

УДК 519.21

О ПРИМЕНЕНИИ ФРАКТАЛЬНОГО ФОРМАЛИЗМА ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ СТРУКТУР

БОЛЬШАКОВ В. И.¹, д. т. н., проф.,
ВОЛЧУК В. Н.^{2*}, д. т. н., доц.,
ДУБРОВ Ю. И.³, д. т. н., проф.

¹ Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение "Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры", ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днепр, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: bolshakov@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0003-0790-6473

^{2*} Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение "Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры", ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днепр, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: volchuky@yandex.ua, ORCID ID: 0000-0001-8717-6786

³ Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение "Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры", ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днепр, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: mom@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

Аннотация. *Постановка задачи.* Практика применения фрактального формализма для идентификации соответствующих структур показала, что при этом часто наблюдается неадекватность их восприятия как фрактальных. Вероятно, это связано с тем, что распознавание любого объекта происходит на базе формирования его модели (если распознавание производится непосредственно человеком, то модели формируются в его сознании). Неадекватность распознаваемой модели приводит к потере кардинальности. Подобное часто наблюдалось при стремлениях исследователей создавать математические модели (ММ) в области материаловедения, в которых структуру, например металла, не поддающуюся детерминированному описанию, они пытались синтезировать ММ, применяя статистический анализ. *Цель работы.* В этой связи мы предполагаем, что если на стадии определения типа ММ будет определена её размерность, то её вид будет очевидным. *Результаты и их обсуждение.* Неожиданно для многих исследователей, при попытках получить ММ такой системы, которая, например, представляла структуру некоторого материала, не удавалось получить взаимно однозначное соответствие между её ММ и самой структурой. Выявление причин такого несоответствия привело учёных к определению факторов, влияющих на это несоответствие, главными из которых являлись: в ММ не включены факторы, значительно влияющие на функцию; в ММ не отображается нелинейность пространства состояний объекта идентификации (ПСОИ). Вероятнее всего, именно нелинейность ПСОИ является первопричиной появления фрактальных размерностей. *Выводы.* Таким образом, закономерность, представленная в виде некоторой функции, обязательно включает метрику ПСОИ. Ещё раз отметим, что причина неадекватности модели зачастую кроется не в недостатках модели, а в природе изучаемого явления, которое может быть идентифицировано применением фрактального формализма. После изучения специальной литературы у авторов данной статьи создалось впечатление, что связь фрактальной размерности с физической природой объекта незаслуженно мало отображена в публикациях, отражающих практическую применимость этого феномена. Вероятно, последнее связано с тем, что для каждого материала с соответствующими ему фрактальными характеристиками существует одна и только одна, только ему присущая фрактальная размерность.

Ключевые слова: математическая модель; структура; фрактальная размерность; линейное пространство; функция

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ФРАКТАЛЬНОГО ФОРМАЛІЗМУ У МАТЕМАТИЧНОМУ ОПИСІ СТРУКТУР

БОЛЬШАКОВ В. И.¹, д. т. н., проф.,
ВОЛЧУК В. М.^{2*}, д. т. н., доц.,
ДУБРОВ Ю. І.³, д. т. н., проф.

¹ Кафедра металознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури", вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: bolshakov@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0003-0790-6473

^{2*} Кафедра металознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури", вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: volchuky@yandex.ua, ORCID ID: ORCID ID: 0000-0001-8717-6786

³ Кафедра металознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури", вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: mom@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

