УДК 330.356.7:519.865

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ КОББА-ДУГЛАСА І CES-ФУНКЦІЇ

ECONOMIC AND MATHEMATICAL PROPERTIES OF THE COBB-DOUGLAS PRODUCTION FUNCTION AND CES-FUNCTION

Янковий В.О.
кандидат економічних наук,
доцент кафедри економіки та планування бізнесу,
Одеський національний економічний університет

У статті обговорюються теоретичні та практичні питання використання виробничої функції Кобба-Дугласа і функції з постійною еластичністю заміщення ресурсів в економічних дослідженнях. Розглянуто процес моделювання випуску продукції залежності від двох важливіших чинників: розміру основних фондів і витрат на оплату праці на підприємствах харчової промисловості. У рамках даних виробничих функцій вивчено характер залежності продуктивності праці від фондоозброєності.
Ключові слова: *виробнича функція, еластичність заміщення ресурсів, оцінка параметрів, оптимальна фондоозброєність.*

В статье обсуждаются теоретические и практические вопросы использования производственной функции Кобба-Дугласа и функции с постоянной эластичностью замещения ресурсов в экономических исследованиях. Рассмотрен процесс моделирования выпуска продукции в зависимости от двух важнейших факторов: размера основных фондов и расходов на оплату труда на предприятиях пищевой промышленности. В рамках данных производственных функций изучен характер зависимости производительности труда от фондовооруженности.
Ключевые слова: *производственная функция, эластичность замещения ресурсов, оценка параметров, оптимальная фондовооруженность.*

Theoretical and practical issues of using the Cobb-Douglas production function and the function with the constant elasticity of substitution of the resources in economic research are discussed. The process of modeling the dependence of output on two main factors such as the size of fixed assets and the cost of labor in the food industry is considered. The nature of the dependence of labor productivity on capital-labor ratio within the framework of these production functions is studied.
Keywords: *production function, elasticity of substitution of the resources, estimate parameters, optimal capital-labor ratio.*

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв’язок із важливими науковими чи практичними завданнями. Серед виробничих функцій (ВФ), що застосовуються під час моделювання показників господарської діяльності на всіх рівнях управління, найбільш агрегованими є двохфакторні моделі, що описують залежність обсягу випущеної продукції Y від середньої річної вартості основних виробничих фондів (K) і витрат на оплату праці (L). При цьому можна вказати принаймні дві ВФ, які найбільш популярні в економічних дослідженнях і взаємопов’язані між собою: функція з постійною еластичністю заміщення, або *CES*-функція (від англ. абревіатури *Constant Elasticity of Substitution*), і функція Кобба-Дугласа.

CES-функція представляється в такий спосіб:

$$Y = A_0[A_1K^{-p} + (1 - A_1)L^{-p}]^{-\frac{\gamma}{p}}, \qquad (1)$$

де A_0 – коефіцієнт шкали ($0 < A_0$); A_1 – ваговий коефіцієнт виробничого фактора ($0 < A_1 < 1$); p – коефіцієнт заміщення ($-1 < p$); γ – показник ступеня однорідності ВФ ($0 < \gamma$).

ВФ (1) була розроблена К. Ерроу, Г. Чінері, Б. Мінхасом і Р. Солоу в 1961 р. [1]. У статті автори *CES*-функції звернулися до аналізу еластичності функцій, які використовувалися в той час. Наявні тоді ВФ припускали, що еластичність заміщення факторів σ приймає фіксоване числове значення. Наприклад, для ВФ Кобба-Дугласа $\sigma = 1$. Вони відзначили, що такого роду обмеження є занадто жорсткими, що часто не відповідають реальній економічній дійсності. Зазначений аргумент з’явився вирішальним мотивом для розроблення узагальненої функції (1), в якій еластичність заміщення також постійна, але може приймати будь-які значення згідно з такою формулою:

