

УДК 531.46

DOI: 10.30838/J.BPSACEA.2312.221019.19.517

## ОПІР КОЧЕННЮ В МЕХАНІЗМАХ З ТОЧКОВИМИ ТА ЛІНІЙНИМИ СХЕМАМИ ДОТИКУ

БОНДАРЕНКО Л. М.<sup>1</sup>, к. т. н., доц.,

ДЬОМІН Г. К.<sup>2\*</sup>, к. т. н., доц.,

БУРАТИНСЬКИЙ А. П.<sup>3\*</sup>, к. т. н.,

ДОРОФЄЄВА В. С.<sup>4</sup>, студ.

<sup>1</sup> Кафедра прикладної механіки, Дніпровський національний університет залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, 49010, Дніпро, Україна, тел. +38 (056) 373-15-18, e-mail: [bondarenko-l-m2015@yandex.ua](mailto:bondarenko-l-m2015@yandex.ua), ORCID ID: 0000-0002-2212-3058

<sup>2\*</sup> Кафедра теоретичної механіки, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (97) 448-00-36, e-mail: [gennady.demin@gmail.com](mailto:gennady.demin@gmail.com), ORCID ID: 0000-0001-7470-0147

<sup>3</sup> Кафедра теоретичної механіки, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (067) 252-13-09, e-mail: [buric@ua.fm](mailto:buric@ua.fm), ORCID ID: 0000-0001-5152-3766

<sup>4</sup> Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (063) 822-09-01, e-mail: [dorofeevav00@gmail.com](mailto:dorofeevav00@gmail.com)

**Анотація. Постановка проблеми.** У більшості задач механіки коефіцієнтом тертя кочення або нехтують, або задаються його величиною без урахування схем контакту тіл кочення, їх матеріалів і розмірів. На підставі теорії контактних напружень Герц отримав аналітичні залежності, що дозволяють обчислювати параметри тертя кочення з найбільшою вірогідністю порівняно з аналогічними інших авторів. Але у формулах Герца введено параметр «коефіцієнт гістерезисних втрат», визначення якого вимагає часу і коштів не менше, ніж отримання величини самого коефіцієнта тертя кочення. Це не дає можливості використовувати їх в інженерній практиці для визначення величини сили тертя, а, відповідно, і коефіцієнта корисної дії (ККД) цілого ряду механізмів із коченням. Через це потужність приводу механізмів доводиться в силу невизначеності його ККД приймати завищеною. **Мета статті** – визначити ККД широко використовуваних механічних пристроїв, в яких присутній тертя кочення. Відповідно до сформульованої мети в процесі дослідження роботи пристроїв необхідно використовувати тільки загальноприйняті механічні константи і розміри. **Висновки.** ККД механізму пересування візка мало залежить від напрямку прикладання сили на пересування відносно напрямку руху. ККД кінцевих фрикційних передач у першу чергу залежить від величини коефіцієнта тертя ковзання, а також допустимих контактних напружень, модуля пружності матеріалів. Запропоновані аналітичні залежності для визначення коефіцієнта тертя кочення кульки в напрямних дозволяють розділити загальний опір руху на складові від кочення і ковзання і провести цілеспрямовані заходи до зниження більш суттєвої складової. Вирішальною складовою опору в кулькових напрямних постає складова від тертя ковзання, а її мінімум буде при куті розкриття напрямних  $2\alpha = 90^\circ$ .

**Ключові слова:** опір коченню; коефіцієнт корисної дії; механічні пристрої; контактні напруження; модуль пружності

## СОПРОТИВЛЕНИЕ КАЧЕНИЮ В МЕХАНИЗМАХ С ТОЧЕЧНЫМИ И ЛИНЕЙНЫМИ СХЕМАМИ КОНТАКТА

БОНДАРЕНКО Л. Н.<sup>1</sup>, к. т. н., доц.,

ДЕМИН Г. К.<sup>2\*</sup>, к. т. н., доц.,

БУРАТИНСКИЙ А. П.<sup>3</sup>, к. т. н., доц.,

ДОРОФЕЕВА В. С.<sup>4</sup>, студ.

