УДК 519.85

ГЛОБАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

КОСОЛАП А. И., *д. физ-мат. н., проф.*

Кафедра специализированных компьютерных систем, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», ул. Набережная Победы, 40, 49005, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-73386707.

Аннотация. ***Цель.*** В работе рассматриваются оптимизационные модели сложных систем. Такие модели возникают при проектировании, построении и управлении сложными системами. Оптимизационные модели сложных систем являются многоэкстремальными. Они включают оптимизацию с непрерывными, целочисленными, булевыми переменными, задачи на перестановках, задачи с гладкими и негладкими функциями. Задача состоит в том, чтобы разработать эффективные методы для решения таких классов. ***Методика.*** В работе предлагается преобразовывать рассмотренные классы задач к единому каноническому виду с помощью точной квадратичной регуляризации и использовать предложенную модификацию двойственности для канонической задачи. ***Результаты.*** Для преобразования задач к каноническому виду используется точная квадратичная регуляризация, которая позволяет находить глобальные решения в задачах нелинейной оптимизации. Канонический вид является задачей максимизации нормы вектора на выпуклом множестве. Это множество аппроксимируется пересечением шаров. Задача максимума нормы вектора на пересечении шаров эффективно решается двойственным методом. ***Научная новизна.*** Разработана новая методология решений сложных оптимизационных задач, которые возникают при моделировании сложных систем. Модифицирована теория двойственности для решения многоэкстремальных задач. ***Практическая значимость.*** Рассмотренная методика решения сложных задач нелинейной оптимизации реализована в виде программного обеспечения. Сравнительные эксперименты подтверждают эффективность данной методики при решении классов задач нелинейной оптимизации.

Ключевые слова: сложные системы, нелинейная оптимизация, многоэкстремальные задачи, точная квадратичная регуляризация, модифицированная теория двойственности.

ГЛОБАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

КОСОЛАП А. І., *д. фіз-мат. н., проф.*

Кафедра спеціалізованих комп’ютерних систем, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», вул. Набережна Перемоги, 40, 49005, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-73386707.

Анотація. ***Мета.*** У роботі розглядаються оптимізаційні моделі складних систем. Такі моделі виникають при проектуванні, побудові та управлінні складними системами. Оптимізаційні моделі складних систем є багатоекстремальними. Ці класи задач включають оптимізацію з неперервними, цілочисельними, булевими змінними, задачами на перестановках, задачами з гладкими та негладкими функціями. Задача полягає в тому, щоб розробити ефективні методи для розв’язку цього класу задач. ***Методика.*** У роботі пропонується перетворювати розглянуті класи задач до єдиного канонічного вигляду та використати запропоновану модифікацію двоїстості для канонічної задачі. ***Результати.*** Для перетворення задач до канонічного вигляду використовується точна квадратична регуляризація, яка дозволяє знаходити глобальні розв’язки в задачах нелінійної оптимізації. Канонічний вигляд є задачею максимізації норми вектора на опуклій множині. Ця множина апроксимується перетином куль. Задача максимуму норми вектора на перетині куль ефективно розв’язується двоїстим методом. ***Наукова новизна.*** Розроблена нова методологія розв’язування складних оптимізаційних задач, які виникають при моделюванні складних систем. Модифікована теорія двоїстості для розв’язку багатоекстремальних задач. ***Практична значимість.*** Розглянута методика розв’язування складних задач нелінійної оптимізації реалізована у вигляді програмного забезпечення. Порівняльні експерименти підтверджують ефективність даної методики при розв’язуванні класів задач нелінійної оптимізації.

Ключові слова: складні системи, нелінійна оптимізація, багатоекстремальні задачі, точна квадратична регуляризація, модифікована теорія двоїстості.