$$\sigma = 1/(1 + p). \qquad (2)$$

Однак методологічні аспекти вибору адекватної моделі, яка описує вплив факторів *K, L* на результати виробництва *Y*, виходячи з властивостей окремих ВФ, розроблено недостатньо. Зокрема, не існує обґрунтованих рекомендацій, коли як інструмент моделювання слід застосовувати ВФ Кобба-Дугласа, а коли – *CES*-функцію, як вирішити на їх основі проблему оптимізації фондоозброєності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор. Серед авторів, які займалися останнім часом дослідженням використання ВФ, узагальнених *CES*-функцією, необхідно відзначити роботи А.В. Артемової [2], Д.Н. Боровського [3], М.В. Казакової [4], В.М. Подладчикова [5], С.С. Шумської [6] та ін. Деякі аспекти проблеми, що розглядається, зустрічаються в публікаціях із мікроекономіки [7; 8]. Однак системний підхід до її вирішення в сучасній економічній літературі відсутній.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття. Досі не проведено комплексного порівняльного аналізу переваг і недоліків сімейства ВФ, узагальнених *CES*-функцією, не виділено їх важливіші економіко-математичні властивості.

Формулювання цілей статті **(постановка завдання)**. Мета статті полягає у тому, щоб ознайомити широке коло економістів із можливостями математико-статистичного моделювання наявних об'єктивних зв'язків між основними виробничими факторами і випуском продукції на базі ВФ Кобба-Дугласа і *CES*-функції, проілюструвати їх на конкретному прикладі вітчизняних підприємств харчової промисловості.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів. Обговорення економіко-математичних властивостей взаємопов'язаних ВФ, які визначають їх практичне застосування в економічних дослідженнях, почнемо з функції Кобба-Дугласа. Якщо у формулі (2) $p \to 0$, то $\sigma \to 1$ і *CES*-функція прямує до ВФ Кобба-Дугласа:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \qquad (3)$$

де A – коефіцієнт шкали ($0 < A$); α, β – параметри ВФ ($0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$).

Шляхом логарифмування лівої і правої частин (3) ВФ Кобба-Дугласа перетворюється в лінійну функцію з можливістю подальшого застосування стандартної програми «Регресія» для розрахунку її невідомих параметрів у редакторі *Excel*. Тому можна казати, що ВФ (3) виражає логарифм випуску продукції як лінійну функцію логарифмів витрат факторів *K, L*.

Для функції Кобба-Дугласа еластичність виробництва $e = \alpha + \beta$. За $\alpha + \beta = 1$ має місце постійна віддача від розширення масштабу виробництва (ВФ (3) лінійно однорідна); за $\alpha + \beta > 1$ спостерігається позитивна віддача від розширення масштабу виробництва; за $\alpha + \beta < 1$ має місце негативна віддача від розширення масштабу виробництва [5; 7].

Еластичність заміщення ВФ (3) $\sigma = 1$ означає, що за заданого випуску продукції Y збільшення одного з виробничих факторів на 1% забезпечує зниження іншого чинника також на 1%, і навпаки. У реальній економічній дійсності дане співвідношення часто не виконується.

Ізоквантами ВФ (3) є гіперболи, асимптоти яких представляють осі координат, а ізокостами – прямі з негативним нахилом, що виражають постійні сукупні витрати капіталу на основні фонди і оплату праці (рис. 1).

Із мікроекономіки відомо, що для заданого рівня загальних витрат $C_1 = K_1 + L_1$ (для необхідного обсягу випуску продукції Y_1) максимальний випуск (мінімальні витрати виробництва) досягається в точці B за оптимальної фондоозброєності K_1/L_1. Оскільки дана точка є точкою дотику ізокванти і ізокости ВФ, то максимальний випуск (мінімальні витрати) досягається за рівності нахилу ізокости та ізокванти, тобто саме в точці їх дотику на карті ізоквант та ізокост цієї ВФ (рис. 1).