<sup>1</sup> Кафедра прикладной механики, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, 49010, Днипро, Украина, тел. +38 (056) 373-15-18, e-mail: [bondarenko-l-m2015@yandex.ua](mailto:bondarenko-l-m2015@yandex.ua), ORCID ID: 0000-0002-2212-3058

<sup>2\*</sup> Кафедра теоретической механики, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днипро, Украина, тел. +38 (097) 448-00-36, e-mail: [gennady.demin@gmail.com](mailto:gennady.demin@gmail.com), ORCID ID: 0000-0001-7470-0147

<sup>3</sup> Кафедра теоретической механики, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днипро, Украина, тел. +38 (067) 252-13-09, e-mail: [buric@ua.fm](mailto:buric@ua.fm), ORCID ID: 0000-0001-5152-3766

<sup>4</sup> Государственное высшее учебное заведение «Приднiпровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днипро, Украина, тел. +38 (063) 822-09-01, e-mail: [dorofeevav00@gmail.com](mailto:dorofeevav00@gmail.com)

**Аннотация. Постановка проблемы.** В большинстве задач механики коэффициентом трения качения или пренебрегают, или задаются его величиной без учета схем контакта тел качения, их материалов и размеров. На основании теории контактных напряжений Герцем получены аналитические зависимости, позволяющие вычислять параметры трения качения с наибольшей достоверностью по сравнению с аналогичными других авторов. Но в формулах Герца введен параметр «коэффициент гистерезисных потерь», определение которого требует времени и средств не меньше, чем получение величины самого коэффициента трения качения. Это не дает возможности использовать их в инженерной практике для определения величины силы трения, а, соответственно, и коэффициента полезного действия (КПД) целого ряда механизмов с качением. Из-за этого мощность привода механизмов приходится в силу неопределенности его КПД принимать завышенной.

**Цель статьи** – определить КПД широко используемых механических устройств, в которых присутствует трение качения. В соответствии со сформулированной целью в процессе исследования работы устройств необходимо использовать только общепринятые механические константы и размеры. **Выводы.** КПД механизма передвижения тележки мало зависит от направления приложения силы на передвижение относительно направления движения. КПД конических фрикционных передач в первую очередь зависит от величины коэффициента трения скольжения, а также от допустимых контактных напряжений, модуля упругости материала. Предложенные аналитические зависимости для определения коэффициента трения качения шарика в направляющих позволяют разделить общее сопротивление на составляющие от качения и скольжения и провести целенаправленные мероприятия по снижению более существенной составляющей. Решающей составляющей сопротивления движению в шариковых направляющих является составляющая от трения скольжения, а ее минимум будет при угле раскрытия направляющих  $2\alpha = 90^\circ$ .

**Ключевые слова:** сопротивление качению; сопротивление скольжению; коэффициент полезного действия; механические устройства; контактные напряжения; модуль упругости

## ROLLING RESISTANCE OF MECHANISM WITH POINT AND LINEAR CONTACT SCHEME

BONDARENKO L.M.<sup>1</sup>, *Cand. Sc. (Tech.), Ass. Prof.*,  
DIOMIN H.K.<sup>2\*</sup>, *Cand. Sc. (Tech.), Ass. Prof.*,  
BURATYNSKYI A.P.<sup>3</sup>, *Cand. Sc. (Tech.), Ass. Prof.*,  
DOROFIEIEVA V.S.<sup>4</sup>, *Stud.*

<sup>1</sup> Department of Applied Mechanics, Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after academician V. Lazaryan, 2, Lazaryana St., 49010, Dnipro, Ukraine, tel. +38 (056) 793-19-09, e-mail: [bondarenko-l-m2015@yandex.ua](mailto:bondarenko-l-m2015@yandex.ua), ORCID ID: 0000-0002-2212-3058

<sup>2\*</sup> The Department of Theoretical Mechanics, State Higher Educational Institution “Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-A, Chernyshevskoho St., 49600, Dnipro, Ukraine, tel. +38 (097) 448-00-36, e-mail: [gennady.demin@gmail.com](mailto:gennady.demin@gmail.com), ORCID ID: 0000-0001-7470-0147

<sup>3</sup> The Department of Theoretical Mechanics, State Higher Educational Institution “Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-A, Chernyshevskoho St., 49600, Dnipro, Ukraine, tel. +38 (067) 252-13-09, e-mail: [buric@ua.fm](mailto:buric@ua.fm), ORCID ID: 0000-0001-5152-3766

