

УДК 519.21

DOI: 10.30838/J.PMNTM.2413.230419.24.289

## ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ФРАКТАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В МАТЕРИАЛОВЕДЕНИИ

БОЛЬШАКОВ В. И.<sup>1</sup>, д. т. н., проф.,  
ВОЛЧУК В. Н.<sup>2\*</sup>, д. т. н., доц.,  
ДУБРОВ Ю. И.<sup>3</sup>, д. т. н., проф.

<sup>1</sup> Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днепро, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [bolshakov@mail.pgasa.dp.ua](mailto:bolshakov@mail.pgasa.dp.ua), ORCID ID: 0000-0003-0790-6473

<sup>2\*</sup> Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днепро, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [volchuky@gmail.com](mailto:volchuky@gmail.com), ORCID ID: 0000-0001-7199-192X

<sup>3</sup> Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днепро, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [mom@mail.pgasa.dp.ua](mailto:mom@mail.pgasa.dp.ua), ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

**Аннотация. Введение.** Сложность идентификации фрактальных объектов инициирует поиск алгоритмов их описания. К таким объектам можно отнести структуру металлов, определяет ряд их основных свойств, и обычно описывается традиционными методами. Эти методики построены на применении евклидовой геометрии (длина, площадь, объем). Это приводит к неполноте формальной аксиоматики, возникающей при идентификации элементов структуры. Применение фрактальной геометрии позволяет частично устранить неполноту формальной аксиоматики, но для этого необходимо разработать алгоритмы ее реализации. **Методика.** Авторами для описания структуры и свойств металлов предложен алгоритм, включающий в себя основные этапы фрактального моделирования. **Результаты и их обсуждение.** Отдельные этапы фрактального моделирования приведены для валкового чугуна. Для их реализации определена область самоподобия элементов структуры, чувствительность механических свойств чугуна в фрактальной размерности структуры, проведена формализация результатов исследования. **Выводы.** Представлены основные этапы фрактального моделирования, применяются для оценки структуры и свойств металлов. Результаты работы свидетельствуют о перспективах применения фрактального моделирования в материаловедении в зависимости от поставленной задачи и выбранного объекта исследования.

*Ключевые слова:* фрактал; моделирование; критерии качества; критерий чувствительности; структура

## ОСНОВНІ ЕТАПИ ФРАКТАЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В МАТЕРІАЛОЗНАВСТВІ

БОЛЬШАКОВ В. І.<sup>1</sup>, д. т. н., проф.,  
ВОЛЧУК В. М.<sup>2\*</sup>, д. т. н., доц.,  
ДУБРОВ Ю. І.<sup>3</sup>, д. т. н., проф.

<sup>1</sup> Кафедра матеріалознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [bolshakov@mail.pgasa.dp.ua](mailto:bolshakov@mail.pgasa.dp.ua), ORCID ID: 0000-0003-0790-6473

<sup>2\*</sup> Кафедра матеріалознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [volchuky@gmail.com](mailto:volchuky@gmail.com), ORCID ID: 0000-0001-7199-192X

<sup>3</sup> Кафедра матеріалознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [mom@mail.pgasa.dp.ua](mailto:mom@mail.pgasa.dp.ua), ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

**Анотація. Вступ.** Складність ідентифікації фрактальних об'єктів ініціює пошук алгоритмів їх опису. До таких об'єктів можна віднести структуру металів, що визначає ряд їх основних властивостей, та за звичай описується традиційними методами. Ці методики побудовані на застосуванні евклідової геометрії (довжина, площа, об'єм). Це призводить до неповноти формальної аксіоматики, що виникає при ідентифікації елементів структури. Застосування фрактальної геометрії дозволяє частково усунути неповноту формальної аксіоматики, але для цього необхідно розробити алгоритми її реалізації. **Методика.** Авторами для опису структури і властивостей металів запропоновано алгоритм, що включає в себе основні етапи фрактального моделювання. **Результати та їх обговорення.** Окремі етапи фрактального моделювання наведені для валкового

чавуну. Для їх реалізації визначена область самоподібності елементів структури, чутливість механічних властивостей чавуну до фрактальної розмірності структури, проведена формалізація результатів дослідження. **Висновки.** Представлені основні етапи фрактального моделювання, що застосовуються для оцінки структури та властивостей металів. Результати роботи свідчать про перспективи застосування фрактального моделювання в матеріалознавстві в залежності від поставленої задачі та обраного об'єкту дослідження.

