кількість рівнянь і кількість невідомих у кожному рівнянні дорівнює ступеню статичної невизначуваності n ;

-коефіцієнт δ_{ik} має два індекси: перший індекс відповідає номеру рядка (місце переміщення), другий індекс відповідає номеру невідомого (напрямку переміщення); Наприклад, δ_{12} - це переміщення в місці першої відкинутої в'язі, в напрямку другого основного невідомого;

-коефіцієнти δ_{ii} , розташовані по головній діагоналі системи рівнянь, називаються головними коефіцієнтами і завжди мають додатне значення;

-побічні коефіцієнти згідно теореми Максвелла $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ симетричні відносно головної діагоналі системи рівнянь (3);

-невідомі X_i системи канонічних рівнянь – це реакції відкинутих в'язей (або внутрішні зусилля відкинутих в'язей);

-коефіцієнти δ_{ik} - переміщення в основній системі в напрямку відкинутих в'язей від дії одиничних ($X_i = 1$) основних невідомих;

-коефіцієнти δ_{ik} називаються *одиничними* переміщеннями, Δ_{iF} - *вантажними*.

Для обчислення коефіцієнтів канонічних рівнянь методу сил (3) необхідно скористатися формулою Максвелла – Мора для плоских систем

$$\Delta_{iF} = \sum \int_l \frac{N_i N_F}{EA} dx + \sum \int_l \frac{M_i M_F}{EI} dx + \sum \int_l \frac{\eta Q_i Q_F}{GA} dx, \quad (4)$$

де: Δ_{iF} - шукане переміщення,

M_F, Q_F, N_F — внутрішні зусилля у стержневій системі, викликані заданим зовнішнім навантаженням;

M_i, Q_i, N_i — внутрішні зусилля в стержневій системі, викликані одиничним навантаженням, прикладеним у напрямку шуканого переміщення в тій точці (перетині), де визначається переміщення (при знаходженні лінійного переміщення прикладається одинична сила, при обчисленні кута одиничний момент);

l - довжина ділянки;

η - коефіцієнт зсуву, що враховує нелінійний розподіл дотичних напружень у поперечному перерізі;

EI, EA, GA — жорсткості при згині, розтяганні (стисканні) та зсуві відповідно.

Підсумовування проводиться у всіх ділянках стержневої конструкції.

Для розрахунку елементів, які переважно працюють на згин (балок середньої та великої довжини, рам), утримають складову, що залежить від згинальних моментів. впливом поздовжньої та поперечної сил (першим та третім членами формули (4)) можна знехтувати в силу їх малого впливу на деформації згину. У цьому випадку для визначення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь (3) формула Максвелла - Мора набуде вигляду:

$$\delta_{ij} = \sum_l \int \frac{M_i M_j}{EI} dx, \quad \Delta_{iF} = \sum_l \int \frac{M_i M_F}{EI} dx. \quad (5)$$

В формулах (5) M_i , M_j - це згинальні моменти від дії кожного основного невідомого $X_i = 1$, $X_j = 1$, M_F - це згинальний момент від дії зовнішнього навантаження.

Для подальшого розрахунку будуються епюри зусиль для основної системи. Для рами треба побудувати епюри згинальних моментів M_i від дії всіх одиничних основних невідомих (для кожного окремо) і епюру M_F від дії зовнішнього навантаження (вантажну). У практичних розрахунках безпосереднє інтегрування замінюється використанням правила Верещагіна, формулами Сімпсона-Корноухова. Мюлера-Бреслау, Симпсона, тощо.

Наприклад, у тому випадку, коли епюри прямолінійні (рис. 1) по формулі Мюлера-Бреслау будемо мати

$$\frac{1}{EI} \int_0^l M_1 M_p dx = \frac{l}{6EI} (2ac + 2bd + ad + bc) \quad (6)$$

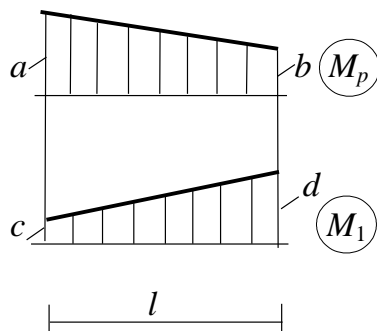


Рис.1. Прямолінійні епюри

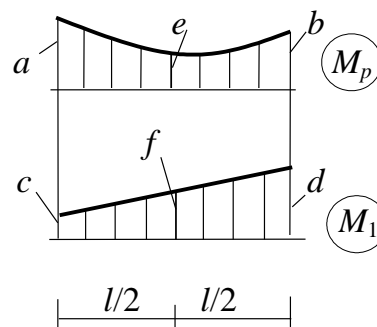


Рис.2. Криволінійна вантажна епюра

У тих випадках, коли визначення положення центру ваги та площі вантажної епюри (для правила Верещагіна) призводить до громіздких

обчислень, простіше для «перемноження» епюр скористатися формулою Сімпсона:

$$\frac{1}{EI} \int_0^l M_1 M_p dx = \frac{1}{6EI} (ac + 4ef + bd), \quad (7)$$

тут a, b, c, d - ординати на вантажній та одиничній епюрах на початку та в кінці ділянки довжиною l ; e, f — ординати у середині ділянки (рис. 2). Формулою (7) користуються і у випадку, коли обидві епюри прямолінійні.

Після розв'язку системи канонічних рівнянь (3) отримуємо величини основних невідомих X_i .

Для визначення дійсних зусиль існує два способи.

Статичний спосіб полягає в тому, що виконується звичайний розрахунок основної системи від одночасної дії зовнішнього навантаження і дії знайдених при розрахунку основних невідомих. Звичайним способом знаходяться опорні реакції і будуються епюри внутрішніх зусиль.

Спосіб накладання ґрунтується на принципі незалежності дії сил (принцип суперпозиції)/

$$\begin{aligned} M &= M_F + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + \dots + M_n \cdot X_n; \\ Q &= Q_F + Q_1 \cdot X_1 + Q_2 \cdot X_2 + \dots + Q_n \cdot X_n; \\ N &= N_F + N_1 \cdot X_1 + N_2 \cdot X_2 + \dots + N_n \cdot X_n. \end{aligned} \quad (8)$$

В формулах (5) M_F, Q_F, N_F -зусилля від зовнішнього навантаження, M_i, Q_i, N_i - зусилля від одиничних значень X_i .

Кінематична перевірка розрахунку. Для перевірки правильності розрахунку статично невизначуваної системи в будь-якій основній системі методу сил визначають зусилля від будь-якого основного невідомого $X_i = 1$ і перемножують їх за формулою Максвелла - Мора на дійсні зусилля. Результат повинен бути рівним нулю. Для рам і балок

$$\Delta_i = \sum_l \int \frac{M_i M}{EI} dx = 0. \quad (9)$$

ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНОЇ РАМИ

- Для рами, зображеної на рис. 3.а, потрібно
1. встановити ступінь статичної невизначуваності;
 2. обрати основну систему;
 3. для основної системи побудувати епюри згинальних моментів від одиничних значень основних невідомих і від зовнішнього навантаження;
 4. скласти систему канонічних рівнянь методу сил;
 5. визначити значення основних невідомих;
 6. побудувати епюри дійсних внутрішніх зусиль M , Q , N .

