УДК 519.6+624.04
DOI:10.30838/J.BPSACEA.2312.261119.18.583

МЕТОД РОЮ ЧАСТИНОК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

ДАНІШЕВСКИЙ В. В.[1], *д. т. н., проф.,*
ГАЙДАР А. М.[2*], *ст. викладач*

[1] Кафедра будівельної механіки та опору матеріалів, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (056) 756-33-13, e-mail: vladyslav.danishevskyy@pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0002-3049-4721
[2*] Кафедра технології будівельного виробництва, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (0562) 47-02-98, e-mail: nastuel_gaidar@ukr.net

Анотація. ***Мета.*** Оптимальне проектування будівель та споруд потребує вирішення низки важливих проблем, пов'язаних з визначенням найкращої топології і геометричної форми конструкцій, фізичних властивостей елементів, зв'язків елементів між собою тощо. При цьому необхідно враховувати вплив багатьох чинників: розподіл статичних і динамічних навантажень, корозійні процеси, характер умов експлуатації, вимоги до надійності та довговічності об'єкту. Складність розв'язання таких задач пов'язана з тим, що у більшості випадків цільові функції є нелінійними, залежать від великої кількості параметрів, а також можуть мати багато локальних екстремумів. Метою роботи є розвиток нових методів для розв'язання задач нелінійної оптимізації. ***Методика.*** У роботі використовується метод рою частинок, який імітує поведінку децентралізованих біологічних систем та належить до методів штучного колективного інтелекту. ***Результати.*** **З**апропонована нова програмна реалізація методу рою частинок у системі комп'ютерної алгебри з відкритим кодом Maxima. На прикладах тестових функцій Розенброка та Растрігіна, показана висока обчислювальна ефективність методу та досліджено вплив його параметрів на швидкість практичної збіжності. ***Наукова новизна.*** У порівнянні з класичними алгоритмами, метод рою частинок може бути особливо ефективним для знаходження екстремумів нелінійних мультимодальних функцій, а також для розв'язання задач високої розмірності. ***Практичне значення.*** Розвинутий метод може бути застосований для розв'язання задач оптимального проектування будівель та споруд.

Ключові слова: *оптимальне проектування; нелінійна оптимізація; колективний інтелект; метод рою частинок; функція Розенброка; функція Растрігіна*

МЕТОД РОЯ ЧАСТИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

ДАНИШЕВСКИЙ В. В.[1], *д. т. н., проф.,*
ГАЙДАР А. Н.[2*], *ст. преподаватель*

[1] Кафедра строительной механики и сопротивления материалов, Государственное высшее учебное заведение «Приднипровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днипро, Украина, тел. +38 (056) 756-33-13, e-mail: vladyslav.danishevskyy@pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0002-3049-4721
[2*] Кафедра технологии строительного производства, Государственное высшее учебное заведение «Приднипровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днипро, Украина, тел. +38 (0562) 47-02-98, e-mail: nastuel_gaidar@ukr.net

Анотація. ***Мета.*** Оптимальне проектування будівель та споруд потребує вирішення низки важливих проблем, пов'язаних з визначенням найкращої топології і геометричної форми конструкцій, фізичних властивостей елементів, зв'язків елементів між собою тощо. При цьому необхідно враховувати вплив багатьох чинників: розподіл статичних і динамічних навантажень, корозійні процеси, характер умов експлуатації, вимоги до надійності та довговічності об'єкту. Складність розв'язання таких задач пов'язана з тим, що у багатьох випадках цільові функції є нелінійними, залежать від великої кількості параметрів, а також можуть мати декілька локальних екстремумів. Метою роботи є розвиток нових методів для розв'язання задач нелінійної оптимізації. ***Методика.*** У роботі використовується метод рою частинок, який імітує поведінку децентралізованих біологічних систем та належить до методів штучного колективного інтелекту. ***Результати.*** **З**апропоновано нову програмну реалізацію методу рою частинок у системі комп'ютерної алгебри з відкритим кодом Maxima. На прикладах тестових функцій Розенброка та Растрігіна показано високу обчислювальну ефективність методу та досліджено вплив його параметрів на швидкість практичної збіжності. ***Наукова новизна.*** У порівнянні з класичними алгоритмами, метод рою частинок може бути особливо ефективним для знаходження екстремумів нелінійних мультимодальних функцій, а також для розв'язання задач високої розмірності. ***Практичне значення.*** Розвинутий метод може бути застосований для розв'язання задач оптимального проектування будівельних конструкцій, будівель та споруд.