GLOBAL OPTIMIZATION OF THE COMPLEX SYSTEMS COMPLEX SYSTEMS

KOSOLAP A. I., *Dr. Sc. (Phys.-Math.), Prof.*

Department of specialized computer systems, State Higher Education Establishment "Ukrainian State University of Chemical Technology", 40, Naberezhna Peremogy str., Dnipropetrovsk 49005, Ukraine, tel. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-73386707

Abstract. ***Purpose.*** We consider the optimization models of complex systems. Such problems arise in the design, construction and management of complex systems. In most cases, such problems are multiextremal. These classes include optimization problems with continuous, integer, Boolean variables, the problem on permutations, the problem with smooth and nonsmooth functions. We develop effective methods for the solution of such classes of problems. ***Methodology.*** We transform classes of problems to a single canonical form that allows to use the offered modification of a duality for a canonical problem. ***Findings.*** Transformation use of the exact quadratic regularization, which allows us to find global solutions to the problems of nonlinear optimization. The canonical form is the task of maximizing the norm of a vector on a convex set. This set we is approximate by intersection of balls. The problem of the maximum norm of the vector at the intersection of the balls effectively solved the dual method. ***Originality.*** We have developed new methodology for the solution of difficult optimizing problems which arise at modelling of difficult systems. We modify the theory of a duality for the solution of multiextreme problems. ***Practical value.*** The considered technique for solving complex problems of nonlinear optimization is implemented in software. Comparative experiments confirm the effectiveness of this method for solving problems of nonlinear optimization classes.

Keywords: complex systems, nonlinear optimization, multiextremal problems, the exact quadratic regularization, modified a duality theory.

Постановка проблемы

При проектировании сложных систем у их разработчиков возникает множество альтернативных решений. Для выбора наилучших решений строятся оптимизационные модели. Эти модели содержат большое число переменных, значения которых необходимо определить проектировщику сложной системы. Очень часто полученная оптимизационная модель содержит много экстремумов, из которых необходимо выбрать наилучший по значению целевой функции. Численное решение такой задачи представляет известную проблему [3-5,7]. Большинство методов, так или иначе, исследуют всю допустимую область переменных модели. Однако уже для размерностей (числе переменных) больше 20 возникают проблемы связанные с временем вычисления наилучшего решения и памяти для хранения промежуточных данных. Время решения задачи растет экспоненциально при увеличении числа переменных. В реальном проектировании сложных систем число переменных может достигать десятки и сотни тысяч. Для решения таких задач были предложены эволюционные алгоритмы, которые используют случайный поиск [6]. Эти алгоритмы иногда позволяют получить хорошие решения близкие к оптимальным, но без гарантий получения лучшего результата.

Анализ последних достижений

Для нахождения локальных решений в нелинейных оптимизационных моделях в последнее время широко используется прямо-двойственный метод внутренней точки [8]. Этот метод имеет полиномиальную сложность и наиболее эффективен для решения выпуклых (одноэкстремальных) задач. При удачном выборе начальных значений переменных он позволяет получить наилучшее решение, однако нет эффективных алгоритмов для проверки того, что найденное решение наилучшее. Несмотря на значительные усилия по поиску эффективных методов для решения многоэкстремальных задач, ничего лучшего эволюционного поиска не было найдено. Лучшим решением этого класса задач является их преобразование к одноэкстремальным. На первый взгляд это кажется невозможным, так как до настоящего времени не было получено ни одного такого преобразования. Много обоснованных надежд возлагалось на теорию двойственности, так как двойственные задачи являются одноэкстремальными. Однако для многоэкстремальных задач существует разрыв двойственности, который не позволяет по решению двойственной задачи определить оптимальное решение исходной задачи [1]. Тем не менее, возможна модификация теории двойственности, которая позволяет по решению двойственной задачи определить оптимальное решение исходной задачи при существующем разрыве двойственности. Методы, позволяющие свести решение многоэкстремальных задач к одноэкстремальным, будем называть эффективными.

Цель

В данной работе предлагается преобразовывать нелинейные модели сложных систем к специальному (каноническому) виду, и использовать для их решения модифицированную теорию двойственности.

Целью данной работы является демонстрация возможностей нового метода точной квадратичной регуляризации и модифицированной теории двойственности для решения многоэкстремальных задач.

Постановка задачи и ее решение

Рассмотрим задачу оптимизации

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i = 1,\dots,m, x \in E^n\}, \quad (1)$$

где все $f_i(x)$ – дважды дифференцированные функции, E^n – евклидово пространство. Допустим, что решение задачи (1) существует. Для этого достаточно чтобы функция $f_0(x)$ была непрерывна, а допустимая множество задачи (1) было компактно.