Розв'язання

За допомогою формули Чебишева (1) встановлюємо ступінь статичної невизначуваності рами

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 5 = -2. \quad (10)$$

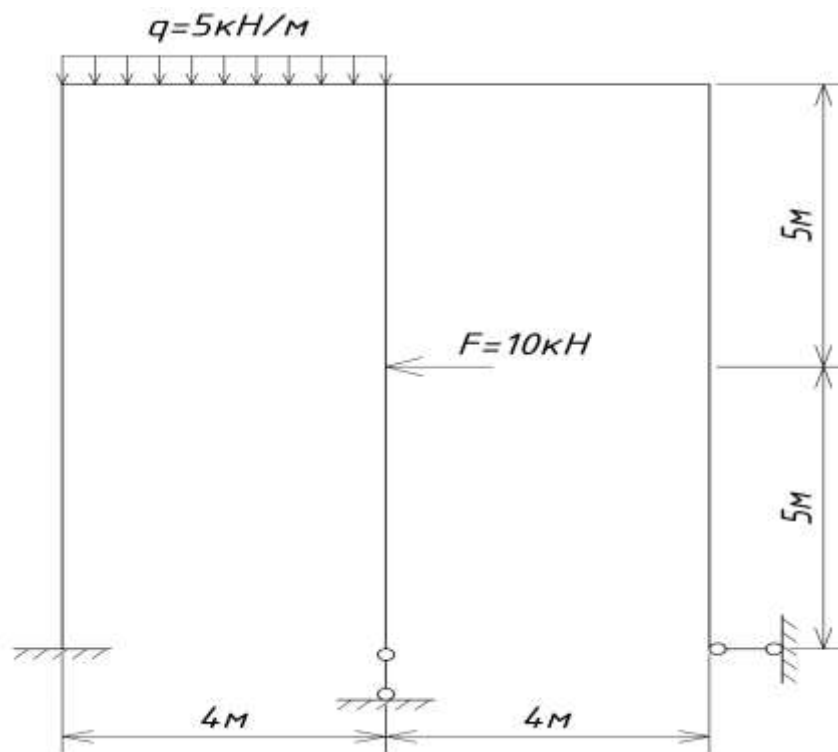


Рис. 3.а. Задана система

Рама має дві зайві в'язі. Обираємо основну систему. Відкидаємо дві зайві в'язі і замінюємо їх основними невідомими X_1 і X_2 (рис. 3.б)

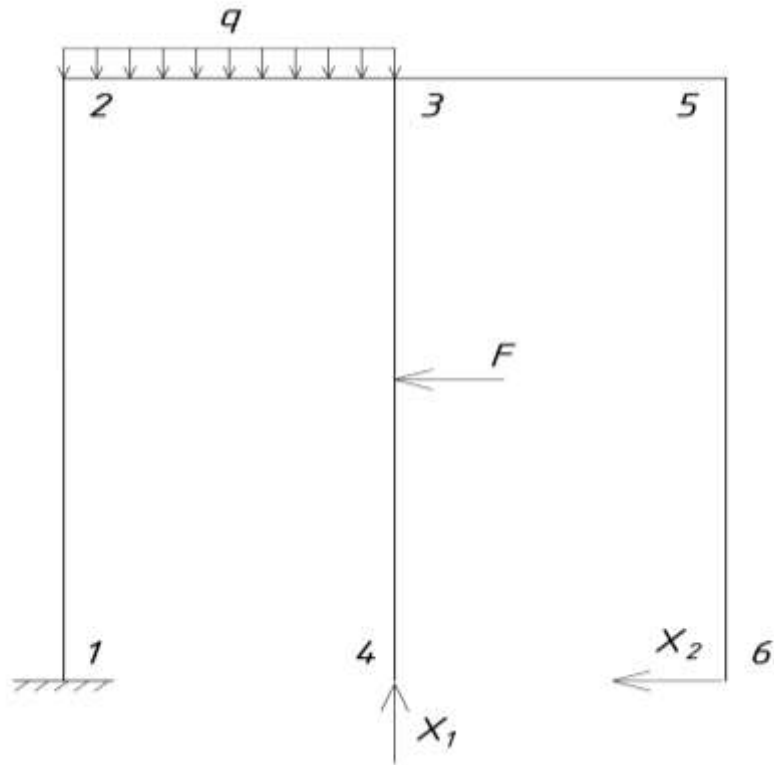


Рис. 3.б. Основна система

Розглянемо вантажний стан основної системи (рис. 3.в).