Ключові слова: *оптимальне проектування; нелінійна оптимізація; методи колективного інтелекту; метод рою частинок; функція Розенброка; функція Растрігіна*

Аннотация. ***Цель.*** Оптимальное проектирование зданий и сооружений требует решения ряда важных задач, связанных с определением наилучшей топологии и геометрической формы конструкций, физических свойств элементов, связей элементов между собой, прочее. При этом необходимо учитывать влияние многих факторов: распределение статических и динамических нагрузок, коррозионное воздействие, характер условий эксплуатации, требования к надежности и долговечности объекта. Сложность решения таких задач связана с тем, что во многих случаях целевые функции являются нелинейными, зависят от большого количества параметров, а также могут иметь несколько локальных экстремумов. Целью работы является развитие новых методов для решения задач нелинейной оптимизации. ***Методика.*** В работе используется метод роя частиц, который имитирует поведение децентрализованных биологических систем и является одним из методов искусственного коллективного интеллекта. ***Результаты.*** Предложена новая программная реализация метода роя частиц в системе компьютерной алгебры с открытым кодом Maxima. На примерах тестовых функций Розенброка и Растригина показана высокая вычислительная эффективность метода и исследовано влияние его параметров на скорость практической сходимости. ***Научная новизна***. По сравнению с классическими алгоритмами, метод роя частиц может быть особенно эффективным для нахождения экстремумов нелинейных мультимодальных функций, а также для решения задач высокой размерности. ***Практическое значение.*** Развитый метод может быть использован для решения задач оптимального проектирования строительных конструкций, зданий и сооружений.

Ключевые слова: *оптимальное проектирование; нелинейная оптимизация; методы коллективного интеллекта; метод роя частиц, функция Розенброка; функция Растригина*

PARTICLE SWARM METHOD FOR SOLVING THE PROBLEMS OF NONLINEAR OPTIMIZATION

DANISHEVSKYY V.V.[1], *Dr. Sc. (Tech.)., Prof.,*
GAIDAR A.M.[2*], *Assistant Prof.*

[1] Department of Building Mechanics and Strength of Materials, State Higher Educational Institution "Prydniprovska State Academy of Civil Engineering and Architecture», 24-a, Chernyshevskoho St., 49600, Dnipro, Ukraine, tel. +38 (0652) 47-02-98, e-mail: vladyslav.danishevskyy@gmail.com
[2*] Department of Technology of Building Production, State Higher Educational Institution "Prydniprovska State Academy of Civil Engineering and Architecture", 24-a, Chernyshevskoho St., 49600, Dnipro, Ukraine, tel. +38 (0652) 47-02-98, e-mail: nastuel_gaidar@ukr.net

Abstract. ***Purpose***. The optimal design of buildings and structures requires solving a number of important tasks related to determining the best topology and geometric shape of structures, physical properties of elements, connections of elements among themselves, etc. In this case, it is necessary to take into account the influence of many factors: the distribution of static and dynamic loads, corrosive effects, the nature of the operating conditions, the requirements for the reliability and durability of the unit. The complexity of solving such problems is connected with the fact that, as a rule, the objective functions of such problems are nonlinear. ***Methods***. Various approaches are used to solve nonlinear optimization problems: stochastic search (Monte Carlo method); search methods in which the step is successively reduced, following to the given relation (halving, golden ratio, inverse Fibonacci numbers); gradient descent method; evolutionary algorithms; penalty function method and others. In recent years, a new class of methods of numerical optimization has been intensively developed, in various works it is called social-behavioral, population, or swarm. For practical verification of the particle swarm method, the finding of the extrema of the test functions of Rosenbrock and Rastrigin is considered. ***Results***. A new software implementation of one of the methods of artificial collective intelligence, the particle swarm method, is proposed for solving nonlinear optimization problems in the Maxima open-source computer algebra system. The high computational efficiency of this method for finding global extrema of "ravine" and multimodal functions in those cases where the application of many classical algorithms can be difficult is shown. ***Scientific novelty***. Compared to classical methods, swarm intelligence methods are especially effective for finding extrema of nonlinear multimodal functions, as well as for solving high-dimensional problems**.** ***Practical significance.*** The effect of the method parameters (particle number and weight coefficients) on the rate of practical convergence is investigated. The developed method can be used, inter alia, to solve the problems of optimal design of building structures, buildings and structures.

Keywords: *particle swarm method; Rosenbrock function; Rastrigin function; optimal design of building structures*

Вступ. Оптимальне проектування будівель і споруд потребує вирішення низки важливих проблем, пов'язаних з визначенням найкращої топології і геометричної форми конструкцій, фізичних властивостей елементів, зв'язків елементів між собою тощо. При цьому необхідно враховувати вплив багатьох чинників: розподіл статичних і динамічних навантажень, корозійні процеси, характер умов експлуатації, вимоги до надійності і довговічності об'єкта. З математичної точки зору оптимальне проектування зводиться до пошуку глобальних екстремумів деяких цільових функцій, в якості яких можуть розглядатися маса конструкції, її вартість, міцність, жорсткість, термін служби. Складність розв'язання таких задач обумовлена з тим, що, як правило, цільові функції є нелінійними, залежать від великої кількості параметрів, а також можуть мати багато локальних екстремумів (так звані мультимодальні функції).