Если задача (1) является моделью сложной системы, то она, как правило, многоэкстремальная. Она будет одноэкстремальной, если все $f_i(x)$ – выпуклые функции [3]. В остальных случаях, задача (1) может иметь много локальных минимумов, и решение такой задачи является сложной проблемой.

Покажем, как другие классы задач нелинейной оптимизации преобразуются к виду (1). Задача с целочисленными переменными

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i = 1,\dots,m, x - \textit{целые}\}$$

преобразуется к виду

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i = 1,\dots,m,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(1-\cos(2\pi x_i)) \le 0\},$$

где ограничению

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\cos(2\pi x_i)) \le 0$$

удовлетворяют только целые числа.

Существуют классы задач на перестановках, тогда целочисленные переменные должны удовлетворять дополнительным условиям $(x_i - x_j) \ge 1, \forall i \ne j.$

Задача с булевыми переменными

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i = 1,\dots,m, x = 0 \vee 1\}$$

эквивалентна задаче (1) после преобразования

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i = 1,\dots,m,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_j(1-x_j)^2 \le 0, 0 \le x \le 1\}.$$

где ограничениям

$$\sum_{i=1}^{n} x_j(1-x_j)^2 \le 0, 0 \le x \le 1$$

удовлетворяют только булевы переменные.

Большинство математических моделей с негладкими функциями содержат модули функций. После подстановки фиксированных значений переменных в такие модули, их можно раскрыть и получить задачу вида (1) с гладкими функциями. Процедура преобразования задач с негладкими функциями к гладким функциям описана в работе [3].

Таким образом, практически все классы задач нелинейной оптимизации преобразуются к виду (1). Сложность решения задачи (1) связана с ее многоэкстремальностью. Точная квадратичная регуляризация [2] позволяет преобразовать задачу (1) к следующему каноническому виду

$$\max\{\|z\|^2 \mid f_0(x) + s + (r-1)\|z\|^2 \le d,$$
$$f_i(x) + r\|z\|^2 \le d, i = 1,\dots,m\}, \quad (2)$$

где $z = (x, x_{n+1})$, значение параметра s выбираем таким, чтобы

$$f_0(x^*) + s \ge \|x^*\|^2, \quad (3)$$

x^* – решение задачи (1).

Существует такое значение $r > 0$, что все функции

$$g_0(z) = f_0(\bar{z}) + s + (r-1)\|z\|^2,$$
$$g_i(z) = f_i(\bar{z}) + r\|z\|^2, i = 1,\dots,m$$

будут выпуклыми для допустимых значений z. Действительно, при соответствующем выборе параметра $r > 0$, гессианы функций $g_0(z)$ и $g_i(z), i = 1,\dots,m$ будут положительно определенными матрицами (матрицы с преобладающей главной диагональю являются положительно определенными), что является достаточным условием выпуклости функций. Таким образом, с помощью квадратичного слагаемого $\|z\|^2$ функции задачи (1) преобразуются к выпуклым. Если среди функций $f_i(\bar{z}), i = 1,\dots,m$ есть выпуклые, то эти ограничения остаются неизменными и слагаемое $\|z\|^2$ может не добавляться.

Решение задачи (2) позволяет однозначно определить решение исходной задачи (1). Задача (1) преобразована к задаче (2) при помощи точной квадратичной регуляризации.

В задаче (2) необходимо найти минимальное значение d, при котором решение задачи (2) удовлетворяет условию

$$r\|z^*\|^2 = d^*.$$

Точная квадратичная регуляризация позволяет упорядочить точки локальных минимумов. Локальный минимум преобразованной задачи с меньшим значением целевой функции задачи (1) будет расположен ближе к началу координат.