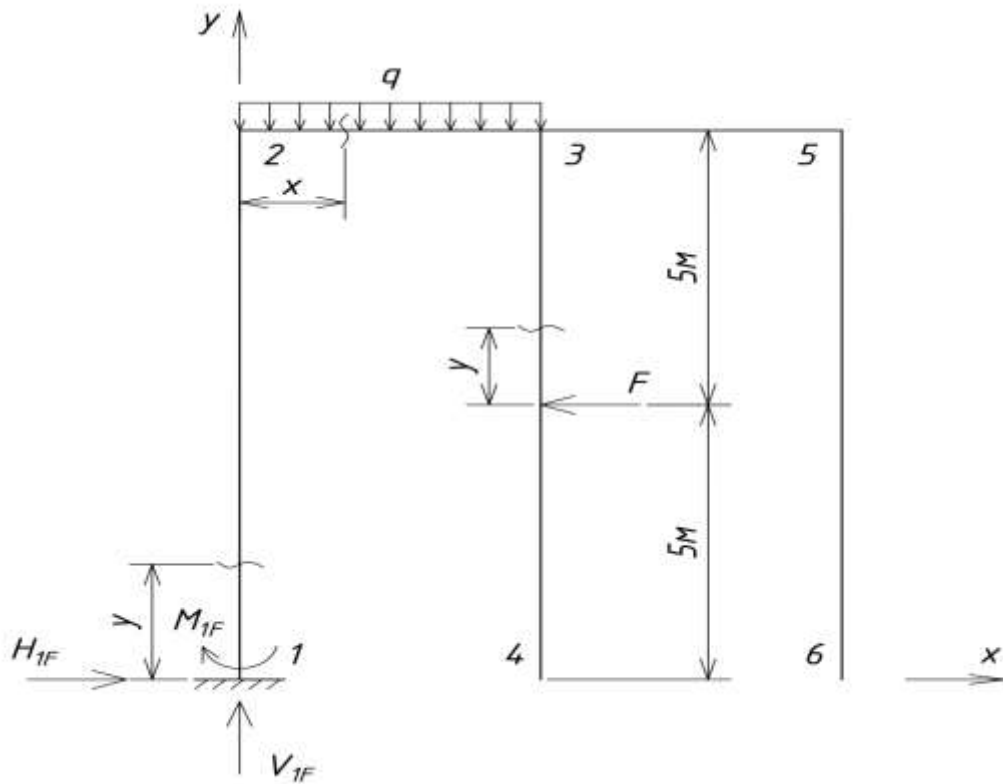


Рис. 3.в. Вантажний стан основної системи

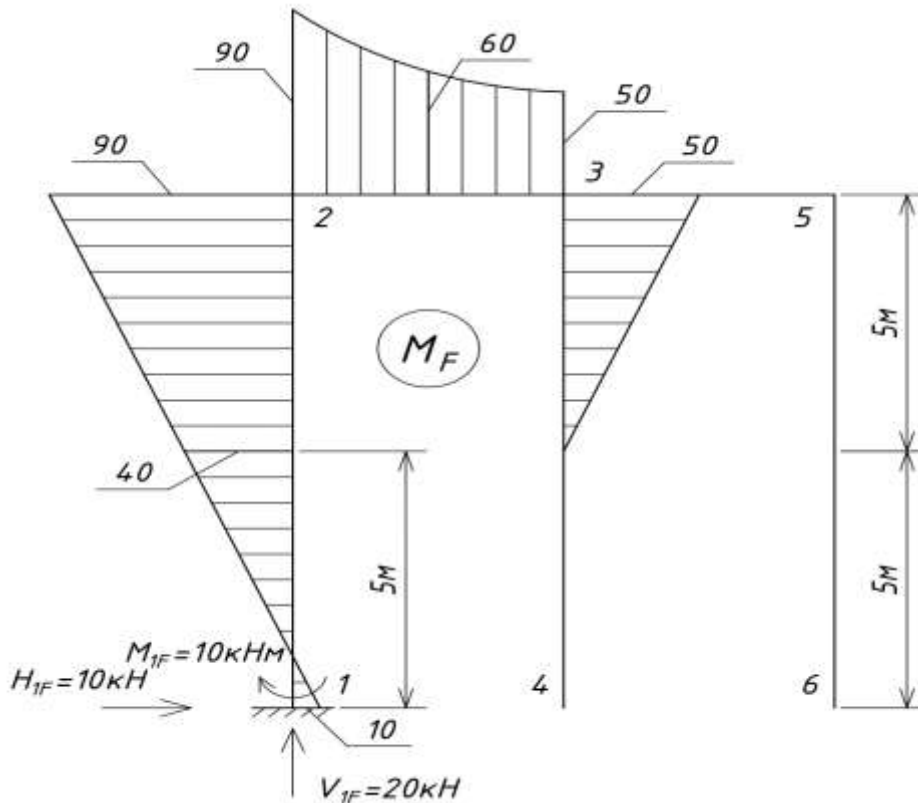


Рис. 3.г. Епюра згинальних моментів для вантажного стану

Для знаходження опорних реакцій рами складаємо рівняння рівноваги (рис. 3.в).

$$\sum M_{T.1} = 0;$$

$$q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 5 + M_{1F} = 0, \quad M_{1F} = F \cdot 5 - q \cdot 4 \cdot 2 = 50 - 40 = 10 \text{ кНм},$$

$$\sum F_x = 0, \quad H_{1F} - F = 0. \quad H_{1F} = F = 10 \text{ кН},$$

$$\sum F_y = 0, \quad V_{1F} - q \cdot 4 = 0, \quad V_{1F} = q \cdot 4 = 20 \text{ кН}.$$

Для побудови епюри згинальних моментів розглянемо ділянки рами.

Ділянка 1-2:

$$M_{1-2} = M_{1F} - H_{1F} \cdot y,$$

$$y=0: M_{1-2} = M_{1F} = 10 \text{ кНм},$$

$$y=5\text{м}: M_{1-2} = M_{1F} - H_{1F} \cdot 5 = 10 - 50 = -40 \text{ кНм},$$

$$y=10\text{м}: M_{1-2} = M_{1F} - H_{1F} \cdot 10 = 10 - 100 = -90 \text{ кНм}.$$

Ділянка 2-3:

$$M_{2-3} = M_{1F} + V_{1F} \cdot x - H_{1F} \cdot 10 - \frac{q \cdot x^2}{2},$$

$$x=0, M_{2-3} = M_{1F} - H_{1F} \cdot 10 = -90 \text{кНм},$$

$$x=2\text{м}, M_{2-3} = M_{1F} + V_{1F} \cdot 2 - H_{1F} \cdot 10 - \frac{q \cdot 2^2}{2} =$$

$$= 10 + 20 \cdot 2 - 10 \cdot 10 - \frac{5 \cdot 2^2}{2} = -60 \text{кНм},$$

$$x=4\text{м}, M_{2-3} = M_{1F} + V_{1F} \cdot 4 - H_{1F} \cdot 10 - \frac{q \cdot 4^2}{2} =$$

$$= 10 + 20 \cdot 4 - 10 \cdot 10 - \frac{5 \cdot 4^2}{2} = -5 \text{кНм}.$$

Ділянка 4-3:

$$y=0, M_{4-3} = 0,$$

$$y=5, M_{4-3} = -F \cdot 5 = -10 \cdot 5 = -50 \text{кНм}.$$

По отриманим результатам будуюмо епюру M_F (рис.3.г).

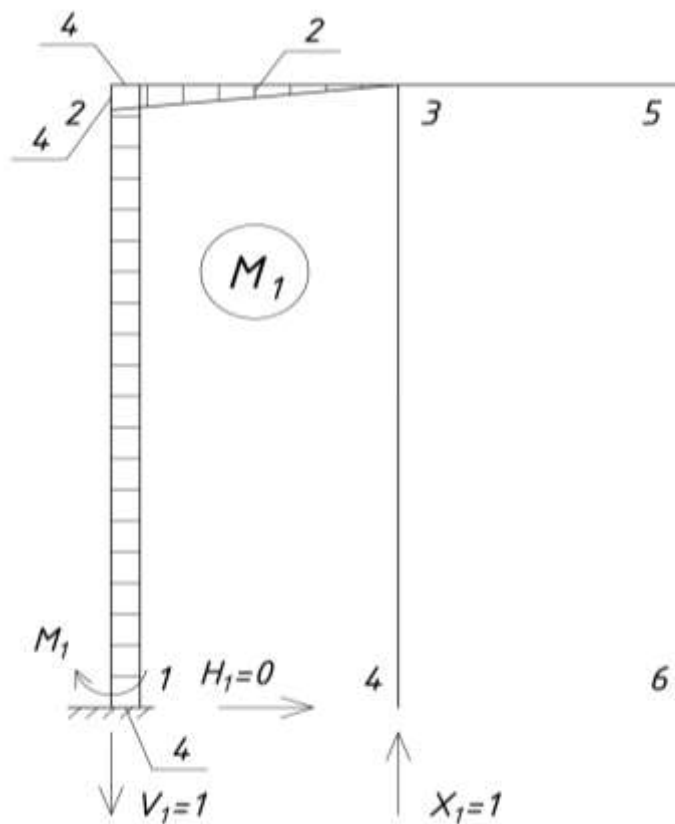


Рис. 4.а. Епюра згинальних моментів для $X_1 = 1$.

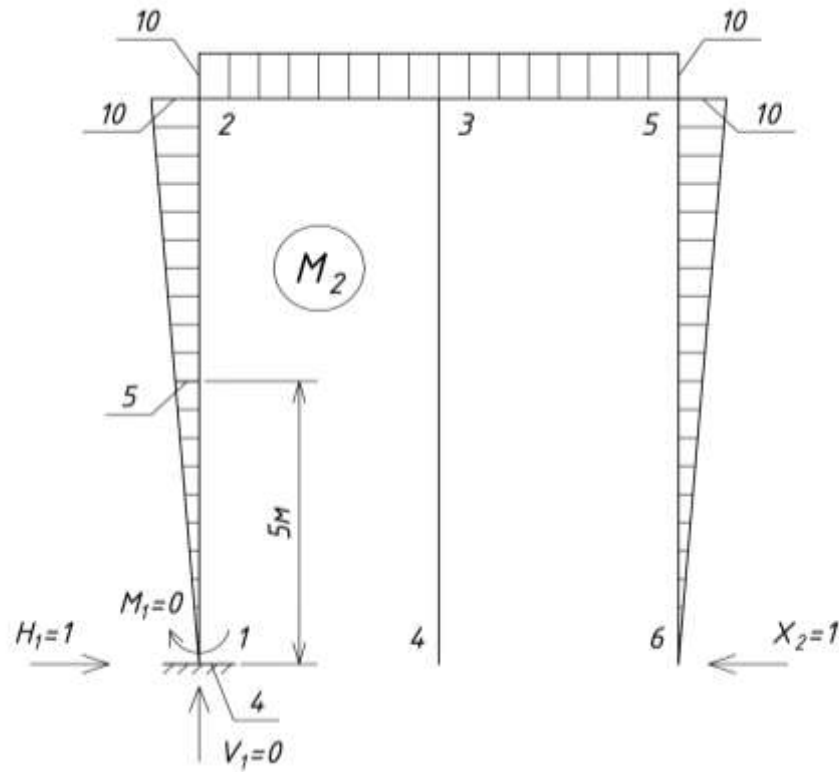


Рис. 4.б. Епюра згинальних моментів для $X_2 = 1$.