Для розв'язання задач нелінійної оптимізації можуть використовуватись різні підходи: стохастичний пошук (метод Монте-Карло); методи перебору, в яких крок послідовно зменшується відповідно до деякого заданого співвідношення (ділення навпіл, золотий перетин, зворотні числа Фібоначчі); метод градієнтного спуску; еволюційні алгоритми; метод штрафних функцій та інші.

В останні роки інтенсивно розвивається новий клас методів чисельної оптимізації, які у різних роботах називаються соціально-поведінковими, популяційними або ройовими [1]. Такі методи інспіровані живою природою. Вони імітують поведінку колективних біологічних систем, що складаються з окремих осіб. Особи обмінюються інформацією та взаємодіють одна з одною за певними законами. Незважаючи на відсутність будь-якого центру управління, це призводить до виникнення інтелектуальної групової поведінки. Система в цілому виявляється здатною знаходити кращі розв'язки, ніж це може зробити кожна з осіб окремо. Відзначимо, що дані методи є наближеними. Їх збіжність не доведена строго математично, але експериментально встановлено, що у більшості випадків вони дають досить хороший результат.

Методи ройового інтелекту мають наступні переваги:

- відсутність обмежень на типи функцій і параметрів, що входять у математичну модель задачі;
- можливість досліджувати весь простір розв'язків та захищеність від «зависання» в локальних екстремумах;
- не потрібно обчислювати похідні цільової функції;
- простота реалізації;
- можливість розпаралелити обчислювальний процес.

У порівнянні з класичними алгоритмами, методи ройового інтелекту особливо ефективні для знаходження екстремумів нелінійних мультимодальних функцій, а також для розв'язання задач великої розмірності. До недоліків слід віднести залежність швидкості збіжності від значень вільних параметрів і вагових коефіцієнтів, кількість яких у більшості методів досить велика.

Методи ройового інтелекту можуть ґрунтуватися на різних алгоритмах. Метод рою частинок описує поведінку децентралізованої зграї птахів, які шукають місце з найбільшою концентрацією корму. У методі світлячків менш яскраві частинки рухаються у просторі розв'язків назустріч більш яскравим, при цьому «яскравість» визначається значенням цільової функції у даній точці. Мурашиний алгоритм наслідує поведінку колонії мурах і може застосовуватися для розв'язання логістичних задач. Імунні мережі моделюють роботу клітин імунної системи. Так само, як і штучні нейронні мережі, імунні мережі здатні до навчання, не потребують заздалегідь відомої моделі задачі, а будують її самі на основі отриманої інформації. Такі методи ефективні для розв'язання задач прогнозування, класифікації (розпізнавання) та управління.

У даній роботі розглядається розв'язання задач нелінійної оптимізації за допомогою методу рою частинок. У розділі 2 наведено математичні співвідношення, що покладено в основу методу, та описана схема побудови обчислювального алгоритму. У розділах 3, 4 розглянуто приклади знаходження екстремумів тестових функцій Розенброка та Растрігіна. Досліджено вплив кількості частинок і значень вагових коефіцієнтів на швидкість збіжності методу, визначено його оптимальні параметри. Висновки наведено у розділі 5.

Процедура оптимізації методом рою частинок. Метод рою частинок був спочатку запропонований Дж. Кеннеді, Р. Еберхарт і Ю. Ші [2; 3] для імітації соціальної поведінки. Огляд застосувань даного методу для розв'язання задач оптимізації наведено у статті Р. Полі [4].

Кожна частинка характеризує собою один із можливих розв'язків задачі. Положення частинки у просторі розв'язків визначається вектором координат $x_n = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_D\}$, компоненти якого – це параметри, від яких залежить цільова функція. Тут n – номер частинки, $n = 1,2,3,\ldots,N$; D – розмірність задачі. Частинки переміщуються в просторі розв'язків у пошуку найкращого положення, яке відповідає екстремуму цільової функції. Область пошуку задається умовами обмежень:

$$x_d^{\min} \le x_d \le x_d^{\max};\ d = 1,2,3,\ldots,D. \qquad (1)$$

На кожній ітерації координати $\mathbf{x}_n$ та зміщення (швидкості) частинок $\mathbf{v}_n$ визначаються за формулами:

$$\mathbf{x}_n^{(i+1)} = \mathbf{x}_n^{(i)} + \mathbf{v}_n^{(i)}, \qquad (2)$$

$$\mathbf{v}_n^{(i+1)} = c_0\mathbf{v}_n^{(i)} + c_1 r_1\left(\mathbf{p}_n^{(i)} - \mathbf{x}_n^{(i)}\right) + c_2 r_2\left(\mathbf{g}^{(i)} - \mathbf{x}_n^{(i)}\right), \qquad (3)$$