Анотація. Постановка завдання. Практика застосування фрактального формалізму для ідентифікації відповідних структур показала, що при цьому часто спостерігається неадекватність їх сприйняття як фрактальних. Ймовірно, це пов'язано з тим, що розпізнавання будь-якого об'єкта відбувається на базі формування його моделі (якщо розпізнавання проводиться безпосередньо людиною, то модель формується в свідомості). Неадекватність моделі, що розпізнається, спричинює втрату кардинальності. Подібне часто спостерігалось при прагненнях дослідників створювати математичні моделі (ММ) в галузі матеріалознавства, в яких структуру, наприклад металу, що не піддається детермінованому опису, вони намагалися синтезувати ММ, застосовуючи статистичний аналіз. **Мета роботи.** У зв'язку з цим, ми припускаємо, що якщо на стадії визначення типу ММ буде визначена її розмірність, то її вигляд буде очевидним. **Результати та їх обговорення.** Несподівано для багатьох дослідників, при спробах отримати ММ такої системи, яка, наприклад, представляла структуру деякого матеріалу, не вдавалося отримати взаємно однозначну відповідність між її ММ і самою структурою. Виявлення причин такої невідповідності привели вчених до визначення факторів, що впливають на цю невідповідність, головними з яких були: в ММ не включені чинники, що значно впливають на функцію; в ММ не відображається нелінійність простору станів об'єкта ідентифікації (ПСОІ). Найімовірніше, саме нелінійність ПСОІ є першопричиною появи фрактальних розмірностей. **Висновки.** Таким чином, закономірність, представлена у вигляді деякої функції, обов'язково включає метрику ПСОІ. Ще раз відзначимо, що причина неадекватності моделі часто криється не в недоліках моделі, а в природі досліджуваного явища, яке може бути ідентифіковане застосуванням фрактального формалізму. Після вивчення спеціальної літератури в авторів цієї статті склалося враження, що зв'язок фрактальної розмірності з фізичною природою об'єкта незаслужено мало висвітлено в публікаціях, які відображають практичну застосовність цього феномену. Ймовірно, останнє пов'язане з тим, що для кожного матеріалу з відповідними йому фрактальними характеристиками існує одна і тільки одна, тільки йому притаманна фрактальна розмірність.

Ключові слова: математична модель; структура; фрактальна розмірність; лінійний простір; функція

THE FRACTAL APPLICATION FORMALISM IN MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE STRUCTURE

*BOLSHAKOV V.I.¹, Dr. Sc. (Tech.), Prof.,
VOLCHUK V.N.^{2*}, Dr. Sc. (Tech.), Ass. Prof.,
DUBROV Yu.I.³, Dr. Sc. (Tech.), Prof.*

¹ Department of Materials and Materials Processing, State Higher Educational Establishment “Prydniprov’ska State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-A, Chernyshevskogo str., Dnipro 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 745-23-72, e-mail: bolshakov@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0003-0790-6473

^{2*} Department of Materials Science, State Higher Educational Establishment “Prydniprov’ska State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-a, Chernishevskogo str., Dnipro 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: volchuky@yandex.ua, ORCID ID: 0000-0001-8717-6786

³ Department of Materials Science, State Higher Educational Establishment “Prydniprov’ska State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-a, Chernishevskogo str., Dnipro 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: mom@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

Summary. Formulation of the problem. The practice of fractal formalism for identifying corresponding structures has shown that in this case, often there is the inadequacy of their perception as a fractal. This is probably due to the fact that any object recognition occurs on the basis of formation of the model (if recognition is made directly by man, the pattern formed in his mind). An inadequate recognizable model leads to the loss dramatically. This is often observed in the endeavors of researchers, to create mathematical models (MM) in the field of materials science, in which the structure, such as metal, intractable deterministic description, they tried to synthesize MM, using statistical analysis. **Objective.** In this regard, we suggest that if it is the dimension will be determined at the stage of determination of the type MM, its appearance will be apparent. **Results and discussion.** Unexpectedly for many researchers in accessing MM such a system, which, for example, represents the structure of a material, it was not possible to obtain an one-to-one correspondence between her and every structure of MM. Identifying the reasons for this discrepancy has led scientists to determine the factors influencing this disparity, the main ones were: factors not included in the MM, significantly affecting the function; MM does not display non-linearity states identify the object space (SIOS). Most likely, this is the root cause nonlinearity SIOS appearance of fractal dimensions. **Conclusions.** Thus, the pattern presented in the form of a function, be sure to include metric SIOS. Once again, we note that the reason for the inadequacy of the model often lies not in the shortcomings of the model, and in the nature of the phenomenon under study, which can be identified by the use of fractal formalism. After an extensive literature review, the authors of this article had the impression that the fractal dimension of the relation with the physical nature of the object displayed in the undeservedly little publications that reflect the practical applicability of this phenomenon. Probably the latter due to the fact that for each material, with its corresponding fractal characteristics, there is one and only one, only his inherent fractal dimension.

Keywords: mathematical model; structure; fractal dimension; linear space; function

Постановка задачи

Практика применения фрактального формализма для идентификации соответствующих структур показала, что при этом часто наблюдается неадекватность их восприятия как фрактальных. Вероятно, это связано с тем, что распознавание любого объекта происходит на базе формирования его модели (если распознавание производится непосредственно человеком, то модели формируются в его сознании). Неадекватность распознаваемой модели приводит к потере кардинальности¹. Подобное часто наблюдалось при стремлении исследователей создавать математические модели (ММ) в области материаловедения, в которых структуру, например металла, не поддающуюся детерминированному описанию, они пытались синтезировать ММ, применяя статистический анализ.