Часто на переменные задачи (1) накладывается условие неотрицательности. Если такого условия нет, то задачу (1) легко преобразовать так, чтобы ее точка глобального минимума принадлежала положительному ортанту. Достаточно сделать замену $z = z - q, q > 0$. Тогда соответствующая задача (2) будет иметь вид

$$\max\{\|z\|^2 \mid g_i(z) \le d, i = 0,\ldots,m, z \ge 0\}. \qquad (4)$$

Задачу (4) будем решать следующим образом. Фиксируем значение переменной d ($d = d_m + \varepsilon$) и находим решение ее решение z^* задачи. Если $r\|z^*\|^2 = d$, то задача (4) решена и z^* – ее решение, иначе, найдем отрезок $[d_{\min}, d_{\max}]$ для переменной d. Достаточно взять $d_{\min} = d_m$, а $d_{\max}$ определить, решая последовательность задач (4) методом локальной максимизации для $d = d_m + kh$, где h– величина шага, $k = 1, \ldots$. Пусть k_0 – минимальное значение, при котором $r\|z\|^2 > d_m + k_0 h$. Тогда $d_{\max}$ находим на интервале $[d_m + (k_0 - 1)h,\ d_m + k_0 h]$ методом дихотомии, решая задачу (4) до достижения равенства $r\|z\|^2 = d_{\max}$.

В общем случае, рассмотренный метод решения задачи (4) позволяет найти только точку локального максимума. Покажем, что дальнейшее преобразование задачи (4) позволит найти ее глобальное решение.

Выпуклое множество задачи (4) с любой наперед заданной точностью аппроксимируется выпуклым многогранником. Тогда задача (4) преобразуется к следующей

$$\max\{\|x\|^2 \mid Ax \le b, x \ge 0\},$$

которая точной квадратичной регуляризацией преобразуется к виду

$$\max\{\|x\|^2 \mid a_i^T x + \|x\|^2 - b_i \le d, i = 1,\ldots,m,$$
$$\|x\|^2 - x_i \le d, i = 1,\ldots,n\}, \qquad (5)$$

где a_i – строки матрицы A. Покажем, что полученная задача максимизации нормы вектора на пересечении шаров (5) эффективно решается модифицированным двойственным методом.

Запишем задачу (5) в виде

$$\max\{\|x\|^2 \mid \|x - a^i\|^2 \le r_i^2, i = 1,\ldots,m\}. \qquad (6)$$

Построим функцию Лагранжа этой задачи

$$L(x,\lambda) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\|x - a^i\|^2 - r_i^2)$$

и решим задачу (1) методом множителей Лагранжа, получим решение в виде

$$x(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i - 1}. \qquad (7)$$

В этом решении множители Лагранжа соответствующие неактивным ограничениям должны быть нулевыми. Найти положительные множители, используя ограничения задачи (6) сложно. Поэтому будем их искать из решения двойственной задачи. Двойственная функция равна максимуму функции Лагранжа и может быть найдена в явном виде

$$g(\lambda) = \frac{\|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i\|^2}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i - 1} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\|a^i\|^2 - r_i^2),$$

а двойственная задача

$$\min\{g(\lambda) \mid \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \le 1, \lambda \ge 0\}$$

является выпуклой. Модифицируем эту двойственную задачу добавлением ограничений прямой задачи, выраженные через переменные двойственной задачи

$$\min\left\{g(\lambda) \,\Big|\, \|x(\lambda) - a^i\|^2 \le r_i^2 i = 1,\ldots,m, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - 1 \ge 0, \lambda \ge 0\right\}. \qquad (8)$$

В отличии от классической теории двойственности к ограничениям двойственной задачи (8) добавлены ограничения исходной задачи (6), выраженные через двойственные переменные. Эти ограничения выпуклые и не меняют одноэкстремальности задачи (8).

Задача (8) одноэкремальная и легко решается прямо-двойственным методом внутренней точки [8]. Найденное решение задачи (8) подставляем в формулу (7) и получаем решение задачи (6).

Пример. Решим задачу (6) для $n = 2$ и $m = 5$, значения a^i и r_i^2 приведены в табл. 1. В задаче (6) четыре локальных максимума. Решение задачи (7)

$$\lambda = (0;\ 0{,}009127;\ 0{,}180158;\ 0{,}792853;\ 0.017872).$$

После подстановки этих значений в формулу (7), определим точку глобального максимума

$$x^* = (-1{,}4946337;\ 2{,}9538614)$$

задачи (6). Разрыв двойственности в этой задаче больше нуля $\|x(\lambda)\|^2 = 10.9592$, $g(\lambda) = 11.69398$. Активным в точке x^* будет третье и четвертое ограничение. Решим для этих ограничений линейную систему уравнений

$$x^* - \sum \lambda (x^* - a^i) = 0,$$

получим оптимальные множители Лагранжа $\lambda^* = (0; 0; 0{,}183541; 0{,}79583; 0)$. Для этих множителей разрыв двойственности будет равен нулю $g(\lambda^*) = \| x^*\|^2 = 10.9592$.