де i – номер ітерації, $i = 0,1,2,\ldots$; $\mathbf{p}_n^{(i)}$ – координати найкращого положення, знайденого частинкою; $\mathbf{g}^{(i)}$ – координати найкращого положення всього рою; c_0, c_1, c_2 – вагові коефіцієнти; r_1, r_2 – незалежні випадкові величини в інтервалі [0,1]. Початкові координати та швидкості, як правило, вибираються випадковим чином.

У формулі (3) перший доданок визначає «інерцію» руху частинки. Наявність інерції запобігає стрибкоподібним змінам траєкторії. Рекомендовані значення коефіцієнта c_0 знаходяться у інтервалі $0.4 \le c_0 \le 0.9$ [1]. Ефективним може бути застосування адаптивного алгоритму, коли в процесі розв'язання задачі значення c_0 поступово знижується. При цьому на початкових ітераціях забезпечується широкий огляд простору пошуку, а на кінцевих – точна локалізація положення екстремуму.

Другий доданок формули (3) скеровує частинку у бік її особистого найкращого положення $\mathbf{p}_n^{(i)}$, а третій – у бік найкращого положення $\mathbf{g}^{(i)}$, яке знайдено роєм. Значення коефіцієнтів c_1, c_2 визначають питому вагу «когнітивної» і «соціальної» складових поведінки частинки. При малих значеннях c_1, c_2 частинки рухаються по гладких траєкторіях, а зі збільшенням цих параметрів рух стає більш стохастичним. Як правило, рекомендується $c_1 = c_2$, $0.5 \le c_1, c_2 \le 2$. Змінні r_1, r_2 вносять випадкові відхилення від заданої траєкторії руху, що дозволяє досліджувати більшу область простору.

Ефективність роботи методу залежить від вагових коефіцієнтів, оптимальні значення яких у загальному випадку визначаються рельєфом цільової функції та індивідуальні для кожної задачі. При правильно обраному балансі між c_0, c_1 і c_2 швидкість руху частинок поступово знижується і наближається до нуля в околі точки екстремуму, що розшукується.

Суттєвий вплив також мають умови, які задаються на зовнішніх границях простору розв'язків та визначають поведінку частинки, якщо координати обчислені за формулою (2) лежать за межами області пошуку. Можуть використовуватися моделі границь, що поглинають, відбивають, демпфірують або є прозорими [5]. У більшості випадків границі, які поглинають та відбивають, стимулюють дослідження, відповідно, периферійної та внутрішньої областей простору розв'язків. Прозорі границі та такі, що демпфірують, забезпечують більш рівномірне дослідження всієї заданої області. У даній роботі використовується модель прозорої границі. Якщо частинка потрапляє за межі простору розв'язків, значення цільової функції для неї не обчислюється. Тоді на наступних ітераціях частинка швидко повертається в область пошуку, притягаючись до точок $\mathbf{p}_n^{(i)}$ і $\mathbf{g}^{(i)}$.

Кількість частинок *N*, що використовуються, залежить від розмірності задачі *D*. Збільшення популяції дозволяє більш повно досліджувати простір розв'язків, але потребує більшої кількості викликів цільової функції. Невелика кількість частинок, навпаки, скорочує обчислення, але при цьому метод може «зависати» у локальних екстремумах. Дослідження показали, що у багатьох практичних випадках хороші результати досягаються вже при *N* = 10…30 [1]. В цілому, оптимальна кількість частинок може підбиратися індивідуально для кожної задачі.

Критерії завершення процесу пошуку можуть бути наступні:

- виконання заданої кількості ітерацій;
- досягнення заданого значення екстремуму цільової функції;
- стагнація пошуку, коли знайдене значення екстремуму не покращується протягом декількох останніх ітерацій.

Схема алгоритму методу рою частинок наведена на рисунку 1. У даній роботі, програмна реалізація виконана в системі комп'ютерної алгебри з відкритим кодом Maxima, яка поширюється на умовах вільної ліцензії GNU GPL.

Функція Розенброка. Для практичної верифікації методу рою частинок розглянемо знаходження екстремумів деяких тестових функцій [6], які можуть використовуватися для оцінки продуктивності алгоритмів оптимізації. Нехай розмірність задачі дорівнює двом *D* = 2.