*Ключові слова:* фрактал; моделювання; критерії якості; критерій чутливості; структура

## MAIN STAGES OF FRACTAL MODELING IN MATERIAL SCIENCE

BOL'SHAKOV V.I.<sup>1</sup>, *Dr. Sc. (Tech.), Prof.*,  
VOLCHUK V.M.<sup>2\*</sup>, *Dr. Sc. (Tech.), As. Prof.*,  
DUBROV Yu.I.<sup>3</sup>, *Dr. Sc. (Tech.), Prof.*

<sup>1</sup> Department of Materials Science and Materials Processing, State Higher Education Establishment "Pridniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture", 24-a, Chernyshevskogo str., Dnipro 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [bolshakov@mail.pgasa.dp.ua](mailto:bolshakov@mail.pgasa.dp.ua), ORCID ID: 0000-0003-0790-6473

<sup>2\*</sup> Department of Materials Science and Materials Processing, State Higher Education Establishment "Pridniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture", 24-a, Chernyshevskogo str., Dnipro 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [volchuky@gmail.com](mailto:volchuky@gmail.com), ORCID ID: 0000-0001-7199-192X

<sup>3</sup> Department of Materials Science and Materials Processing, State Higher Education Establishment "Pridniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture", 24-a, Chernyshevskogo str., Dnipro 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: [mom@mail.pgasa.dp.ua](mailto:mom@mail.pgasa.dp.ua), ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

**Abstract. Introduction.** The complexity of identifying fractal objects initiates a search for algorithms for their description. These objects include the structure of metals, determines a number of their basic properties, and is usually described by traditional techniques. These techniques are based on the use of Euclidean geometry (length, area, volume). This leads to the incompleteness of the formal axiom that arises when identifying the elements of the structure. The use of fractal geometry allows to partially eliminate the incompleteness of formal axiomatics, but for this it is necessary to develop algorithms for its implementation. **The technique.** The authors have proposed an algorithm for describing the structure and properties of metals, which includes the main stages of fractal modeling. **Results and its discussion.** Separate stages of fractal modeling are given for roller iron. For their realization, the region of self-similarity of the structure elements, the sensitivity of the mechanical properties of cast iron in the fractal dimension of the structure, are determined, the research results are formalized. **Conclusions.** The regularities of the influence of the fractal dimension of the C73 structure elements on the mechanical properties are established. The developed models make it possible to predict the properties of mild steel depending on the transformations of its microstructure due to the effects of heat treatment.

*Keywords:* fractal; modeling; quality criteria; sensitivity criterion; structure

### Введение

На пути создания моделей фрактального типа появляются трудности, связанные с задачами, для решения которых существуют методы математического программирования оказываются непригодными. Преодоление таковых, исследователи нередко производят путём экспертного анализа [1; 2]. При этом изотропность получаемого при фрактальном моделировании пространства состояний объекта часто обосновывают ограничениями, допускающими экстраполяцию тенденций развития математической модели в относительно узкой рабочей области [3].

Широкий спектр идентифицируемых объектов диктует представление их рабочих областей, как неэлементарных, неэргодических многообразий<sup>1</sup>, метрика которых представляется множеством

координатных систем, связанных между собой произвольными, взаимно однозначными преобразованиями. В плане практических применений реализация подобной метрики является относительно сложной, что является основанием для введения процесса поиска стратегий, диктующих вид исследуемых фрактальных моделей [4].