У роботі [9] показано, що координати точки *B* на рис. 1 визначають оптимальну фондоозброєність *FO*, тобто такого розподілу загальних витрат C_1 на витрати капіталу K_1 й праці L_1, який максимізує вартість випуску продукції:

$$K_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}C_1; \quad L_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}C_1; \quad FO = \frac{K_1}{L_1} = \frac{\alpha}{\beta}. \qquad (4)$$

При цьому максимум випуску продукції у вартісному вираженні становить

$$Y_{\max} = \frac{A\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}(K_1+L_1)^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}} = A\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} L_1^{\alpha+\beta} = A\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta} K_1^{\alpha+\beta}. \qquad (5)$$

Гранична норма заміщення факторів MRS (*Marginal Ratio of Substitution*) ВФ Кобба-Дугласа в умовах оптимальної фондоозброєності FO дорівнює одиниці:

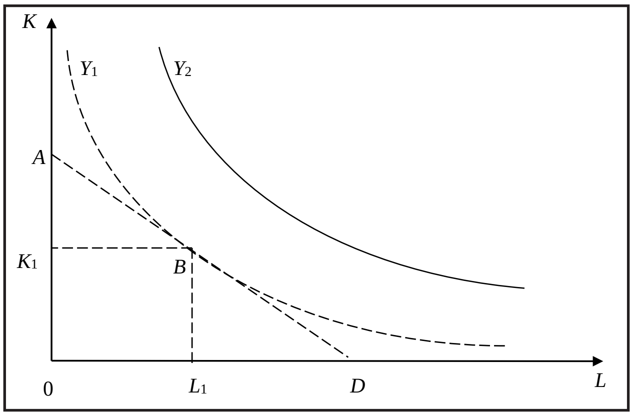

Рис. 1. Ізокванти та ізокости ВФ Кобба-Дугласа (ізокості *ABD* відповідають сукупні витрати $C_1 = K_1 + L_1$, а ізокванти задовольняють нерівність $Y_2 > Y_1$)

Джерело: побудовано автором

$$MRS = \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{K}{L} = \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta} = 1. \qquad (6)$$

Розглянемо характер залежності продуктивності праці від фондоозброєності в рамках даної ВФ. Для ВФ (3) продуктивність праці (середня віддача ресурсу *L*) визначається за формулою:

$$\frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{L} = \frac{AK^{\alpha}}{L^{1-\beta}}. \qquad (7)$$

Не втрачаючи загальності, проаналізуємо випадок, коли фондоозброєність прямує в нескінченність для лінійно однорідної функції (3), тобто за $n = \alpha + \beta = 1$. У даній ситуації формула (3) набуває такого вигляду:

$$\frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}}{L^{1-\beta}} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}. \qquad (8)$$

Очевидно, що за $K/L \to \infty$ ліва частина (8) теж прямує у нескінченність, що з економічної точки зору є не зовсім правдоподібно, оскільки реально продуктивність праці завжди обмежена (рис. 2).

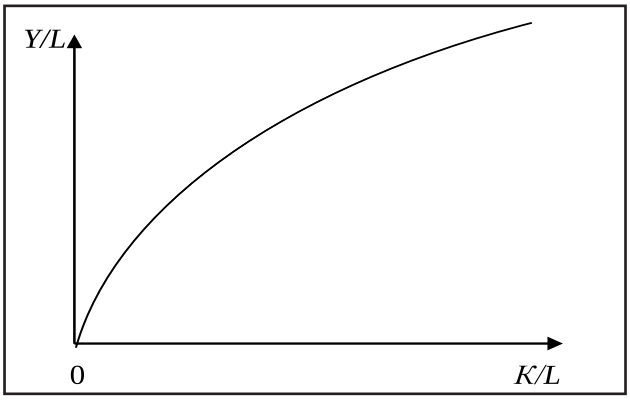

Рис. 2. Графік залежності продуктивності праці від фондоозброєності для ВФ Кобба-Дугласа

Джерело: побудовано автором

У табл. 1 наведено важливіші економіко-математичні параметри ВФ (3).

ВФ (1), (3) використовуються передусім для адекватного описання просторової варіації змінних *Y, K, L*. У разі ж часової варіації цих змінних указані ВФ дещо трансформуються (динамізуються). Динамізований аналог ВФ (3), відомий під назвою ВФ Кобба-Дугласа-Тінбергена, застосовується під час моделювання часової варіації змінних, наприклад за даними одного підприємства за ряд років. У цьому разі ВФ (3) приймає вигляд:

$$Y = Ae^{\lambda t}K^{\alpha}L^{\beta}. \qquad (9)$$

Тут у модель вводиться ще один фактор, так званий нейтральний науково-технічний прогрес із середнім темпом приросту λ, який відображає вплив на *Y* усіх чинників, окрім *K* і *L* (*t* – час, який приймає значення 1, 2, …, *N*).