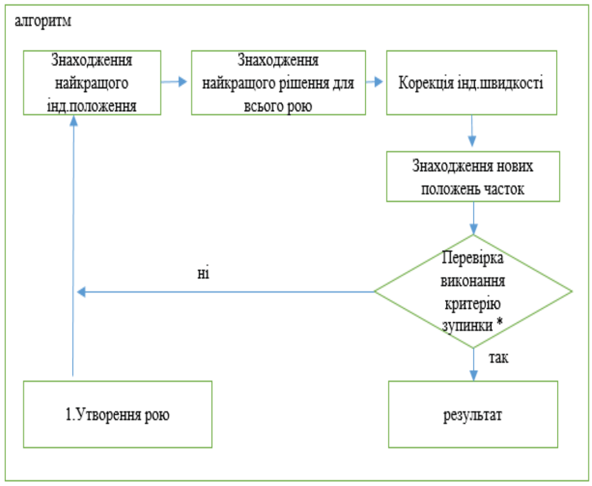


Рис. 1. Алгоритм методу рою частинок / Fig. 1. Particle swarm algorithm

Функція Розенброка – неопукла функція «долинного» типу, яка визначається формулою:

$$f = (1 - x_1)^2 + 100\,(x_2 - x_1^2)^2 \qquad (4)$$

і має глобальний мінімум $f_{\min} = 0$ у точці $x_1 = x_2 = 1$. Графік функції (4) зображений на рисунку 2. Для даного прикладу застосування методу градієнтного спуску виявляється малоефективним. Через наявність вигнутої пологої долини, оптимізація повільно рухається в напрямку мінімуму зигзагом кроками малого розміру. Відзначимо, що ця проблема значно посилюється при збільшенні розмірності задачі.

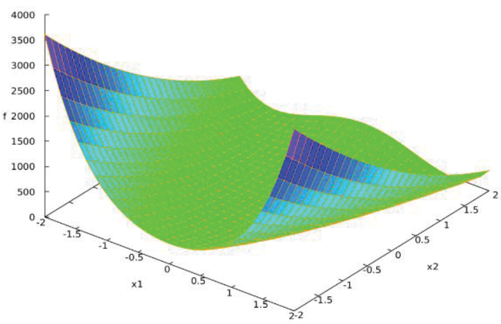


Рис. 2. Графік функції Розенброка / Fig. 2. Rosenbrock function graph

Задаємо область пошуку співвідношеннями (1), де:

$$x_1^{\min} = x_2^{\min} = -2,\ x_1^{\max} = x_2^{\max} = 2. \qquad (5)$$

Було виконано серії розрахунків з різною кількістю частинок *N* та різними значеннями вагових коефіцієнтів c_1, c_2 (за цих умов прийнято $c_0 = 0.5$). На рисунках 3, 4 наведено усереднені залежності, які ілюструють вплив розрахункових параметрів на швидкість збіжності методу. Обчислювальні експерименти показали, що найкраща швидкодія досягається за $N = 16$ та $c_1 = c_2 = 1$.

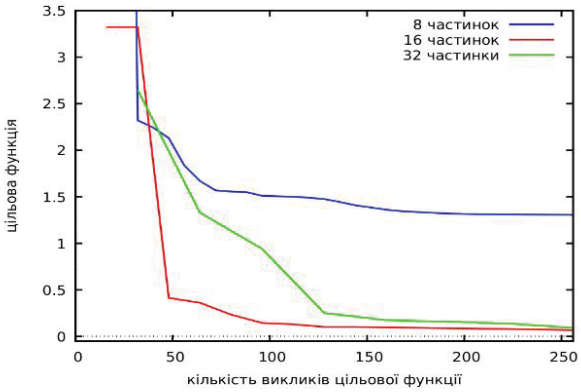


Рис. 3. Вплив кількості частинок на швидкість збіжності для функції Розенброка /
Fig. 3. The influence of the number of particles on the convergence rate for the Rosenbrock function; $c_1=c_2=1$

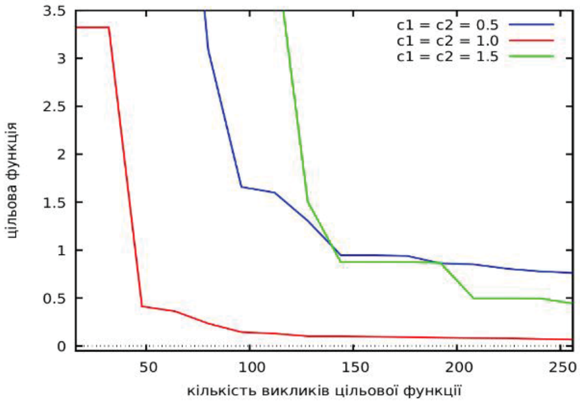


Рис. 4. Вплив значень вагових коефіцієнтів на швидкість збіжності для функції Розенброка /
Fig. 4. The influence of the values of the weights on the convergence rate for the Rosenbrock function; $N = 16$

Процес роботи методу оптимізації графічно ілюструється на рисунку 5, де наведено контурний графік функції Розенброка (хрестиком відзначено глобальний мінімум) і показано положення частинок на різних ітераціях.