### Методики

В работе приводятся отдельные фрагменты методики организации фрактального моделирования, приведенная в [6; 7]:

- модель фрактального типа, основанная на определении самоподобия объекта (инвариантность по отношению к масштабу представления) [5, 6];
- назначение масштаба представления модели фрактала (масштаба структуры);
- исследование модели на соответствие условиям, отвечающим критерию чувствительности [4]:

$$K = |Y_i - Y_{i+1}| / |X_i - X_{i+1}|,$$

<sup>1</sup> Для неэлементарного многообразия невозможно в целом ввести координатную систему с обычными требованиями взаимной однозначности и непрерывности соответствия.

де  $X_i$  та  $X_{i+1}$  – показателі якості в двох реперних точках;  $Y_i$  та  $Y_{i+1}$  – значення фрактальних розмірностей елементів структури в цих точках.

– визначення параметра, перемінних і контрольних точок в пространстві состояний досліджуваної моделі;

– вичислення фрактальної розмірності  $D$  структури за формулою:  $D = \log N(\delta) / \log (\delta)$ , где  $N(\delta)$  – число котроріе покрьіли объект дослідвання (структуру);  $\delta$  – лінійні розміри клітки;

– с целью установления степени неоднородности фрактала производится проверка на принадлежность модели к мультифрактальной [7];

– корективировка модели.

### Результаты и их обсуждение

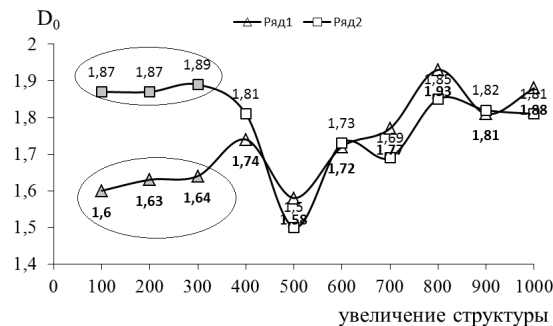


Рис. 1. Выбор масштаба представления включений графита валкового чугуна / Fig. 2. The choice of the optimal scale representation of the structure of roller iron

Для валков исполнения СШХН определена чувствительность механических свойств к фрактальной, информационной и корреляционной размерностям шаровидного графита при увеличении структуры  $\times 200$  (рис. 2). Показатели чувствительности механических свойств валкового чугуна к размерностям оценкам элементов структуры  $D_0, D_1, D_2$  в 3...5 раз превышают показатели чувствительности к граничным размерностям из спектра  $D_{200}, D_{-200}$ . Как следует из гистограммы,

Приведен алгоритм реализации основных этапов фрактального моделирования для оценки критериев качества чугунных валков исполнения СШХН с гладкой бочкой.

Свойство самоподобия микроструктуры валкового чугуна рассматривалось на масштабах:

$$l_{min} \leq l \leq l_{max}.$$

Диапазон структуры изменялся от  $\times 100$  до  $\times 1000$ . Результаты определения масштаба самоподобия элементов структуры приведены на рис. 1.

Для сопоставления степени влияния структуры материала на конкретный показатель качества определялся коэффициент с целью отсеивания «отсеивания» низких показателей с низкой чувствительностью и с целью повышения точности прогноза свойств.

представленной на рис. 2 а, высокая чувствительность механических свойств рабочей зоны бочек валков к фрактальной размерности графита наблюдается для показателей твердости (0,61), а низкая – для предела прочности на разрыв (0,007), что свидетельствует о влиянии размерности графита на эти свойства. Показатель чувствительности ударной вязкости к информационной размерности шаровидного графита (рис. 3 б) составляет 0,057.