Таблица 1.

Исходные данные для примера/Initial data for an example

a^1	a^2	r^2
4	3	40
–2	2	35
–2	–2.5	30
0,5	0,5	10
–1	2	25

Если в двойственной задаче (8) не учитывать ограничений прямой задачи (так делается во всех двойственных методах), то получим более точную оценку $g(\lambda) = 11.68853$, но после вычисления $x(\lambda)$ по формуле (7) получим $\|x(\lambda)\|^2 = 13.08578$, причем точка $x(\lambda)$ будет недопустимой для ограничений прямой задачи. Таким образом, традиционное решение двойственной задачи позволяет получить только верхнюю оценку целевой функции прямой задачи, но не несет никакой информации о точке глобального максимума задачи (6). Поэтому использование точной квадратичной регуляризации является существенным, так как ограничения прямой задачи будут выпуклыми для двойственной задачи.

Задача (6) является вспомогательной в методе точной квадратичной регуляризации и используется для проверки оптимальности найденного решения.

В настоящее время в Internet можно найти большое число тестовых задач для проверки эффективности новых методов глобальной оптимизации. Число этих задач порядка 500. Автор решил методом точной квадратичной регуляризации более 250 из этих тестовых задач различной размерности. Часть этих задач имеют практическое значение и взяти из области оптимального проектирования. Примеры таких задач приведены в работе [2].

В табл. 2 приведены результаты сравнительных численных экспериментов. Показаны результаты, полученные методом точной квадратичной регуляризации (EQRM) и лучшие результаты, полученные всеми другими методами при решении тестовых задач без ограничений и с ограничениями. В табл. 2 значение n равно числу переменных, а m – числу ограничений.

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что новый метод превосходит существующие методы для решения задач глобальной оптимизации. Во всех приведенных тестовых задачах значение глобального минимума меньше. Такие же результаты были получены и при решении других тестовых задач.

Особенностью нового метода является также то, что он использует только локальный поиск и метод дихотомии. В настоящее время разработаны эффективные для локального поиска, позволяющие решать задачи большой размерности, содержащие десятки и сотни тысяч переменных. Это означает, что и новый метод может быть использован для решения задач глобальной оптимизации большой размерности.

Таблица 2.

Сравнительные численные эксперименты / Comparative numerical experiments

Задача	n	m	Метод EQRM глобальний минимум	Лучший известный глобальный минимум
P4	50	0	**-49,6238**	-49,5856
P13	10	0	**-4189,828873**	-4189,829
P30	20	0	**-17313,8055**	-14371,8
P33	20	0	**0**	1,42553
P34	20	0	**-9819,531542**	-9742,310076
P35	49	1	**-0,98284629**	-0,5322069
P36	40	0	**-1560**	-1550,5
P37	30	0	**0**	0,038864
P39	10	0	**0,000520166**	0,015000848
P40	5	0	**0,02299238**	0,02299238
P41	10	0	**0,000149582**	0,1(0)
P42	30	0	**0,002922475**	0
P43	10	0	**-1**	-0,84334
P45	10	0	**1,4E-06**	8,2334401
P46	10	0	**-87,06859302**	86,82681897
P47	20	0	**– 0.822366068**	– 0,65789
P53	18	0	**9,17984718**	9,21818213
P62	10	0	**-30491,15791**	-11131,04786
P68	20	0	**-32,346407**	-28,2758
P74	20	0	**-43,53286**	-33,91731
PC9	9	13	**-0,877912564**	-0,866025404
PC17	5	3	**-5675,620079**	-2642,715188
PC21	14	15	**0,0311596**	0,057406
PC29	9	2	**-28,78870202**	-15,02661779
PC39	7	27	**-0,74916161**	-0,749137
PC49	6	6	**-13,40190356**	-12,5079
PC50	7	14	**-1772,802**	-1766,37 (f_6>0)
PC51	6	2	**-316,69538**	-316,27
PC55	16	21	**156,2196293**	174,788
PC56	15	2	**-25,24210863**	-16,6359
PC57	4	7	**0,341739553**	1,911072271
PC59	10	6	**0,97888325**	1,1437
PC72	4	3	**23,85531631**	29,8943782
PC76	10	8	**-8637,427724**	-8338,945239
PC78	8	6	**-1,00905**	-0,0202