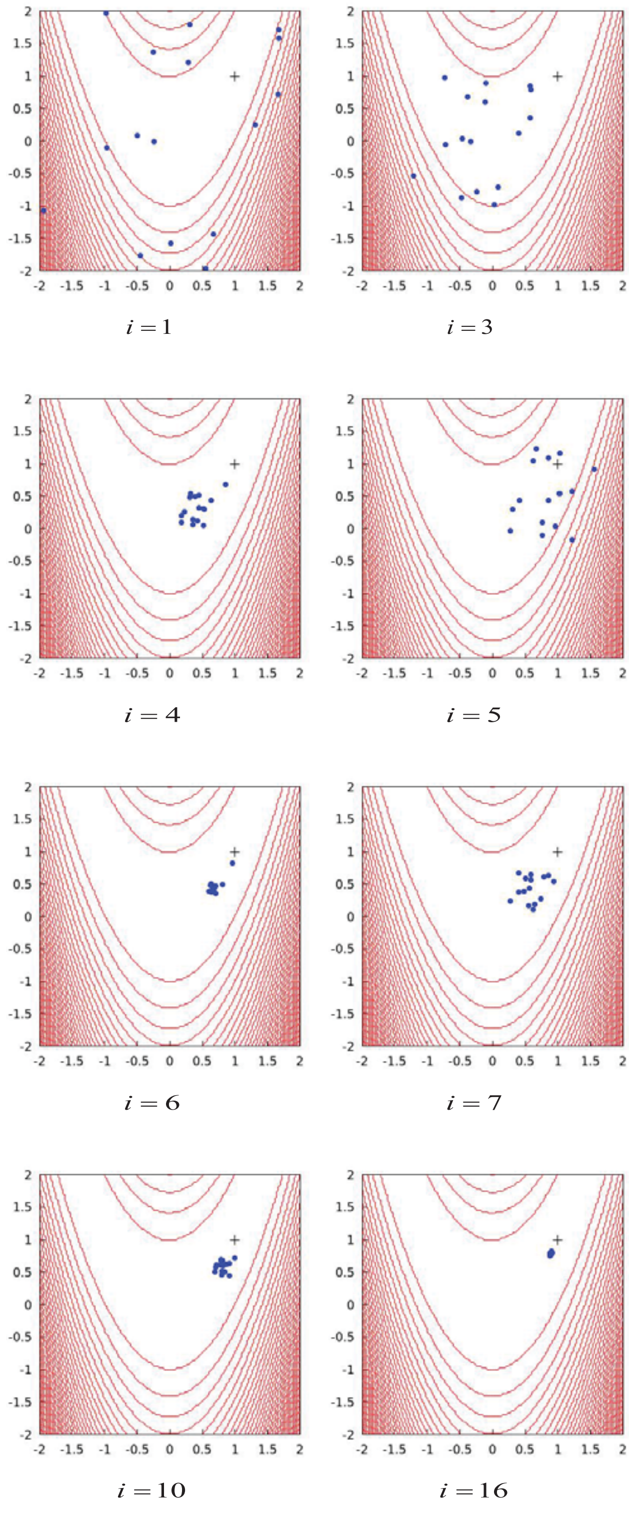


Рис. 5. Положення частинок у просторі розв'язків на різних ітераціях для функції Розенброка /
Fig. 5. The position of particles in the solution space at different iterations for the Rosenbrook function

При розрахунках прийнято $N = 16$, $c_1 = c_2 = 1$. Виконавши 16 ітерацій, що відповідає 256 викликам цільової функції, знайдено наближене значення екстремуму $f_{\min} \approx 0.0615$.

Функція Растрігіна. Одним із прикладів мультимодальних функцій є функція Растрігіна:

$$g = 20 + x_1^2 + x_2^2 - 10\left[\cos\left(2\pi x_1\right) + \cos\left(2\pi x_2\right)\right], \tag{6}$$

графік якої наведено на рисунку 6. Глобальний мінімум $g_{\min} = 0$ знаходиться в точці $x_1 = x_2 = 0$.