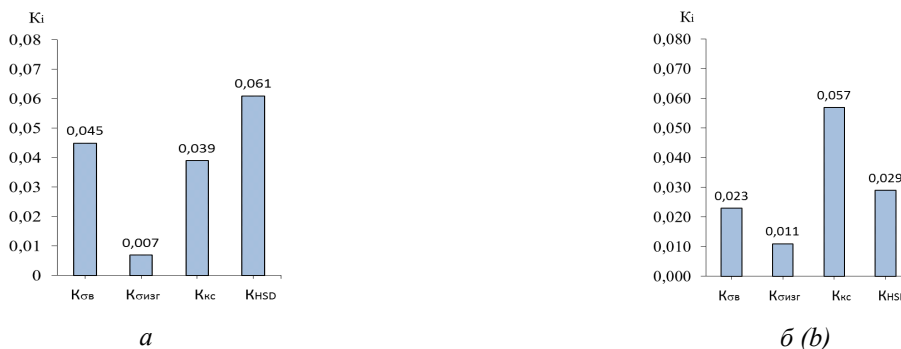


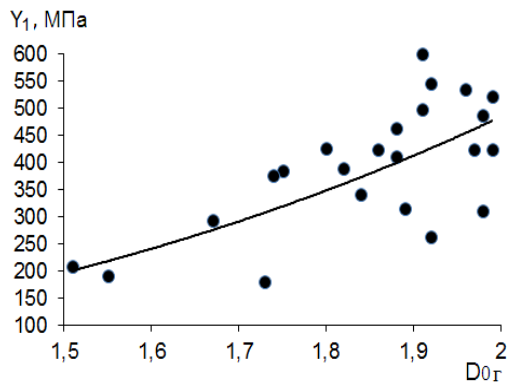
Рис. 2. Чувствительность механических свойств к фрактальной (а) и информационной (б) размерностям графита рабочей зоны бочек валков исполнения СШХН / Fig. 3. Sensitivity of mechanical properties to fractal (а) and informational (б) dimensions of graphite of the working area of roll barrels of the СШХН design

Установлен ряд зависимостей структуры и свойств валкового чугуна с шаровидной формой графита. Для валков исполнения СШХН исходя из анализа графиков, приведенных на рисунке 3 а-в, увеличение показателей качественных характеристик происходит в соответствии со степенным законом (1-3):

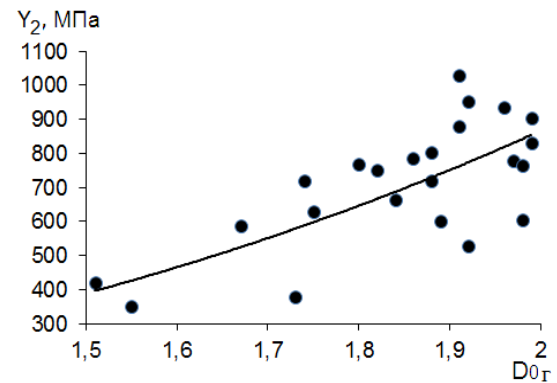
$$Y_1 = 55,185 \cdot D_{0\text{а}}^{3,1302}, \quad R^2 = 0,51 \quad (1)$$

$$Y_2 = 126,000 \cdot D_{0\text{а}}^{2,7811}, \quad R^2 = 0,54 \quad (2)$$

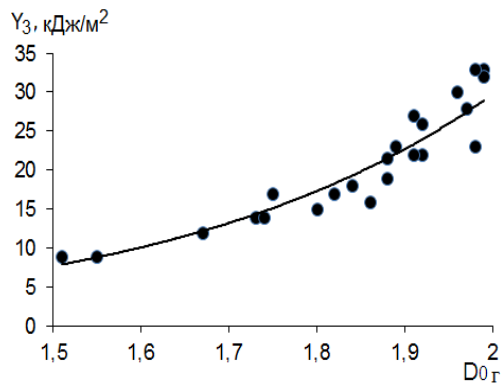
$$Y_3 = 0,1323 \cdot \exp(2,7074 \cdot D_{0\text{г}}), \quad R^2 = 0,91 \quad (3)$$