Проілюструємо вказану процедуру за інформацією статистичної звітності Березинського комбінату хлібопродуктів за 2007–2015 рр. [10]. У результаті логарифмування вихідних даних і побудови моделі (9) було отримано рівняння:

$$Y = 2177161{,}258e^{-0{,}339t}K^{-2{,}531}L^{2{,}154}, \qquad (10)$$

де *Y* – реалізована продукція підприємства, тис. грн.

Логарифмічна частина моделі (10) статистично надійна (розрахункове значення *F*-критерію Фішера дорівнює 54,6); коефіцієнт детермінації – R^2 = 0,970; стандартна помилка – 0,0995.

Звернемо увагу на той факт, що в моделі (10) коефіцієнти за фактору *K* (основні фонди) – зі знаком «мінус». Це свідчить про те, що на Березинському комбінаті хлібопродуктів даний виробничий чинник негативно впливав на реалізацію продукції підприємства за період 2007–2015 рр.: підвищення середньої річної вартості

Таблиця 1

Основні характеристики ВФ Кобба-Дугласа

Показник	*K*	*L*
1. Середня віддача	$\frac{Y}{K} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{K} = AK^{\alpha-1}L^{\beta}$	$\frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{L} = AK^{\alpha}L^{\beta-1}$
2. Гранична віддача	$\frac{\partial Y}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}$	$\frac{\partial Y}{\partial L} = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}$
3. Еластичність випуску продукції, %	$EK = \alpha$	$EL = \beta$
4. Потреба у виробничих факторах	$K = \left(\frac{Y}{AL^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$	$L = \left(\frac{Y}{AK^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$
5. Заміщення факторів (фондоозброєність)	$\frac{K}{L} = \left(\frac{Y}{AL^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} : L = A^{-\frac{1}{\alpha}}Y^{\frac{1}{\alpha}}L^{-1-\frac{\beta}{\alpha}}$	
6. Гранична норма заміщення факторів	$MRS = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{K}{L}$	
7. Фондоозброєність, що забезпечує максимум випуску продукції *Y*	$\frac{\alpha}{\beta}$	

Джерело: розроблено автором

основних фондів на 1% приводило до зниження реалізації в середньому на 2,53%, а зростання витрат на робочу силу на 1% приводило до підвищення реалізації в середньому на 2,15 %. При цьому всі інші фактори, окрім K, L, негативно впливали на зміну Y: середнє щорічне відносне зниження реалізації на Березинському комбінаті хлібопродуктів за досліджуваний період становило майже 34%.

Якщо у формулі (2) коефіцієнт заміщення $p \neq -1, 0, \infty$, то еластичність заміщення – $\sigma \neq \infty, 1, 0$, тобто приймає довільні значення. При цьому можна казати про наявність класичної *CES*-функції як інструмента моделювання виробництва. Вона узагальнює інші ВФ, зокрема функцію Кобба-Дугласа.

Для ВФ (1) еластичність виробництва $e = \gamma$. За $\gamma = 1$ має місце постійна віддача від розширення масштабу виробництва (ВФ (1) лінійно однорідна); за $\gamma > 1$ спостерігається позитивна віддача від розширення масштабу виробництва; за $\gamma < 1$ має місце негативна віддача від розширення масштабу виробництва.

Ізоквантами *CES*-функції є криві залежності фактора K від фактора L за фіксованого випуску продукції Y. У разі лінійної однорідності ($\gamma = 1$) і $p > 0$ указані криві мають асимптоти $KY = Y(A_1)^{1/p}/A_0$, $LY = Y(1 - A_1)^{1/p}/A_0$, а їх графіки за зовнішнім виглядом нагадують графіки ізоквант ВФ Кобба-Дугласа (рис. 1) [5; 7].