Завантажуємо основну систему тільки $X_1 = 1$, визначаємо опорні реакції і будуємо епюру згинальних моментів M_1 (рис. 4.а).

$$\sum F_x = 0, \quad H_1 = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad X_1 - V_1 = 0, \quad V_1 = X_1 = 1.$$

$$\sum M_{T.1} = 0, \quad M_1 - X_1 \cdot 4 = 0, \quad M_1 = X_1 \cdot 4 = 4.$$

Завантажуємо основну систему тільки $X_2 = 1$, визначаємо опорні реакції і будуємо епюру згинальних моментів M_2 (рис. 4.б).

$$\sum F_x = 0, \quad H_1 - X_2 = 0, \quad H_1 = X_2 = 1,$$

$$\sum F_y = 0, \quad V_1 = 0, \quad \sum M_{T.1} = 0, \quad M_1 = 0.$$

Складаємо канонічні рівняння методу сил

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \quad (10)$$

Визначаємо коефіцієнти системи рівнянь (10). Скористаємося формулою Симпсона (7)

$$\delta_{11} = \sum_l \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{l_{1-2}}{6EI} (4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4) + \frac{l_{2-3}}{6EI} (4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0) =$$

$$= \frac{181,33}{EI},$$

$$\delta_{22} = \sum_l \int \frac{M_2 M_2}{EI} dx = \frac{l_{1-2}}{6EI} (0 + 4 \cdot 5 \cdot 5 + 10 \cdot 10) + \frac{l_{2-5}}{6EI} (10 \cdot 10 + 4 \cdot 10 \cdot 10 + 10 \cdot 10) +$$

$$+ \frac{l_{5-6}}{6EI} (10 \cdot 10 + 4 \cdot 5 \cdot 5 + 0) = \frac{1466,67}{EI},$$

$$\delta_{12} = \sum_l \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = -\frac{l_{1-2}}{6EI} (0 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 10) - \frac{l_{2-3}}{6EI} (4 \cdot 10 + 4 \cdot 10 \cdot 2 + 0 \cdot 10) =$$

$$= -\frac{280}{EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21}, \quad (11)$$

$$\delta_{1F} = \sum_l \int \frac{M_1 M_F}{EI} dx = \frac{l_{1-2}}{6EI} (4 \cdot 10 - 4 \cdot 4 \cdot 40 - 4 \cdot 90) - \frac{l_{2-3}}{6EI} (4 \cdot 90 + 4 \cdot 2 \cdot 60 + 0) =$$

$$= -\frac{2160}{EI},$$

$$\delta_{2F} = \sum_l \int \frac{M_2 M_F}{EI} dx = \frac{l_{1-2}}{6EI} (0 + 4 \cdot 5 \cdot 40 + 10 \cdot 90) + \frac{l_{2-3}}{6EI} (10 \cdot 90 + 4 \cdot 10 \cdot 60 + 10 \cdot 50) =$$

$$= \frac{5366,67}{EI}.$$

Коефіцієнти (11) отримаємо наступним чином:

δ_{11} - перемножуємо епюру M_1 (рис. 4.а) від $X_1 = 1$ саму на себе;

δ_{22} - перемножуємо епюру M_2 (рис. 4.б) від $X_2 = 1$ саму на себе;

δ_{12} - перемножуємо епюру M_1 (рис. 4.а) від $X_1 = 1$ на епюру M_2 (рис. 4.б) від $X_2 = 1$;

Δ_{1F} - перемножуємо епюру M_1 (рис. 4.а) від $X_1 = 1$ на вантажну епюру M_F (рис. 3.г);

Δ_{2F} - перемножуємо епюру M_2 (рис.4.б) від $X_2 = 1$ на вантажну епюру M_F (рис. 3.г);

l_{1-2}, l_{2-3} - довжини відповідних ділянок.

Знак добутків "--" від того, що епюри знаходяться по різні боки від осі рами.

Підставляємо в канонічні рівняння методу сил (10) знайдені коефіцієнти (11). Отримаємо два рівняння з двома невідомими X_1 і X_2 :

$$\begin{aligned} 181.33 \cdot X_1 - 280 \cdot X_2 - 2160 &= 0, \\ -280 \cdot X_1 + 1466.67 \cdot X_2 + 5366.67 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Після розв'язання системи отримаємо

$$X_1 = 8.881 \text{ кН}, \quad X_2 = -1.963 \text{ кН}. \quad (13)$$

З результатів видно, що дійсний напрямок X_2 протилежний обраному напрямку (рис. 3.б).

Загальну епюру згинальних моментів отримаємо використовуючи принцип складання дії сил

$$M = M_F + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2,$$

де M_F - епюра моментів для основної системи при дії зовнішнього навантаження (рис. 3.г), M_1 епюра моментів від $X_1 = 1$ (рис. 4.а), M_2 епюра від $X_2 = 1$ (рис. 4.б). Значення на епюре M_1 помножуємо на $X_1 = 8.881$, значення на епюре M_2 помножуємо на $X_2 = -1.963$.

Переріз 1:

$$M_{пер.1} = 10 + 4 \cdot 8.881 + 0 = 45.52 \text{ кНм}.$$

Переріз 2:

$$M_{пер.2} = -90 + 4 \cdot 8.881 - 10 \cdot (-1.963) = -34.85 \text{ кНм}.$$

Ділянка 2-3. Переріз 3:

$$M_{пер.3} = -50 + 0 - 10 \cdot (-1.963) = -30.37 \text{ кНм}.$$

Переріз посередині ділянки 2-3:

$$M_{пер.2-3} = -60 + 2 \cdot 8.881 - 10 \cdot (-1.963) = -22.61 \text{ кНм}.$$

Ділянка 3-4 береться без змін з епюри M_F , на цій ділянці

$$M_1 = 0, \quad M_2 = 0.$$

Ділянка 3-5:

$$M_{пер.3-5} = 0 + 0 - 10 \cdot (-1,963) = 19,63 \text{ кНм}.$$

Ділянка 5-6. Переріз 5 і переріз 6:

$$M_{пер.5} = -10 \cdot (-1,963) = 19,63 \text{ кНм},$$

$$M_{пер.6} = 0.$$

По отриманим результатам Будуємо кінцеву епюру згинальних моментів (рис.5).