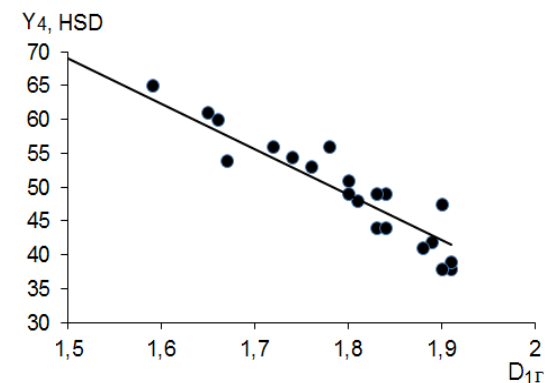
а



б (b)



в (c)



г (d)

Рис. 4. Зависимость предела прочности на разрыв –  $Y_1$ , предела прочности на изгиб –  $Y_2$ , ударной вязкости –  $Y_3$  от фрактальной размерности шаровидного графита –  $D_0$  (а, б, в) и твердости –  $Y_4$  от информационной размерности шаровидного графита –  $D_1$  (г) валков исполнения СШХН / Fig. 4. Dependence of tensile strength –  $Y_1$ , bending strength –  $Y_2$ , impact toughness  $Y_3$  on the fractal dimension of spherical graphite  $D_0$  (a, b, c) and hardness –  $Y_4$  on the information dimension of spherical graphite  $D_1$  (d) rolls performance СШХН

Таким образом, отмечается рост показателей механических свойств при изменении фрактальной размерности графита в сторону ее повышения с 1,51 до 2 (форма компактного графита). При уменьшении информационной размерности графита с 1,92 до 1,58 показатели твердости чугуна линейно повышаются (рис. 3 г, (4)):

$$Y_4 = -67,239 \cdot D_{1\text{г}} + 170. \quad R^2 = 0,90. \quad (4)$$

### Выводы

Рассмотрены основные этапы фрактального моделирования структуры и свойств валкового чугуна. Приведенные данные свидетельствуют о связи фрактальной размерности шаровидного графита с механическими свойствами, что может использоваться при их прогнозировании.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Kroviakov S. Management of the Properties of Shipbuilding Expanded Clay Lightweight Concrete / S. Kroviakov, A. Mishutin, O. Pishev // International Journal of Engineering & Technology. – 2018, [S.l.]. – Vol. 7 – № 3.2. – Pp. 245–249.
2. Mishutin A. Modified expanded clay light weight concretes for thin-walled reinforced concrete floating structures / A. Mishutin, S. Kroviakov, O. Pishev, B. Soldo // Tehnički glasnik-Technical Journal. – 2017. – Vol. 11. – № 3. – Pp. 121–124.