<sup>4</sup> State Higher Educational Institution “Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-A, Chernyshevskoho St., 49600, Dnipro, Ukraine, tel. +38 (063) 822-09-01, e-mail: [dorofeevav00@gmail.com](mailto:dorofeevav00@gmail.com)

**Abstract. Problem statement.** In most problems, mechanics rolling coefficient of friction either neglect or set its value without taking into account the contact patterns of the rolling bodies, their materials and sizes. Based on the theory of contact stresses by Hertz, analytical dependences are obtained that allow calculating the rolling friction parameters with the greatest reliability in comparison with the analogues of other authors. But in the Hertz formulas, the parameter hysteresis loss coefficient is introduced, the determination of which requires time and money no less than obtaining the value of the rolling friction coefficient itself. This makes it impossible to use them in engineering practice to determine the magnitude of the friction force, and, accordingly, the coefficient of performance (COP) of a number of mechanisms with rolling. This leads to the fact that the drive power of the mechanisms has to be overestimated due to the uncertainty of its efficiency. **The purpose of the article.** To determine the efficiency of widely used mechanical devices in which rolling friction is present. In accordance with the stated goal, in the process of studying the operation of devices it is necessary to use only generally accepted mechanical constants and sizes. **Conclusions.** The efficiency of crab traverse mechanism does not depend on the direction of load application of movement relative to the direction of motion. The efficiency of conical friction gear depends on the coefficient of rolling friction, assumed contact voltage and elastic modulus. The proposed analytical dependences for determination of the coefficient of rolling friction in the ball guide allow us to resolve the total resistance into the rolling and sliding and conduct measures to reduce the more

significant component. The main component of the motion resistance in the ball guide is a component of slide friction and it is a minimum at the angle of opening guide  $2\alpha = 90^\circ$ .

**Keywords:** rolling resistance; slip resistance; coefficient of efficiency; mechanical device; elastic modulus

**Постановка проблеми.** У більшості задач механіки коефіцієнтом тертя кочення або нехтують, або задаються його величиною без урахування схем дотику тіл кочення, їх матеріалів та розмірів [1], тому майбутній інженер, особливо це стосується механічних спеціальностей, може недооцінювати роль тертя кочення в машинах та механізмах.

Таке ставлення до визначення опору коченню пов'язане з тим, що відсутні аналітичні залежності для визначення коефіцієнта тертя кочення, а, отже, величини сили тертя, коефіцієнта корисної дії (ККД) цілого ряду механізмів із коченням.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Не зупиняючись на помилковій теорії Рейнольдса (1875 р.), який вважав, що головна причина опору коченню – це ковзання в місці контакту, зазначимо, що вперше аналітичні залежності по визначенню коефіцієнта тертя кочення належать Д. Табору, який скористався теорією контактних деформацій Герца. Але наявність у формулах коефіцієнта гістерезисних витрат не дає можливості застосовувати їх в інженерній практиці. Наведений у праці [2] спосіб його експериментального визначення за допомогою високочастотного розтягання – стиснення вимагає часу і коштів не менше, ніж отримання величини самого коефіцієнта тертя кочення.

Тому потрібно одержати аналітичні залежності, придатні для проведення інженерних розрахунків параметрів тертя кочення.

**Мета статті** – визначити ККД широко вживаних механічних пристроїв, у яких присутнє тертя кочення.

**Виклад основного матеріалу.** Відповідно до сформульованої мети в процесі дослідження треба використовувати тільки загальноживані механічні константи та розміри.

Розглянемо декілька задач:

1. Залежність ККД візка від напрямку прикладання рушійної сили.

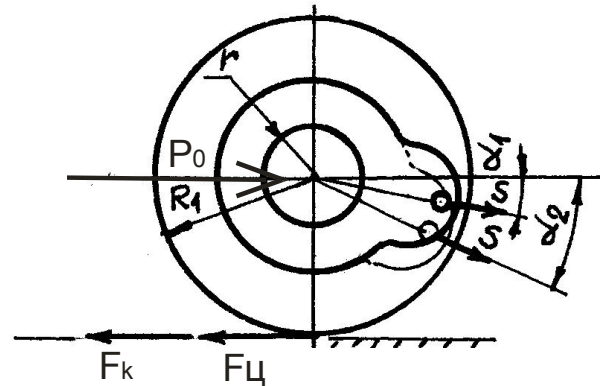


Рис. 1. Розрахункова схема колеса візка з різним напрямком рушійної сили / Fig. 1. The design scheme of the wheel of the cart with different in-directional driving force