У роботі [9] показано, що для ВФ (1) координати точки B на рис. 1 визначають оптимальну фондоозброєність FO, тобто такий розподіл загальних витрат C_1 на витрати капіталу K_1 й праці L_1, який максимізує вартість випуску продукції:

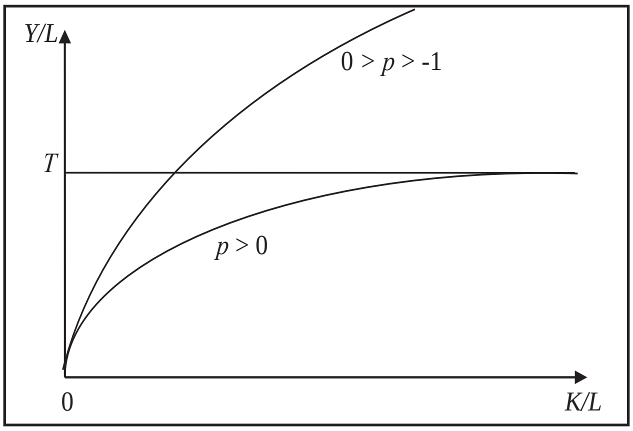

Рис. 3. Графіки залежності продуктивності праці від фондоозброєності в рамках *CES*-функції

Джерело: побудовано автором

$$FO = \frac{K_1}{L_1} = \left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{1+p}}. \qquad (11)$$

При цьому максимальний випуск продукції у вартісному вираженні, що описується *CES*-функцією, дорівнює

$$Y_{\max} = A_0 L (1-A_1)^{-\frac{\gamma}{p}} [FO+1]^{-\frac{\gamma}{p}}. \qquad (12)$$

Підставимо тепер значення оптимальної фондоозброєності з формули (11) у вираження граничної норми заміщення ресурсів *MRS* для ВФ (1):

$$MRS = \frac{1-A_1}{A_1}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+p} = \frac{1-A_1}{A_1}\left[\left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{1+p}}\right]^{1+p} = 1. \qquad (13)$$

Таблиця 2

Основні характеристики CES-функції

Показник	*K*	*L*
1. Середня віддача	$\frac{Y}{K} = A_0[A_1 + (1-A_1)\left(\frac{L}{K}\right)^{-p}]^{-\frac{1}{p}}$	$\frac{Y}{L} = A_0[A_1\left(\frac{K}{L}\right)^{-p} + (1-A_1)]^{-\frac{1}{p}}$
2. Гранична віддача	$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{A_1}{A_0{}^p}\left(\frac{Y}{K}\right)^{1+p}$	$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1-A_1}{A_0{}^p}\left(\frac{Y}{L}\right)^{1+p}$
3. Еластичність випуску продукції, %	$E_K = \frac{A_1}{A_0{}^p}\left(\frac{Y}{K}\right)$	$E_L = \frac{1-A_1}{A_0{}^p}\left(\frac{Y}{L}\right)^p$
4. Потреба у виробничих факторах	$K = [\left(\frac{Y}{A_0}\right)^{-p} - (1-A_1)L^{-p}]^{-\frac{1}{p}} A_1^{\frac{1}{p}}$	$L = [\left(\frac{Y}{A_0}\right)^{-p} - A_1 K^{-p}]^{-\frac{1}{p}} (1-A_1)^{\frac{1}{p}}$
5. Заміщення факторів (фондоозброєність)	$\frac{K}{L}$	
6. Гранична норма заміщення факторів	$MRS = \frac{1-A_1}{A_1}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+p}$	
7. Фондоозброєність, що забезпечує максимум випуску продукції Y		

Джерело: розроблено автором

Порівняння формул (6) і (13) показує, що в екстремальних ситуаціях *CES*-функція і ВФ Кобба-Дугласа поводять себе тотожно.