3. Kroviakov S. Production technology of modified expanded clay lightweight concrete for floating structures / S. Kroviakov, A. Mishutin // The Scientific Journal of Cihan University – Sulaimanya. – 2017. – Vol. 1. – № 4. – Pp. 2–10.
4. Большаков В. И. Влияние структуры аустенита и продуктов его распада на квазихрупкое разрушение высокопрочного толстолистового проката для строительства / В. И. Большаков, Д. В. Лаухин, С. В. Иванцов // Строительство, материаловедение, машиностроение. – Днепропетровск : ГБУЗ ПГАСА, 2016. – Вып. 89. – С. 30–36.
5. Uzlov O. Investigation of acicular ferrite structure in HSLA steel / O. Uzlov, V. Bolshakov // Proceedings of the "Materials Week 2002". – Frankfurt : Werkstoff-Informationsgesellschaft, 2002. – Режим доступа : [www.irbis-nbuv.gov.ua/.../cgiirbis\\_64.exe?](http://www.irbis-nbuv.gov.ua/.../cgiirbis_64.exe?)
6. Fractals and properties of materials : monograph / [V. Bol'shakov, V. Volchuk, Yu. Dubrov]. – Saarbrücken : Lambert Academic Publishing, 2016. – 140 p. – Режим доступа : <https://www.lap-publishing.com/catalog/details/store/tr/book/978-3-330-01812-9/fractals-and-properties-of-materials?search=Fractals>
7. Пути применения теории фракталов : монография / [В. Большаков, В. Волчук, Ю. Дубров]. – Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2016. – 146 с. – Режим доступа : <https://www.palmarium-publishing.ru/extern/listprojects>
8. Основы организации фрактального моделирования : монография / [В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров]. – Киев : Академперіодика НАН України, 2017. – 170 с.
9. Bolshakov V. I. Regularization of One Conditionally III-Posed Problem of Extractive Metallurgy / V. I. Bolshakov, V. M. Volchuk, Yu. I. Dubrov // Metallofizika i Noveishie Tekhnologii. – 2018. – Vol. 40, № 9. – Pp. 1165–1171. – Режим доступа : [DOI: 10.15407/mfint.40.09.1165](https://doi.org/10.15407/mfint.40.09.1165)
10. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature : monograph / [B. B. Mandelbrot]. – New-York, San Francisco : Freeman, 1982. – 480 p. – Режим доступа : <http://www.amazon.com/Fractal-Geometry-Nature-Benoit-Mandelbrot/dp/0716711869>
11. Большаков В. И. Организация фрактального моделирования / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Доповіді НАН України. – 2018. – № 6. – С. 67–72. – Режим доступа : <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.067>
12. Большаков В. И. Разработка и исследование метода определения механических свойств металла на основе анализа фрактальной размерности его микроструктуры / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Металознавство та термічна обробка металів. – 2004. – № 1. – С. 43–54.
13. Большаков В. И. Особенности применения мультифрактального формализма в материаловедении / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Доповіді НАН України. – 2008. – № 11. – С. 99–107. – Режим доступа : <http://www.dopovidi.nas.gov.ua/2008-11/08-11-17.pdf>
14. Volchuk V. Method of material quality estimation with usage of multifractal formalism / V. Volchuk, I. Klymenko, S. Kroviakov, M. Orešković // Tehnički glasnik – Technical Journal. – 2018. – Vol. 12. – № 2. – P. 93–97. – Режим доступа : <https://hrcak.srce.hr/202359>
15. Журавель І. М. Вибір налаштувань під час обчислення поля фрактальних розмірностей зображення / І. М. Журавель // Науковий вісник НЛТУ України – 2018. – Т. 28. – № 2. – С. 159–163. – Режим доступу : <https://doi.org/10.15421/40280230>
16. Zhuravel' I. M. Measurement of the mean grain size in a metal by using fractal dimensions / I. M. Zhuravel', L. M. Svir'ska // Materials Science. – 2010. – Vol. 46. – № 3. – Pp. 418–420.
17. Большаков В. И. Идентификация многопараметрических, многокритериальных технологий и пути их практической реализации / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Металознавство та термічна обробка металів. – 2013. – № 4. – С. 5–11.
18. Волчук В. Н. К применению фрактального формализма при ранжировании критериев качества многопараметрических технологий / В. Н. Волчук // Metallofizika i noveishie tekhnologii. – 2017. – Т. 39. – № 3. – С. 949–957. – Режим доступа : <http://mfint.imp.kiev.ua/ru/abstract/v39/i07/0949.html>
19. Пути идентификации периодических многокритериальных технологий : монография / [Ю. Дубров, В. Большаков, В. Волчук]. – Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2015. – 236 с. – Режим доступа : <https://www.palmarium-publishing.ru/extern/listprojects>
20. Большаков В. И. Топологические и фрактальные инварианты структуры для оценки качества металла / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Доповіді НАН України. – 2017. – № 4. – С. 42–48. – Режим доступа : <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.04.00>
21. Волчук В. Н. К вопросу о применении теории мультифракталов для оценки механических свойств металла / В. Н. Волчук // Металознавство та термічна обробка металів. – 2014. – № 3. – С. 12–19. – Режим доступа : <http://mtom.pgasa.dp.ua/article/view/12-19>
22. Большаков В. И. К вопросу о постановке задачи идентификации фрактальной структуры металла / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – 2016. – № 5. – С. 35–39. – Режим доступа : <http://visnyk.pgasa.dp.ua/article/view/68905/63995>
23. Большаков В. И. Фрактальный подход при идентификации сложных систем / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Доповіді НАН України. – 2017. – № 6. – С. 46–50. – Режим доступа : <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.06.00>
24. Большаков В. И., Дубров Ю. И., Криулін Ф. В., Волчук В. М. Патент на винахід № 51439А України. Спосіб визначення фрактальної розмірності зображення. – Бюл. № 11. – 15.11.2002. – Режим доступу : <http://uapatents.com/3-51439-sposib-viznachennya-fraktalno-rozmirnosti-zobrazhennya.html>