На практиці досить часто напрямок рушійної сили в механізмах типу візка не збігається з напрямком руху. Найчастіше це машини чи устрої з криволінійною траєкторією і окремо стоячим приводом. Припустимо, що напрямок сили може змінюватись від кута  $\alpha_1$  до кута  $\alpha_2$  від горизонталі, яка збігається з напрямком руху. Відомо, що діаметр колеса  $D = 2R$  необхідно знайти з умови максимальних контактних напружень, коли кут  $\alpha_2$  буде максимальним і тиск на колесо складе (рис.1):

$$P = P_0 + S \sin \alpha_2 \quad (1)$$

Але величина  $S$  тут невідома. Для її визначення зробимо так. Будемо спочатку вважати, що складова  $S \sin \alpha_2$  мало впливає на тиск колеса на рейку (нехай це буде рейка з плоскою голівкою). Якщо ширина обода колеса  $B$ , то його радіус визначається із виразу [3]:

$$R_1 = 0,175 \frac{P_0 E}{B \sigma^2}, \quad (2)$$

де  $E$  – модуль пружності матеріалів колеса і рейки при стисненні;  $\sigma$  – допустимі контактні напруження.

Радіус цапфи колеса  $r_1$  прийємо за аналогією з її величиною для кранових візків, тобто  $r_1 = r/4...6$ , тобто:

$$r_1 = 0,035 \frac{P_0 E}{B \sigma^2}. \quad (3)$$

Опір коченню колеса від тертя в цапфі у першому наближенні:

$$F_{y1} = 0,2 P_0 \mu_y \quad (4)$$

Опір коченню колеса знайдемо, скориставшись отриманою в [4] залежністю між статичною півшириною плями контакту та коефіцієнтом тертя кочення:

$$k = 0,225 b e^{-1,2R_1} = 0,144 \frac{P_0}{B \sigma} e^{-1,2R_1}, \quad (5)$$

а опір його руху коченню:

$$F_{k1} = \frac{P_0 k}{R_1} = 0,82 \frac{P_0 \sigma}{E} e^{-1,2R_1}. \quad (6)$$

Сума опорів у першому наближенні:

$$F_1 = F_{y1} + F_{k1} = 0,2 P_0 (\mu_y + 4,1 \frac{\sigma}{E} e^{-1,2R_1}). \quad (7)$$

Величина натягу  $S$  у першому наближенні:

$$S_{1\max} = \frac{F_1}{\cos \alpha} = 0,2 \frac{P_0}{\cos \alpha} (\mu_y + 4,1 \frac{\sigma}{E} e^{-1,2R_1}) \quad (8)$$

Сума опорів:

$$F_2 = 0,2 P_0 [1 + 0,2 \operatorname{tg} \alpha_2 (\mu_{ц1} + 4,1 \frac{\sigma}{E} e^{-1,2R_2})] (\mu_{ц1} + 2,7 \frac{\sigma}{E} e^{-1,2R_2}) \quad (9)$$

Звичайно, що при куті  $\alpha_1$  замість величини  $0,2 \operatorname{tg} \alpha_2$  необхідно ставити значення  $0,2 \operatorname{tg} \alpha_1$ .

ККД визначається як:

$$\eta = 1 - \frac{F_2}{P_0}.$$

Розрахунки ККД у третьому наближенні, тут не наведеному, показують, що друге наближення дає дещо завищені результати і різниця залежить від величини

сили  $P_0$ , матеріалів колеса і рейки, допустимих напружень, але вона не значна і для практичних розрахунків можна користуватись другим наближенням.

ККД механізму пересування, знайдений за запропонованою методикою, складає при  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа;  $\sigma = 800$  МПа;  $B = 20$  мм;  $\mu = 0,02$ ;  $P = 12$  кН;  $\eta = 0,994$  і практично не залежить від величини кутів  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$ .

## 2. Залежність ККД конічної фрикційної передачі від кута утворюючого конуса.

Нагадаємо, що конічна фрикційна передача складається із двох зрізаних конусів, насаджених на вали, осі яких перетинаються в точці, яка збігається з загальною вершиною обох конусів (рис. 2). У цьому випадку загальна твірна конусів проходить через вказану точку і вони котяться один по одному без проковзування.