Проаналізуємо характер залежності продуктивності праці від фондоозброєності в рамках даної ВФ. Для *CES*-функції цей показник дорівнює:

$$\frac{Y}{L}=A_0[A_1\left(\frac{K}{L}\right)^{-p}+(1-A_1)]^{-\frac{1}{p}}=\frac{A_0}{\left[\frac{A_1}{(K/L)^p}+(1-A_1)\right]^{\frac{1}{p}}}. \quad (14)$$

Очевидно, що в разі $p > 0$ за $K/L \to \infty$ продуктивність праці у формулі (14) за будь-яких допустимих значень параметрів A_0, A_1 буде обмежена зверху величиною T:

$$\frac{Y}{L}=\frac{A_0}{(1-A_1)^{\frac{1}{p}}}=T. \quad (15)$$

Указана ситуація є найбільш правдоподібною з економічної точки зору. Якщо ж $0 > p > -1$ за $K/L \to \infty$ продуктивність праці у формулі (14) за будь-яких допустимих значень параметрів A_0, A_1 прямує в нескінченність аналогічно ВФ Кобба-Дугласа (рис. 2).

У табл. 2 наведено важливіші економіко-математичні параметри ВФ (1).

Динамізована *CES*-функція представляється так:

$$Y=A_0e^{\lambda t}[A_1K^{-p}+(1-A_1)L^{-p}]^{-\frac{1}{p}}. \quad (16)$$

Тут уважається, що $\gamma = 1$, тобто ВФ (16) є лінійно однорідною.

Порівняльний аналіз показує, що економіко-математичні властивості *CES*-функції забезпечують їй явні переваги порівняно з ВФ Кобба-Дугласа. Величина σ для неї може приймати будь-які постійні значення, що більшою мірою відповідає умовам виробництва в кожному конкретному випадку.

Вважається, що ВФ (1), (16) доцільно використовувати як інструменти моделювання виробництва за відсутності точної інформації про рівень заміщення факторів. При цьому є підстави вважати, що даний рівень суттєво не варіює за зміни обсягів залучених ресурсів, тобто коли застосовується стійка технологія щодо певних значень фондоозброєності. *CES*-функція використовується під час моделювання виробничих систем будь-якого рівня.

Однак існує одна важлива обставина, яка робить *CES*-функцію рідкісним гостем у сучасних економічних дослідженнях. Справа у тому, що ВФ (1), (16) привести до лінійного вигляду принципово неможливо, тому для оцінки їх невідомих коефіцієнтів необхідно використовувати наближені методи розрахунку, що вимагає наявності спеціального програмного забезпечення. Саме відносна простота визначення невідомих коефіцієнтів ВФ Кобба-Дугласа є її основною перевагою порівняно з *CES*-функцією. Цей факт зумовлює виняткову популярність ВФ (3), (9) в економетрії.

Розглянемо тепер наявні підходи, що дають змогу в кожному конкретному дослідженні об'єктивно обґрунтувати вибір між *CES*-функцією і ВФ Кобба-Дугласа. Дж. Кменті [11], Р. Вінн та К. Холден [12, с. 84–85] розділили ліву і праву частини формули (1) на L, прологарифмували знайдені результати і розклали один з елементів отриманої *CES*-функції в ряд Тейлора. Вони показали, що, по суті, відмінності між ВФ (1) і (3) зводяться до четвертого доданку, що стоїть у правій частині перетвореної ВФ (1):

$$\ln(Y/L) = C + D\ln L + E\ln(K/L) - M[\ln(K/L)]^2. \quad (17)$$

Тут C, D, E, M – певні коефіцієнти, які виражаються через вихідні параметри досліджуваних ВФ. При цьому якщо $p = 0$, то $M = 0$, і ці функції повністю збігаються, тобто відбувається перехід від ВФ (1) до ВФ (3). Отже, перевірка статистичної значущості коефіцієнта M у моделі (17) за допомогою t-критерію Стьюдента може служити об'єктивною підставою для вибору конкретної математичної форми з двох розглянутих

Таблиця 3

Вихідні дані для моделювання динаміки реалізованої продукції ПП «Гармаш»

Роки	*Y*, тис. грн.	*K*, тис. грн.	*L*, тис. грн.	*t*	*K/L*
2005	14820	13978	851	1	16,42538
2006	23439	14690	1401	2	10,48537
2007	40538	17644,5	2409	3	7,324408
2008	46790	23492,5	2839	4	8,274921
2009	42603	26834	3502	5	7,662479
2010	43214	30933	4913	6	6,296153
2011	53988	36957	7940	7	4,654534
2012	68049	37001,5	9202	8	4,021028
2013	67577	38113	8959	9	4,254158
2014	60321	42575	9591	10	4,439057
2015	66149	49128	8293	11	5,924032

Джерело: розроблено автором

ВФ. При цьому нульовою гіпотезою виступає $H_0 : M = 0$ проти альтернативи $H_a : M \neq 0$.