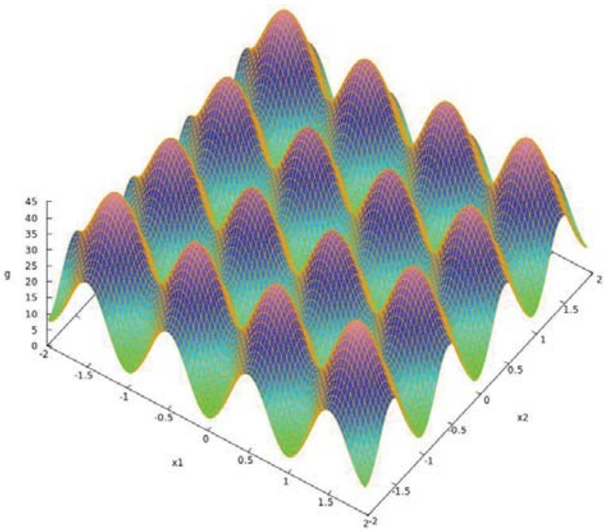


Рис. 6. Графік функції Растрігіна / Fig. 6. Rastrigin function graph

Знаходження мінімуму цієї функції є складною задачею через велику кількісті локальних екстремумів, що може викликати «зависання» класичних алгоритмів оптимізації. Застосування методу рою частинок дозволяє ефективно дослідити весь простір розв'язків та визначити глобальний мінімум при відносно невеликій кількості обчислень.

Область пошуку задана співвідношеннями (1), (5). Рисунки 7, 8 ілюструють залежність швидкості збіжності методу від кількості частинок N та від значень вагових коефіцієнтів c_1, c_2. При розрахунках прийнято $c_0 = 0.5$. У даному прикладі найкращий результат одержано за $N = 32$ та $c_1 = c_2 = 1$.

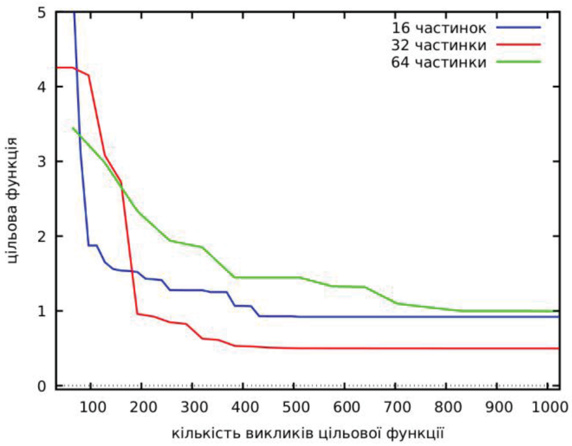


Рис. 7. Вплив кількості частинок на швидкість збіжності для функції Растрігіна / Fig. 7. The influence of the number of particles on the convergence rate for the Rastrigin function; $c_1 = c_2 = 1$

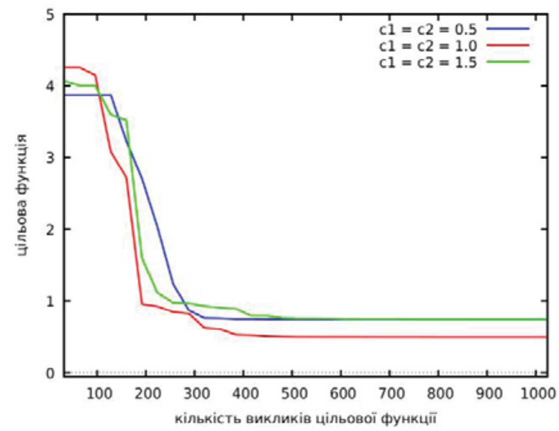
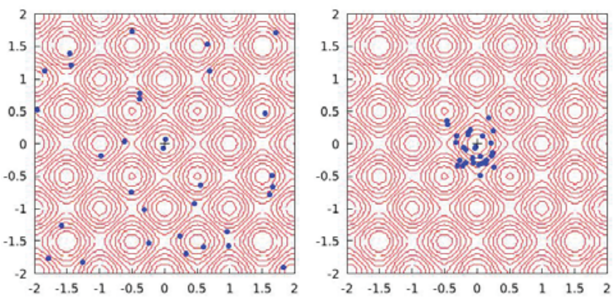


Рис. 8. Вплив значень вагомих коефіцієнтів на швидкість збіжності для функції Растрігіна / Fig. 8. The influence of the values of the weighting coefficients on the convergence rate for the Rastrigin function; $N = 32$

Положення частинок на різних ітераціях наведено на рисунку 9. Щоб знайти наближене значення екстремуму $g_{\min} \approx 0.4975$, було виконано 16 ітерацій (512 викликів цільової функції).