Якщо сила притискання  $Q$  спрямована вздовж осі ведучого колеса 1, то нормальний тиск в зоні контакту:

$$N = \frac{Q}{\sin \alpha},$$

де  $\alpha$  – половина кута біля вершини конуса.

Відомо, що навантаження повинне бути таким, щоб контактні напруження на площині контакту не перевищували допустимих:

$$N = 5,72 \frac{B R_{1\min} \sigma^2}{E \sin \alpha \cos \alpha}. \quad (10)$$

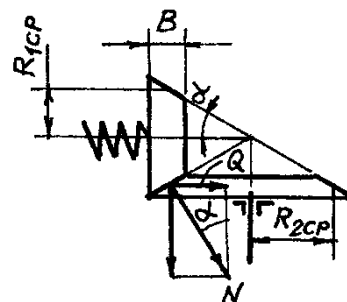


Рис. 2. Розрахункова схема конічної фрикційної передачі / Fig. 2. Calculation scheme of conical friction gear

Сила тертя ковзання  $F$  повинна бути не меншою або дорівнювати величині колового зусилля:

$$F = fN = 5,72 \frac{Qf}{\sin \alpha} = 5,72 \frac{BR_{1\min} f \sigma^2}{E \cos \alpha}; \quad (11)$$

$$P = 11,4 \frac{BR_{1\min} f \sigma^2}{E \sin 2\alpha}. \quad (12)$$

Знайдемо опір коченню ведучого колеса 1 по веденому 2.

Очевидно, що через різну величину радіусів кочення по ширині колеса опір коченню не буде постійним по його ширині.

Але з достатньою точністю можна взяти середній радіус:

$$R_{1CP} = \frac{0175QE \cos \alpha}{B\sigma^2 \sin \alpha} \quad (13)$$

і для нього знайти коефіцієнт  $k$ .

Оскільки півширина плями контакту:

$$b = 0,64 \frac{Q}{B\sigma} \operatorname{ctg} \alpha,$$

формула (5) набуває вигляду:

$$k = 0,144 \frac{Q}{B\sigma} \operatorname{ctg} \alpha e^{-1,2R_{1CP}}, \quad (14)$$

а опір кочення одного колеса по іншому:

$$F = 0,82 \frac{Q\sigma}{E \sin \alpha} e^{-1,2R_{1CP}}. \quad (15)$$

ККД конічної фрикційної передачі:

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{0,41\sigma}{fE} e^{-1,2R_{1CP}}}. \quad (16)$$

На перший погляд ця формула не відповідає дійсній тенденції зміни ККД, тобто зі збільшенням допустимих контактних напружень  $\sigma$  величина  $\eta$  зменшується. Але треба пам'ятати, що із збільшенням  $\sigma$  збільшується і  $Q$ .

3. Опір руху круглих тіл по трапецієподібних напрямних (рис. 3).

Незважаючи на численні дослідження опору коченню по напрямних, що мають у перетині різні форми, наприклад [5], відсутні чіткі розподіли витрат на тертя кочення і тертя ковзання. З цієї причини

невідомо, яка частка ККД припадає на кочення, а яка – на ковзання.

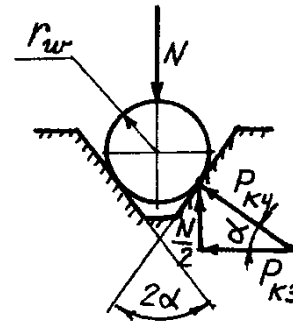


Рис. 3. Розрахункова схема шарикової напрямної / Fig. 3. The design scheme of the ball guide