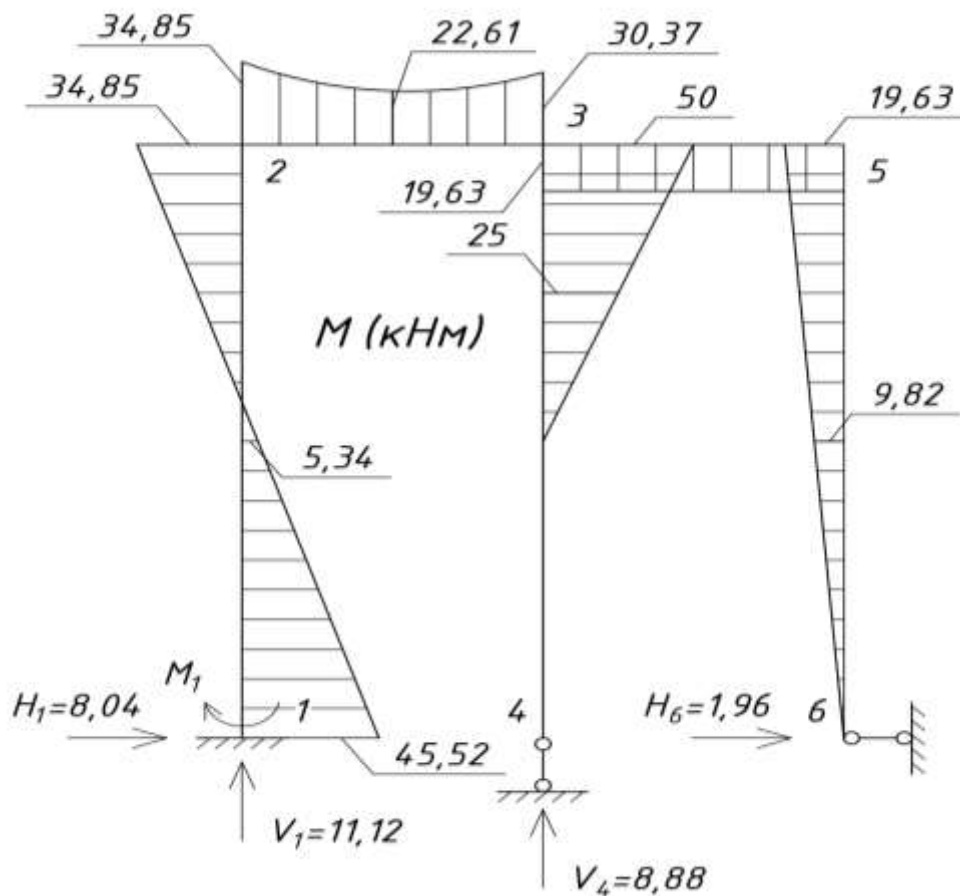


Рис. 5. Епюра згинальних моментів рами.

Аналогічно визначаються опорні реакції:

$$H_1 = 10 - 0 + 1 \cdot (-1,963) = 8,04 \text{ кН}, \quad V_1 = 20 - 1 \cdot 8,881 + 0 = 11,12 \text{ кН},$$

$$M_1 = 10 + 4 \cdot 8,881 + 0 = 45,52 \text{ кНм},$$

$$V_4 = 1 \cdot 8,881 = 8,881 \text{ кН} \approx 8,88 \text{ кН}, \quad H_6 = 1 \cdot (-1,963) \approx -1,96 \text{ кН}.$$

Статична перевірка полягає тому, що сума моментів для будь-якого вузла повинна дорівнювати нулю. Наприклад, для вузол 3:

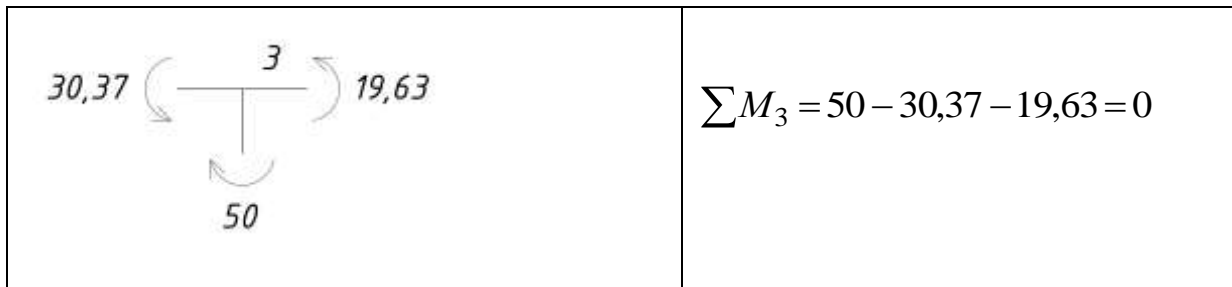


Рис.6. Ілюстрація рівноваги вузла 3 рами.

Деформаційна перевірка. Для заданої і основної систем повинна виконуватися умова еквівалентності: переміщення в місці і в напрямку відкинутих в'язей повинно дорівнювати нулю. Для визначення переміщення перемножуємо загальну епюру M (рис.5) на відповідну епюру M_i від одиничного фактору. Переміщення в напрямку X_1 і в місці його дії

$$\Delta_1 = \sum \int \frac{M_1 M}{EI} dx = \frac{l_{1-2}}{6EI} (45,52 \cdot 4 + 4 \cdot 5,34 \cdot 4 - 34,85 \cdot 4) - \frac{l_{2-3}}{6EI} (34,85 \cdot 4 + 4 \cdot 22,61 \cdot 2 + 0) = \frac{0,014}{EI} \approx 0.$$

Аналогічно перевіряється переміщення в напрямку і місці дії X_2 .

$$\Delta_2 = \sum \int \frac{M_2 M}{EI} dx \approx 0.$$

Для визначення поперечних сил зображуємо елементи рами як шарнірно оперті балки, на які діє зовнішнє навантаження (див. задану систему) та опорні моменти. Значення опорних моментів беремо з останньої епюри M (рис.5) на кінцях ділянок. Пам'ятаємо, що епюра моментів збудована розтягнутих волокнах.

Ділянка 1-2 (рис. 6.а):

$$M_{1-2} = 45,52 \text{кНм}, \quad M_{2-1} = 34,85 \text{кНм},$$

$$\sum M_{T,2} = 0, \quad -R_1 \cdot l_{1-2} + M_{1-2} + M_{2-1} = 0,$$

$$R_1 = \frac{1}{l_{1-2}} (M_{1-2} + M_{2-1}) = \frac{1}{10} (45,52 + 34,85) = 8,04 \text{кН},$$

$$\sum F_y = 0, \quad R_1 - R_2 = 0, \quad R_2 = R_1 = 8,04 \text{кН},$$

$$Q_{1-2} = -R_1 = -8,04 \text{кН}.$$

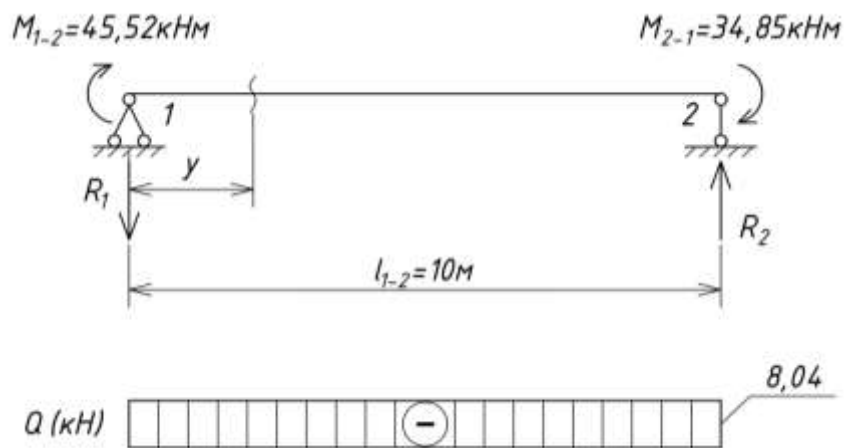


Рис. 6.а. Ділянка 1-2. Епюра Q.

Ділянка 2-3 (рис. 6.б):

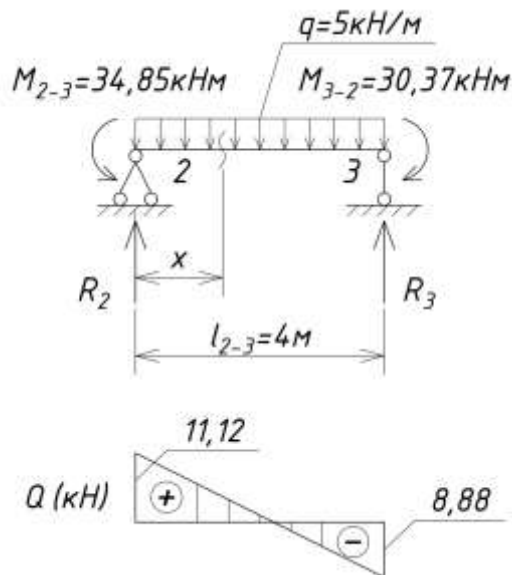


Рис. 6.б. Ділянка 2-3. Епюра Q.