$i = 1$ $\qquad$ $i = 3$

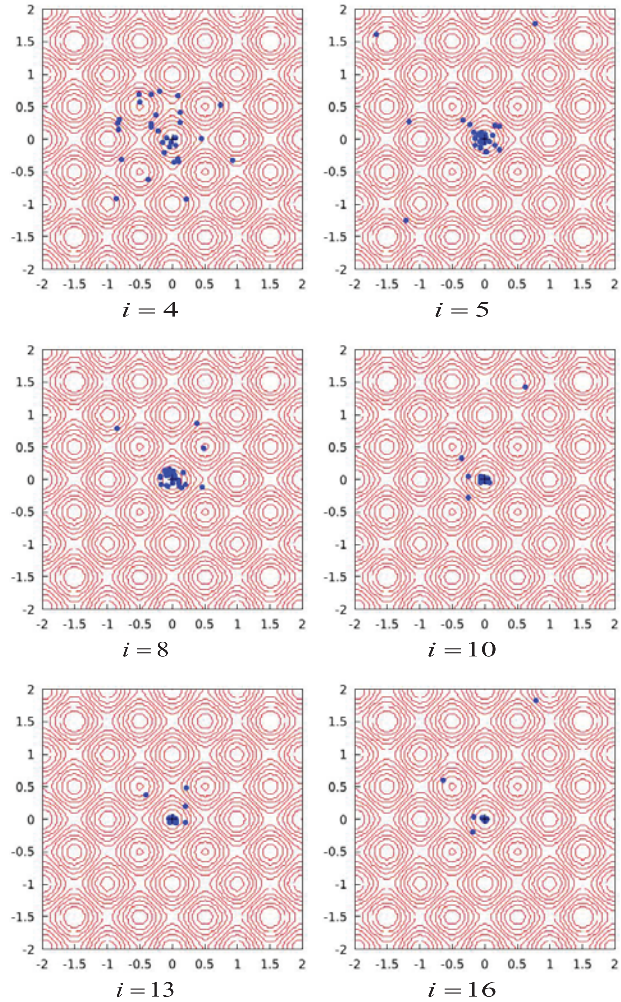


Рис. 9. Положення частинок у просторі розв’язків на різних ітераціях для функції Растрігіна / Fig. 9. The position of particles in the solution space at different iterations for the Rastrigin function

Висновки. В роботі запропонована нова програмна реалізація одного з методів штучного колективного інтелекту – методу рою частинок – для розв’язання задач нелінійної оптимізації в системі комп’ютерної алгебри з відкритим кодом Maxima. Показана висока обчислювальна ефективність даного методу для знаходження глобальних екстремумів «долинних» та мультимодальних функцій у тих випадках, коли застосування багатьох класичних алгоритмів може виявитися ускладненим. Досліджено вплив параметрів методу (кількості частинок і значень вагових коефіцієнтів) на швидкість практичної збіжності. Розвинутий метод може бути застосований, у тому числі, для розв’язання задач оптимального проектування будівельних конструкцій, будівель та споруд.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Карпенко А. П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой : монография / А. П. Карпенко. – Москва : Издательство МГТУ им. Баумана, 2017. – 446 с.
2. Eberhart R. Swarm Intelligence / R. Eberhart, Yu. Shi, J. Kennedy. – Morgan Kaufmann, Elsevier, 2001. – 512 pp.
3. Poli R. Analysis of the publications on the applications of particle swarm optimisation / R. Poli // Journal of Artificial Evolution and Applications. – 2008. – Article ID 685175. – 10 p.
4. Галан А. Ю. Выбор параметров алгоритма на базе метода роя частиц для синтеза антенных решеток с секторной диаграммой направленности / А. Ю. Галан, А. В. Борискин // Радіофізика та електроніка. – 2011. – Т. 2 (16), № 1. – С. 11–18.
5. Practical genetic algorithms with CD-Rom / [R. L. Haupt, S. E. Haupt]. – New-York : Wiley, 2004. – 272 p.

REFERENCES

1. Karpenko A.P. *Sovremennyye algoritmy poiskovoy optimizatsii. Algoritmy, vdokhnovlennyye prirodoy* [Modern search engine optimization algorithms. Algorithms inspired by nature]. Moscow : MSTU named after Bauman, 2017, 446 p. (in Russian).
2. Eberhart R., Shi Yu. and Kennedy J. Swarm Intelligence. Morgan Kaufmann, Elsevier, 2001, 512 p.
3. Poli R. Analysis of the publications on the applications of particle swarm optimisation. Journal of Artificial Evolution and Applications. 2008, Article ID 685175, 10 p.
4. Galan A.Yu. and Boriskin A.V. *Vybor parametrov algoritma na baze metoda roya chastits dlya sinteza antennykh reshetok s sektornoy diagrammoy napravlennosti* [Choice of algorithm parameters based on the particle swarm method for the synthesis of antenna arrays with a sector radiation pattern]. *Radiofizyka ta elektronika* [Radiophysics and electronics]. 2011, vol. 2 (16), no. 1, pp.11−18. (in Russian).
5. Haupt R.L. and Haupt S.E. Practical genetic algorithms with CD-Rom. New-York : Wiley, 2004, 272 pp.

Надійшла до редакції 11.10.2019.