Научная новизна и практическая значимость

Разработан новый метод для численного решения оптимизации сложных систем, для которых в настоящее время нет эффективных методов. Этот метод использует точную квадратичную регуляризацию для преобразования всех оптимизационных задач к каноническому виду: максимизации нормы вектора на выпуклом множестве. Для решения канонической задачи используется эффективный прямо-двойственный метод внутренней точки и метод дихотомии. Для проверки оптимальности найденного решения построена новая теория двойственности. Эта теория позволила впервые выделить классы многоэкстремальных задач, которые преобразуются к решению одноекстремальных.

Новый метод может быть использован при проектировании сложных систем в различных прикладных областях.

Выводы

В данной работе классы задач нелинейной оптимизации с использованием точной квадратичной регуляризации преобразуются к каноническому виду.

Канонический вид аппроксимируется задачей максимума нормы вектора на пересечении шаров. Полученная задача легко решается модифицированным двойственным методом. Предложенные методы оптимизации сложных систем прошли значительную численную проверку и показали высокую эффективность при решении многих многоэкстремальных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Косолап А. И. Методы глобальной оптимизации / А. И. Косолап. – Днепропетровск: Наука и образование, 2013. – 316 с.
2. Косолап А. И. Глобальная оптимизация. Метод точной квадратичной регуляризации / А. И. Косолап – Днепропетровск: ПГАСА, 2015 – 164 с.
3. Floudas C. A. Deterministic global optimization: theory, algorithms and applications/ C. A. Floudas. – Kluwer Academic Publishers, 2000. – 57 p.
4. Floudas C. A. A review of recent advances in global optimization / C.A. Floudas, C.E. Gounaris // J. Glob. Optim. – 2009. – v. 45, no. 1. – P. 3–38.
5. Horst R. Global Optimization: Deterministic Approaches /R. Horst, H. Tuy. – 3rd ed., Berlin: Springer–Verlag, 1996. – 727 p.
6. Kenneth V. P. Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization / V.P. Kenneth, R.M. Storn, J.A. Lampinen. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 542 p.
7. Liberti L. Introduction to Global Optimization/L. Liberti. –DEI, Politecnico di Milano, Pizza L. da Vinci 32, 20133 Milano, Italy, 2006. – 42 p.
8. Nocedal J. Numerical optimization / J. Nocedal, S. J. Wright. – Springer, 2006. – 685 p.

REFERENCES

1. Kosolap A. I. *Metody globalnoy optimizatsii* [Methods of global optimization]. Dnepropetrovsk, Nauka i obrasovanie, 2013, 316 p. (in Russian)
2. Kosolap A. I. *Globalnaya optimizatsiya. Metod tochnoy kvadratichnoy regulyarizatsii* [Global optimization. A method of exact quadratic regularization]. Dnepropetrovsk, PGASA, 2015, 164 p. (in Russian)
3. Floudas C. A. *Deterministic global optimization: theory, algorithms and applications*. Kluwer Academic Publishers, 2000. 57 p.
4. Floudas C. A.and Gounaris C.E. *A review of recent advances in global optimization*. J. Glob. Optim., 2009, v. 45, no. 1. pp. 3–38.
5. Horst R. and Tuy H. *Global Optimization: Deterministic Approaches*. 3rd ed., Berlin, Springer–Verlag, 1996. 727 p.
6. Kenneth V.P., Storn R.M. and Lampinen J.A. *Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2005, 542 p.
7. Liberti L. *Introduction to Global Optimization*. DEI, Politecnico di Milano, Pizza L. da Vinci 32, 20133 Milano, Italy, 2006. 42 p.
8. Nocedal J. and Wright S. J. *Numerical optimization*. Springer, 2006. 685 p.