## REFERENCES

1. Kroviakov S., Mishutin A. and Pishev O. Management of the Properties of Shipbuilding Expanded Clay Lightweight Concrete. International Journal of Engineering & Technology. 2018, [S.I.], vol. 7, no. 3.2, pp. 245–249.
2. Mishutin A., Kroviakov S., Pishev O. and Soldo B. Modified expanded clay light weight concretes for thin-walled reinforced concrete floating structures. Tehnički glasnik – Technical Journal. 2017, vol. 11, no. 3, pp. 121–124.

3. Kroviakov S. and Mishutn A. Production technology of modified expanded clay lightweight concrete for floating structures. *The Scientific Journal of Cihan University – Sulaimanyia*. 2017, vol. 1, no. 4, pp. 2–10.
4. Bol'shakov V.I., Lauhin D.V. and Ivantsov S.V. *Vliyaniye struktury austenita i produktov yego raspada na kvazikhрупkoye razrusheniye vysokoprochnogo tolstolistovogo prokata dlya stroitel'stva* [Influence of austenite structure and its decay products on the quasi-brittle fracture of high strength plate for building construction]. *Stroitel'stvo, materialovedenie, mashynostroenie* [Building, materials science, mechanical engineering]. Dnipropetrovs'k : Pridnepros'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture, 2016, no. 89, pp. 30–36. (in Russian).
5. Uzlov O. and Bolchakov V. Investigation of Acicular Ferrite Structure in HSLA Steel. "MATERIALS WEEK 2002 – Proceedings", Ed. Werkstoffwoche-Partnerschaft GbR, Publisher: Werkstoff-Informationsgesellschaft, Frankfurt, 2002.
6. Bolshakov V., Volchuk V. and Dubrov Yu. *Fractals and properties of materials*. Saarbrucken : Lambert Academic Publishing, 2016, 140 p.
7. Bolshakov V., Volchuk V. and Dubrov Yu. *Puti primeneniya teorii fraktalov* [Ways of applying the theory of fractals]. Saarbrucken : Palmarium Academic Publishing, 2016, 146 p. (in Russian).
8. Bolshakov V.I., Volchuk V.M. and Dubrov Yu.I. *Fundamentals of fractal modeling*. Kyiv, Ukraine : PH "Akademperiodyka" National Academy of Sciences of Ukraine, 2017, 170 p. (in Russian).
9. Bolshakov V.I., Volchuk V.M. and Dubrov Yu.I. Regularization of One Conditionally ill-Posed Problem of Extractive Metallurgy. *Metallofizika i Noveishie Tekhnologii*. 2018, vol. 40, no 9, pp. 1165–1171.
10. Mandelbrot B.B. *The Fractal Geometry of Nature*. New-York, San Francisco : Freeman, 1982, 480 p.
11. Bolshakov V.I., Volchuk V.M. and Dubrov Yu.I. *Organizatsiya fraktal'nogo modelirovaniya* [Organization of fractal modeling]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2018, no. 6, pp. 67–72. (in Russian).
12. Bol'shakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Razrabotka i issledovaniye metoda opredeleniya mekhanicheskikh svoystv metalla na osnove analiza fraktal'noy razmernosti yego mikrostruktury* [Development and study of the method for determining the mechanical properties of a metal based on an analysis of the fractal dimension of its microstructure]. *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov* [Metall Science and Heat Treatment of Metals]. 2004, no. 1, pp. 43–54. (in Russian).
13. Bolshakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Osobennosti primeneniya multifraktal'nogo formalizma v materialovedenii* [Features of the multifractal formalism in materials]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2008, no. 11, pp. 99–107. (in Russian).