Обговоримо наявні можливості наближеної оцінки невідомих параметрів *CES*-функції. М. Кубініва та ін., використовуючи підхід Кменти як інструмент знаходження первісної оцінки параметрів ВФ (1), розробили процедуру пошуку рішення поставленої задачі із заданою точністю на базі використання ітеративного алгоритму мінімізації цільової функції залишків моделі за методом Марквардта. Вона знайшла своє втілення в програмі MACRO6, написаної на мові Бейсік [13, с. 137–149], яка досить легко адаптується до сучасного програмного забезпечення за допомогою макросів редактора *Excel*.

Проілюструємо зазначену процедуру на прикладі статистичної звітності приватного м'ясопереробного підприємства «Гармаш» (табл. 3).

Тут змінна *Y* позначає обсяг реалізованої продукції підприємства.

У результаті логарифмування вихідних даних і побудови моделі (17) отримане таке значення *t*-статистики Стьюдента для коефіцієнта *M*: -2,369; p-значення 0,049. Оскільки *p*-значення 0,049 < 0,050, то нульова гіпотеза $H_0 : M = 0$ відхиляється й приймається альтернатива $H_a : M \neq 0$. Отже, із достовірністю (1 – *p*-значення) = 1 – 0,049 = 0,951 або 95,1% можна стверджувати, що коефіцієнт *M* моделі (17) є статистично значущим, надійним. Приходимо до висновку, що емпіричні дані, які характеризують динаміку реалізованої продукції ПП «Гармаш», будуть точніше змодельовані на базі *CES*-функції.

Побудуємо ВФ (16) в явному вигляді, яка описує в часі залежність реалізованої продукції м'ясопереробного підприємства від капіталу і праці з урахуванням нейтрального науково-технічного прогресу. На шостий ітерації було отримане оптимальне рішення у вигляді рівняння:

$$Y = 0{,}6951 e^{0{,}0364t}[0{,}6025K^{0{,}1071} + 0{,}3975L^{0{,}1071}]^{9{,}3350}. \quad (18)$$

Модель (18) досить точно описує динаміку реалізованої продукції на ПП «Гармаш»: коефіцієнт детермінації R^2 показує, що 99,97% варіації реалізованої продукції підприємства описується побудованою моделлю; сума квадратів залишків рівняння досить мала (0,0003); значення критерію Дарбіна-Уотсона (2,28) не дуже вирізняється від оптимального (2,0).

Величина темпу приросту нейтрального науково-технічного прогресу $\lambda = 0{,}0364$ показує, що на досліджуваному підприємстві в середньому за рік реалізація зростала на 3,64% під впливом усіх факторів, окрім зміни капіталу і праці. На основі параметрів моделі (18) розрахуємо показник оптимальної фондоозброєності за формулою (11) для ПП «Гармаш»:

$$FO = \left(\frac{0{,}6025}{1 - 0{,}6025}\right)^{\frac{1}{1+0{,}1071}} = 1{,}5931.$$

Якщо звернутися до вихідних даних (табл. 3), то можна побачити, що фактична фондоозброєність на підприємстві істотно перевищує оптимальну. Це означає, що основні виробничі фонди на підприємстві знаходяться в надлишку. Даний висновок підтвердила і побудована ВФ Кобба-Дугласа: коефіцієнт за змінної ln(*K*) виявився статистично незначущим, ненадійним (критерій Стьюдента дорівнював -0,358, *p*-значущість – 0,73).