$$M_{2-3} = 34,85 \text{ кНм}, \quad M_{3-2} = 30,37 \text{ кНм},$$

$$\sum M_{T.3} = 0, \quad R_2 \cdot l_{2-3} + M_{3-2} - M_{2-3} - \frac{ql_{2-3}^2}{2} = 0,$$

$$R_2 = \frac{1}{l_{2-3}} (-M_{3-2} + M_{2-3} + \frac{ql_{2-3}^2}{2}) = \frac{1}{4} (-30,37 + 34,85 + \frac{5 \cdot 4^2}{2}) = 11,12 \text{ кН}.$$

$$\sum M_{T.2} = 0, \quad -R_3 \cdot l_{2-3} + M_{3-2} - M_{2-3} + \frac{ql_{2-3}^2}{2} = 0,$$

$$R_3 = \frac{1}{l_{2-3}}(M_{3-2} - M_{2-3} + \frac{ql_{2-3}^2}{2}) = \frac{1}{4}(30,37 - 34,85 + \frac{5 \cdot 4^2}{2}) = 8,88 \text{ кН}.$$

$$Q_{2-3} = R_2 - qx: \quad x=0, \quad Q = R_2 = 11,12 \text{ кН};$$

$$x = l_{2-3} = 4 \text{ м}, \quad Q = R_2 - q \cdot 4 = 11,12 - 5 \cdot 4 = -8,88 \text{ кН}.$$

На ділянці 3-5 згинальний момент $M = 19,63 \text{ кНм} = \text{const}$. Маємо чистий згинання. Тобто $Q = 0$.

Ділянка 6-5 (рис. 6.в)

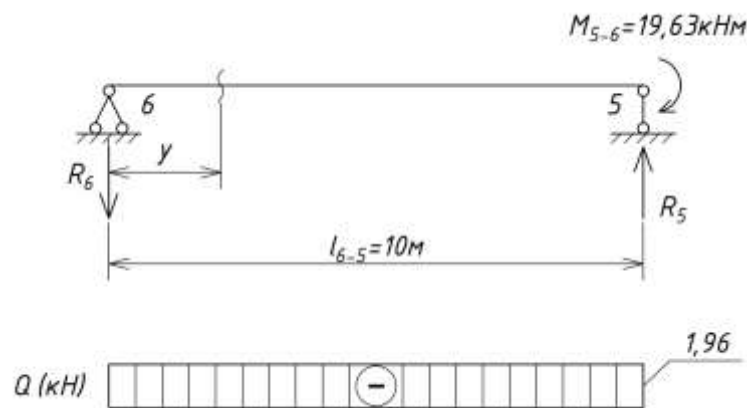


Рис. 6.в. Ділянка 6-5. Епюра Q.

$$M_{5-6} = 19,63 \text{ кНм},$$

$$\sum M_{T,6} = 0, \quad -R_5 \cdot l_{6-5} + M_{5-6} = 0, \quad R_5 = \frac{M_{5-6}}{l_{6-5}} = \frac{19,63}{10} = 1,96 \text{ кН}.$$

$$\sum M_{T,5} = 0, \quad -R_6 \cdot l_{6-5} + M_{5-6} = 0, \quad R_6 = \frac{M_{5-6}}{l_{6-5}} = \frac{19,63}{10} = 1,96 \text{ кН}.$$

Ділянка 4-3 (рис. 6.г). Будуємо епюру Q аналогічно попередній ділянці.

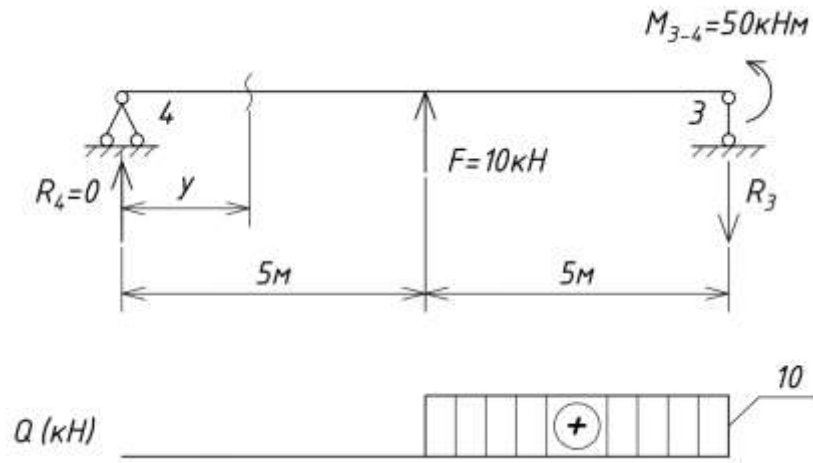


Рис. 6.г. Ділянка 4-3. Епюра Q.

Епюра поперечних сил для рами зображена на рис. 7.

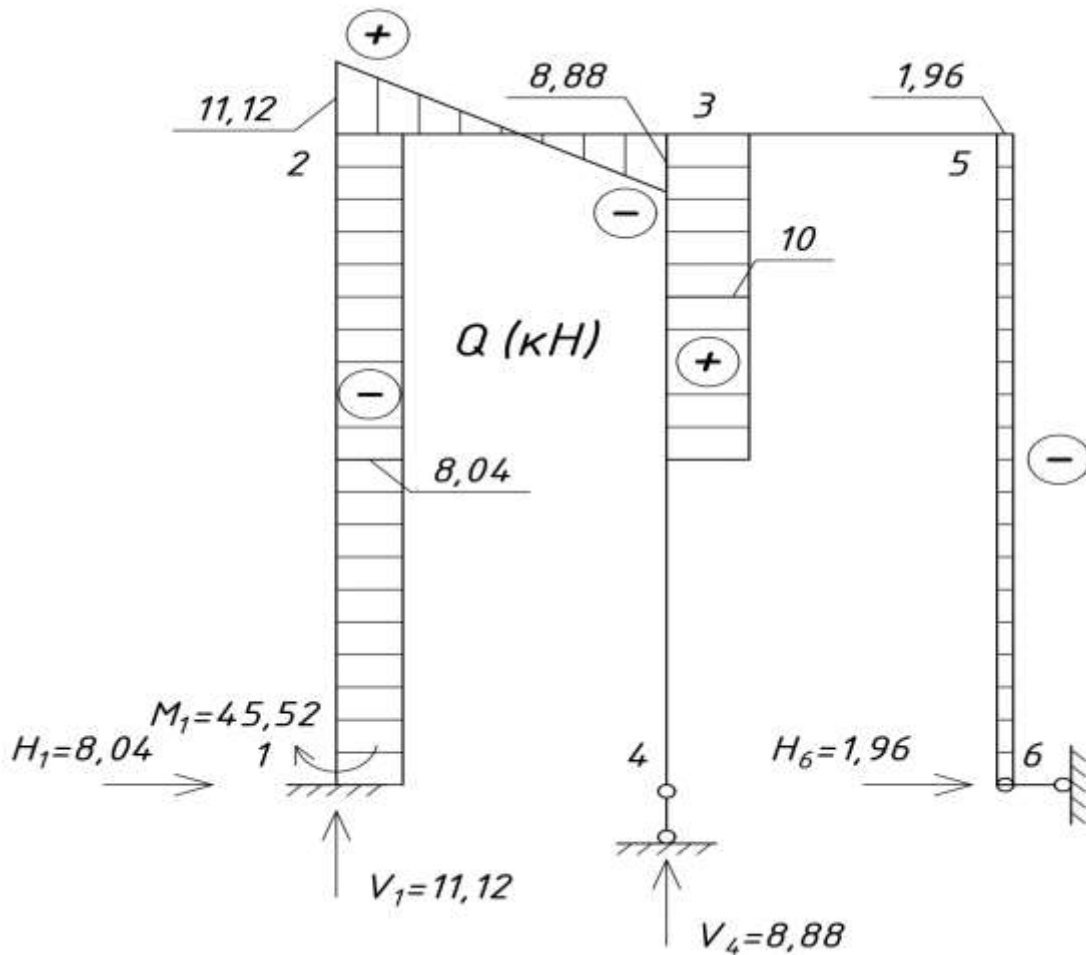
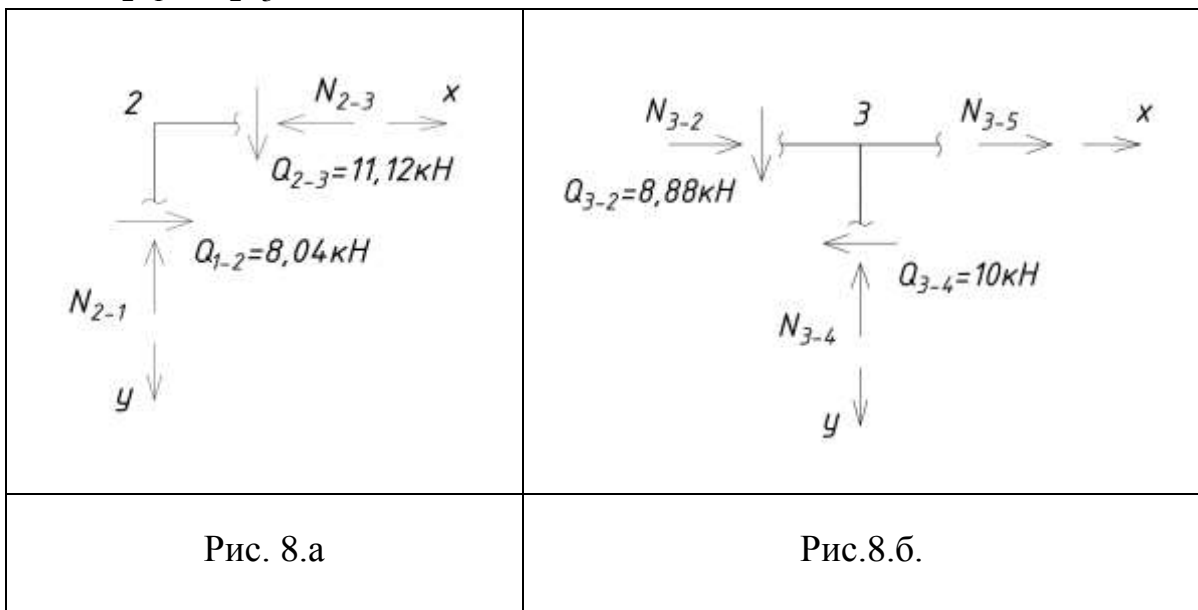