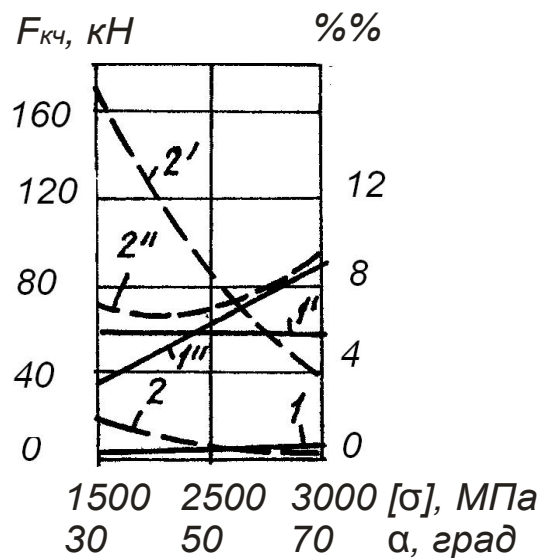


Рис. 4. Залежність від  $[\sigma]$ : 1, 1', 1'' –  $F_{кч}, F_{кз}$  і процент  $F_{кч}$  від  $F_{кз}$ ; 2, 2', 2'' – цих же величин від  $\alpha$  / Fig. 4. Dependence on  $[\sigma]$ : 1, 1', 1'' –  $F_{кч}, F_{кз}$  and percent  $F_{кч}$  from  $F_{кз}$ ; 2, 2', 2'' – the same values from  $\alpha$

Що ці дві складові існують одночасно, легко переконатись, розглядаючи дві граничні величини кута  $\alpha$ : якщо кут буде нульовим, то нульовим буде й опір коченню. А коли величина  $\alpha$  буде дорівнюватиме  $\pi/2$ , то, навпаки, опір ковзання буде нульовим.

Визначимо залежність величини сил тертя кочення та ковзання від величини кута  $\alpha$ .

Зусилля, що припадає на кочення кульки в напрямній:

$$F_{кч} = \frac{kP_k}{r_w} = \frac{kN}{r_w \sin \alpha}, \quad (17)$$

де  $r_w$  – радіус кульки.

Зусилля, що припадає на ковзання кульки по напрямній:

$$F_{кз} = \mu P_{кз} = \mu \frac{N}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (18)$$

**Висновки.** 1. Запропоновані аналітичні залежності для визначення коефіцієнта тертя кочення дозволяють поділити загальний опір на складові від кочення і ковзання і вести цілеспрямовані заходи щодо зниження більш суттєвої складової.

2. ККД механізму пересування мало залежить від напрямку прикладання сили на пересування (відносно напрямку руху).

3. ККД конічних фрикційних передач у першу чергу залежить від величини допустимих контактних напружень, модуля пружності матеріалів і коефіцієнта тертя ковзання.

4. Вирішальна складова опору в шарикових напрямних – це складова від тертя ковзання, а її мінімум буде при куті розкриття напрямної  $2\alpha = 90^\circ$ .

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Иосилевич Г. Б. Детали машин : монография / [Г. Б. Иосилевич]. – Москва : Машиностроение, 1988. – 368 с.
2. Механика контактного взаимодействия : монография / [К. Джонсон; пер. с англ. В. Э. Наумова, А. А. Спектора; под. ред. Р. В. Гольдштейна]. – Москва : Мир, 1989. – 510 с.
3. Справочник по сопротивлению материалов / [Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев]. – Киев : Наукова думка, 1988. – 736 с.
4. Деформаційні опори в машинах : монографія / [Л. М. Бондаренко, М. П. Довбня, В. С. Ловейкін]. – Дніпропетровськ : РВА Дніпро-VAL, 2002. – 200 с.
5. Johnson K. L. The effect of a tangential contact force upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane / K. L. Johnson // Journal of Applied Mechanics. Transactions ASME. – 1958. – Vol. 80. – Pp. 339–346.

### REFERENCES

1. Iosilevich H.B. *Detali mashin* [Machines details]. Moscow : Mashinostroyeniye, 1988, 368 p. (in Russian).
2. Jonson K. *Mekhanika kontaktnogo vzaimodejstviya* [Contact mechanics]. Moscow : Mir, 1989, 510 p. (in Russian).
3. Pisarenko H.S., Yakovlev A.P. and Matveev V.V. *Spravochnik po soprotivleniyu materialov* [A manual on the materials strength]. Kyiv : Naukova Dumka, 1988, 736 p. (in Russian).
4. Bondarenko L.N., Dovbnia M.P. and Loveikin V.S. *Deformatsiini opory v mashynakh* [Deformation bearings in machines]. Dnipropetrovsk : RVA Dnipro-VAL, 2002, 200 p. (in Ukrainian).
5. Johnson K.L. The effect of a tangential contact force upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane. Journal of Applied Mechanics. Transactions ASME. 1958, vol. 80, pp. 339–346.

Надійшла до редакції: 05.09.2019 р.