Найближчим до оптимального є фактичне значення фондоозброєності (4,021), що спостерігалося в 2012 р., і в цьому ж році ПП «Гармаш» дійсно отримало максимальну за досліджуваний період реалізовану продукцію – 68 049 тис. грн. Виникає питання: яку виручку від реалізації підприємство отримало б в 2012 р. за оптимальної фондоозброєності 1,5931? Щоб відповісти на нього, скористаємося формулою (12) з урахуванням динамізації *CES*-функції:

$$Y_{\max} = A_0 e^{\lambda t} L(1 - A_1)^{-\frac{1}{p}} [FO + 1]^{-\frac{1}{p}} =$$

$$0,\ 6951 \text{ x } 2{,}718282^{0{,}0364\text{x}8} 9202\ (1 - 0{,}6025)^{9{,}335}$$

$$[1{,}5931 + 1]^{9{,}335} = 70446{,}33 \text{ тис.грн.}$$

Отже, резерв росту реалізації за рахунок оптимізації фондоозброєності (наприклад, продажу частини невикористаних виробничих фондів і вкладення коштів у робочу силу) становить на підприємстві 70 446 – 68 049 = 2 397 тис. грн.

Висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямку. Методологічні аспекти моделювання факторів росту продукції підприємства, що були викладені в теоретичній частині статті, повністю підтвердились емпіричними розрахунками. Статистичний критерій вибору між ВФ Кобба-Дугласа і *CES*-функцією працює досить надійно, а ітеративна процедура оцінки невідомих коефіцієнтів *CES*-функції добре зарекомендувала себе під час моделювання динаміки продукції підприємства. Однак слід пам'ятати, що достовірність висновків за даним критерієм сильно залежить від довжини часового ряду *N*. На коротких вибірках (*N* < 10) потужність критерію низька і його використання може привести до помилки другого роду – невідхилення нульової гіпотези $H_0 : M = 0$, коли в дійсності справедлива альтернатива.

Перспективою подальших досліджень у цьому напрямі, на нашу думку, слід розглядати аналіз економіко-математичних властивостей інших ВФ, пов'язаних із *CES*-функцією, а саме функції Леонтьєва та лінійної функції.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Arrow K.J., Chenerry H.B., Minhas B.S., Solow R.M. (1961). Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency // The Review of Economics and Statistics. – Vol. 43. – № 3. – P. 225–250.

2. Артемова А.В. Методика оценивания затрат при производстве продукции / А.В. Артемова, М.А. Грищенко, Д.В. Лисняк [Электронный ресурс]. – Режим доступа : file:///C:/Users/qwerty/Downloads/piprp_2014_1_3%20(4).pdf.

3. Боровской Д.Н. Производственные функции и проблема выбора экономико-математической модели активного элемента / Д.Н. Боровской // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2008. – № 1(28). – С. 172–177.

4. Казакова М.В. Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста / М.В. Казакова [Электронный ресурс]. – Режим доступа : ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf.

5. Подладчиков В.Н. Микроэкономика. Производственные функции / В.Н. Подладчиков [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://i.kpi.ua/podladchikov/-menu=micro-firm-2-.htm.

6. Шумська С.С. Виробнича функція в економічному аналізі: теорія і практика використання / С.С. Шумська // Економіка прогнозування. – 2007. – № 2. – С. 138–153.

7. Определение производственной функции и её свойства. Маргинальные продукты [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://ouek.onu.edu.ua/uploads/courses/matheconomics.pdf.

8. Теорія виробництва і граничного продукту. Виробнича функція та її властивості [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.lnu.edu.ua/faculty/pravo/ekt/t17.doc.

9. Янковой В.А. Математический анализ неоклассических производственных функций / В.А. Янковой // Економіка. – 2016. – № 2(24). – С. 78–83 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://economics.opu.ua/files/archive/2016/No2/78.pdf.

10. Агентство з розвитку інфраструктури фондового ринку України [Електронний ресурс]. – Режим доступу : www.smida.gov.ua.

11. Kmenta J. (1967). On Estimation of the CES Production Function // International Economic Review, vol. 8. – P. 180–189.

12. Винн Р., Холден К. Введение в прикладной эконометрический анализ / Р. Винн, К. Холден ; пер. с англ. С.А. Николаенко. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 294 с.

13. Математическая экономика на персональном компьютере / М. Кубинива, М. Табата, С. Табата, Ю. Хасэбэ ; пер. с япон. под ред. М. Кубинива. – М. : Финансы и статистика, 1991. – 304 с.