Рис. 7. Епюра поперечних сил рами Q.

Для побудови епюри поздовжніх сил вирізаємо вузли рами і розглядаємо їх рівновагу (рис. 8.а. і рис. 8.б). Дію відкинутих частин рами замінюємо поздовжніми і поперечними зусиллями. Значення поперечних зусиль беремо з епюри поперечних сил Q рами (рис.7). Якщо на епюрі поперечна сила додатня (має знак “+”), відносно перерізу вона діє за годинниковою стрілкою. Якщо на епюрі поперечна сила від’ємна (має знак “-”), відносно перерізу вона діє проти годинникової стрілки. В загальному випадку поздовжні сили N направляємо від перерізу, тобто вважаємо їх розтягуючими. Але для вузла 2 очевидно, що вони стискаючи, тому їх можна направити до вузла відповідно до фізичного сенсу.

Вузол 2 (рис. 8.а):

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & Q_{1-2} - N_{2-3} &= 0, \\ N_{2-3} &= Q_{2-1} = 8,04 \text{кН}, \\ \sum F_y &= 0, & N_{2-1} - Q_{2-3} &= 0, \\ N_{2-1} &= Q_{2-3} = 11,12 \text{кН}. \end{aligned}$$



Вузол 3 (рис. 8.б):

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & N_{3-5} + N_{3-2} - Q_{3-4} &= 0, \\ N_{3-5} &= -N_{3-2} + Q_{3-4} = -8,04 + 10 = 1,96 \text{кН}, \end{aligned}$$

З попереднього розрахунку використовуємо значення $N_{2-3} = 8,04 \text{кН}$. По закону дії і протидії

$$N_{3-2} = N_{2-3} = 8,04 \text{кН},$$

$$\sum F_y = 0, \quad N_{3-4} + Q_{3-2} = 0,$$

$$N_{3-4} = -Q_{3-2} = 8,88 \text{ кН}.$$

По отриманим результатам будемо епюру поздовжніх сил N (рис.10).

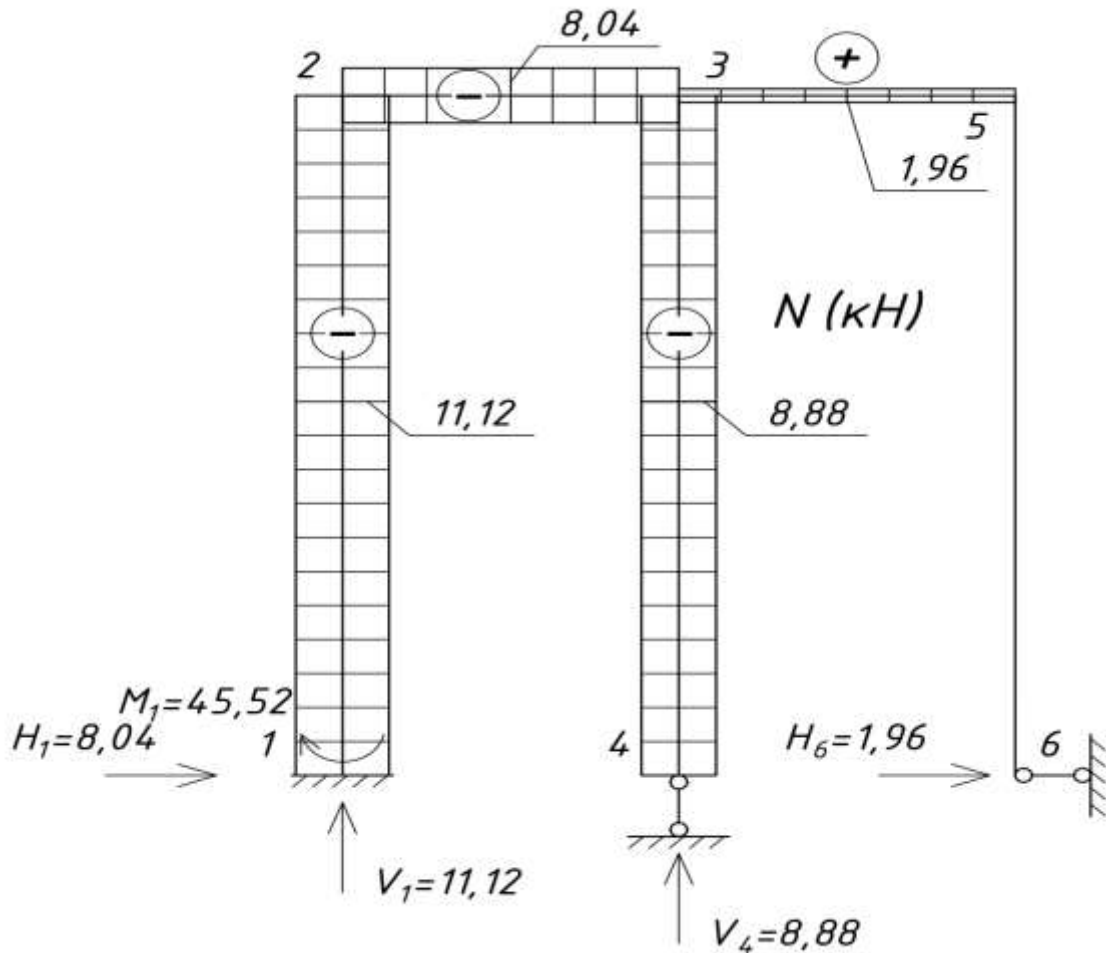


Рис.10. Епюра поздовжніх сил рами N .