14. Volchuk V., Klymenko I., Kroviakov S., Orešković M. Method of material quality estimation with usage of multifractal formalism. *Tehnički glasnik – Technical Journal*, 2018, vol. 12, no. 2, pp. 93–97.
15. Zhuravel' I.M. *Vybir nalashtuvan pid chas obchyslennya polya fraktal'nykh rozmirnostey zobrazhennya* [The choice of parameters when calculating the fractal dimension of the image] *Naukovyy visnyk NLTU Ukrayiny* [Scientific Bulletin of UNFU]. 2018, vol. 28, no 2, pp. 159–163. (in Ukrainian).
16. Zhuravel' I.M. and Svirs'ka L.M. Measurement of the mean grain size in a metal by using fractal dimensions. *Materials Science*, 2015, vol. 46, no 3, pp. 418–420.
17. Bolshakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Identifikatsiya mnogoparametricheskikh, mnogokriterial'nykh tekhnologiy i puti ikh prakticheskoy realizatsii* [Multiparameter identification, multicriteria techniques and ways of their implementation]. *Metalloznavstvo ta termichna obrobka metaliv* [Metall Science and Heat Treatment of Metals]. 2013, no. 4, pp. 5–11. (in Russian).
18. Volchuk V.M. *K primeneniyu fraktal'nogo formalizma pri ranzhirovanii kriteriyev kachestva mnogoparametricheskikh tekhnologiy* [On the Application of Fractal Formalism for Ranging Criteria of Quality of Multiparametric Technologies]. *Metallofizika i noveyshiy tekhnologii* [Metal Physics and Advanced Technologies]. 2017, vol. 39, no 3, pp. 949–957. (in Russian).
19. Dubrov Yu., Bolshakov V. and Volchuk V. *Puti identifikatsii periodicheskikh mnogokriterial'nykh tekhnologiy* [Road periodic identification of multi-criteria Technology]. Saarbrucken : Palmarium Academic Publishing, 2015, 236 p. (in Russian).
20. Bolshakov V.I., Volchuk V.M. and Dubrov Yu.I. *Topologicheskkiye i fraktal'nyye invarianty struktury dlya otsenki kachestva metalla* [Topological and fractal invariants of a structure to assess the quality of a metal]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2017, no. 4, pp. 42–48. (in Russian).
21. Volchuk V.N. *K voprosu o primenenii teorii multifraktalov dlya otsenki mekhanicheskikh svoystv metalla* [On the application of the theory of multifractals for the evaluation of the mechanical properties of a metal]. *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov* [Metall Science and Heat Treatment of Metals]. 2014, no. 3, pp. 12–19. (in Russian).
22. Bol'shakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *K voprosu o postanovke zadachi identifikatsii fraktal'noy struktury metalla* [Statement on the issue of the problem identification of fractal metal structures]. *Visnyk Prydniprov's'koyi derzhavnoyi akademiyi budivnytstva ta arkhitektury* [Bulletin of Prydniprov's'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture]. 2016, no. 5, pp. 35–39. (in Russian).
23. Bolshakov V.I., Volchuk V.M. and Dubrov Yu.I. *Fraktal'nyy podkhod pri identifikatsii slozhnykh sistem* [Fractal approach to the identification of complex systems]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2017, no. 6, pp. 46–50. (in Russian).
24. Bol'shakov V.I., Dubrov Yu.I., Kryulin F.V. and Volchuk V.N. *Sposib vyznachennya fraktal'noyi rozmirnosti zobrazhennya* [Method for Determining the Dimensionality of Images]. Patent product no. 51439A, UA. MPK 7 G06K9/00, bulletin no. 11, 2002. (in Ukrainian).

Поступила в редакцію 03.04.2019.

Принята к печати 07.04.2019.