Перевірку знайдених значень опорних реакцій зробимо за допомогою рівнянь рівноваги:

$$\sum F_x = 0, \quad H_1 + H_6 - F = 8,04 + 1,96 - 10 = 0,$$

$$\sum F_y = 0, \quad V_1 + V_4 - q \cdot 4 \cdot 6 = 11,12 + 8,88 - 5 \cdot 4 \cdot 6 = 0,$$

$$\sum M_6 = 0, \quad M_1 + V_1 \cdot 8 + V_4 \cdot 4 - F \cdot 5 - q \cdot 4 \cdot 6 =$$

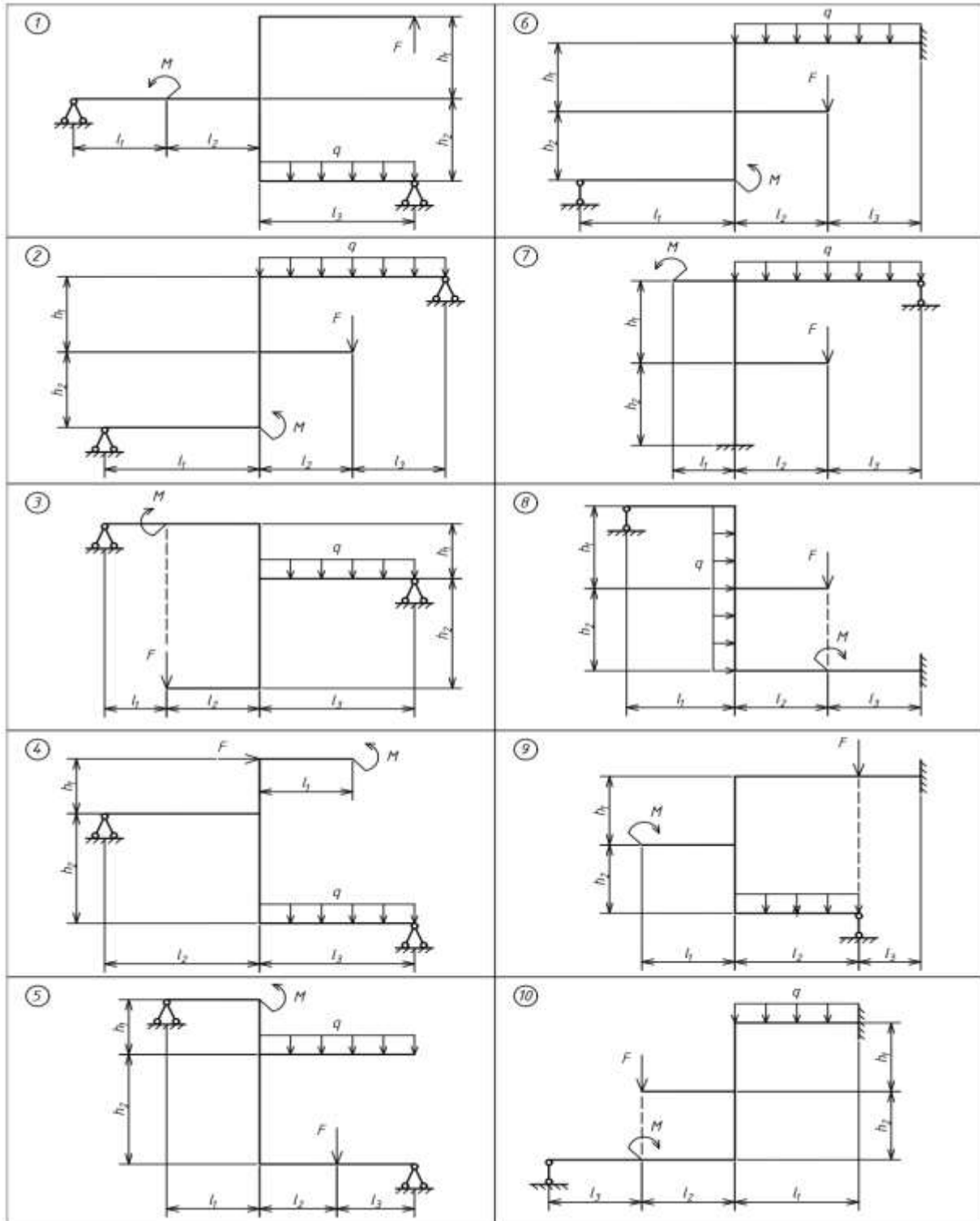
$$= 45,52 + 11,12 \cdot 8 + 8,88 \cdot 4 - 10 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 6 = 0.$$

Значення опорних реакцій беремо за рис.10.

ВАРІАНТИ РОБІТ І ПОРЯДОК ЇХ ВИБОРУ

Варіант контрольної роботи студент обирає за номером залікової книжки - дві останні цифри залікової книжки. Перша цифра показує номер схеми, друга цифра показує, яку строку в таблиці треба взяти.

Схеми задач



Таблиця 1

Розрахункові дані задачі

№	l_1 (м)	l_2 (м)	l_3 (м)	h_1 (м)	h_2 (м)	q (кН/м)	F (кН)	M (кНм)
1	2,5	3,0	2,7	2,4	2,6	4	10	20
2	2,6	2,9	2,4	2,2	2,5	5	18	24
3	2,1	2,7	3,0	2,5	2,4	4	20	26
4	1,9	2,3	2,5	2,6	3,0	6	14	28
5	1,8	2,5	2,8	3,0	2,2	4	15	22
6	2,2	2,6	2,9	2,8	2,0	7	12	25
7	2,4	2,0	2,2	2,0	2,6	9	20	24
8	2,7	2,2	3,2	2,6	2,7	8	16	20
9	2,9	2,4	3,0	2,7	3,0	5	22	30
10	3,0	2,3	2,6	3,2	2,8	6	18	32

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Баженов В.А., Гранат С.Я., Шишов О.В. Будівельна механіка. Комп'ютерний курс: Підручник. – К.: 1999. – 584 с.
2. Баженов В.А., Іванченко Г.М., Шишов О.В., Пискунов С.О. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування. – К. «Каравела»: 2010. – 502 с.
3. Баженов В.А., Перельмутер А.В., С.Я., Шишов О.В. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології: Підручник. – К.: 2009. – 696 с.

Допоміжна

1. Яценко Є.А. Курс лекцій з будівельної механіки. – К.: ІСДО, 1995. – 264 с.
2. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи за темою «Розрахунок статично визначеної рами» (приклад розрахунку) для студентів ступеня бакалавра спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» заочної форми навчання./ Укладачі: Варяничко М.О., Кожемякіна І.Ф., Нагорний Д.В. – Дніпро: ДВНЗ ПДАБА, 2022. –13 с.
3. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи за темою «Визначення переміщень в статично визначених системах» (приклад розрахунку) для студентів ступеня бакалавра спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» заочної форми навчання./ Укладачі: Варяничко М.О., Кожемякіна І.Ф., Нагорний Д.В. – Дніпро: ДВНЗ ПДАБА, 2022. –15с.

INTERNET – РЕСУРСИ

1. Сайт національної бібліотеки України ім. В.І. Вернадського [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.nbuv.gov.ua>.
2. MathCAD. Режим доступу: <http://surl.li/vbwlzc>
3. Віртуальний читальний зал ПДАБА. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://surl.li/nstnug>