Цель работы

На стадии определения типа ММ определить её размерность.

Результаты и их обсуждение

Представляя модель некоторой структуры в виде ММ, описывающей её фрактальную размерность, мы концентрируем в математических соотношениях совокупность наших знаний, представлений и гипотез, что является адекватным описанием на языке математики физической природы объекта идентификации. Поскольку методы математических наук, на основании которых создаются модели фрактальных структур, сводятся, в конечном счете, к оперированию формальной и диалектической логикой, постольку они делают возможной экстраполяцию тенденций их развития. При синтезе практически любой ММ допустимо использование произвольных математических средств.

Оправданием особого внимания к теории фракталов является история появления такой науки как теория вероятностей, которая (и все связанные с ней научные построения) инициирована сложностью или просто невозможностью применения детерминированного анализа для идентификации этих систем.

Применяя аналогию, допускаем, что применение теории фракталов и мультифракталов инициировано сложностью или просто невозможностью применения традиционных математических методов для идентификации систем фрактального типа.

Стремясь отыскать язык описания подобных систем, большинство научных исследований практически сводили к попыткам синтеза ММ, которые могли бы позволить получать информацию о свойствах и поведении этих систем, что для фрактальных структур оказалось неосуществимым.

¹ В данном контексте под кардинальностью следует понимать существенность, важность получаемых с помощью рассматриваемой модели результатов.

Поиск подобных ММ производился в то время, когда визуальное восприятие окружающих нас объектов подсказывало, что все они имеют целочисленную размерность. Тем не менее, только сравнительно недавно было обнаружено, что в относительно малых масштабах большое число объектов типа микроструктур, имеет дробную размерность (см., например, [1–5]). В наличии таких структур можно убедиться на следующем примере.

Допустим, что имеется ММ некоторого объекта, представленная, например, в виде функции:

$$Y = f(x_1, \dots, x_n, t). \quad (1)$$

Эта функция, как и любая другая, имеет свой геометрический образ, некоторую $(n+1)$ -мерную поверхность. Этот геометрический образ, так же как и функция (1), является моделью, а формальное адекватное представление этой модели является целью большинства научных поисков, поскольку геометрический образ делает возможным определение расстояния между любыми двумя точками, находящимися на его поверхности или в его объеме. Подставляя в (1) те или иные значения независимых переменных, можно определять значение функции (1), что является прогнозом.

Неожиданно для многих исследователей, при попытках получить ММ такой системы, которая, например, представляла структуру некоторого материала, не удавалось получить взаимно однозначное соответствие между её ММ и самой структурой. Выявление причин такого несоответствия привело учёных к определению факторов, влияющих на это несоответствие, главными из которых являлись:

- в ММ не включены факторы, значительно влияющие на функцию;
- в ММ не отображается нелинейность пространства состояний объекта идентификации (ПСОИ).

Вероятнее всего, именно нелинейность ПСОИ является первопричиной появления фрактальных размерностей.

Уверенность в линейности ПСОИ существовала с момента возникновения науки, а в головах некоторых ученых существует и в настоящее время. Распространяя свой образ мышления на оценку взаимодействия объектов различной природы, мы эти оценки часто сводим к таким шаблонам, как, например: если ракета пролетела за 1 с 1 000 м, то за 2 с она пролетит 2 000 м и т. п.

Идея линейности является одним из важнейших принципов математики. На этой основе почти каждый физический процесс в малом (в определенном смысле) является линейным. Это позволяет делать достаточно точные выводы, изучая линейный, гораздо более простой для исследования объект. Уточним понятие линейного пространства. Идею линейности можно сформулировать так: *отклик на малые воздействия линейно зависит от этих малых воздействий*. Таким образом, линейное

пространство – это понятие, обобщающее обычное (трехмерное) пространство.

Линейное пространство, в котором введено скалярное произведение, называется евклидовым. Введение скалярного произведения – это, по сути, задание метрики, т. е. способа определения расстояния между двумя точками (элементами), или определение меры угла в конкретной геометрической системе. Опыт нашего визуального восприятия различных объектов показывает, что для некоторых из них предположение о линейности пространства их состояний является недопустимым и наше восприятие их как объектов, пространство состояний которых евклидово, – неверное. Поясним это ещё на одном примере.

Предположим, что у нас имеется ММ, идеально точно описывающая некоторое явление. Для большей определенности представим эту ММ в общем виде как (1). Пусть эта ММ описывает прочность металла, а x_1, \dots, x_n – факторы, определяющие прочность металла в моменты времени $t_i (i = 1, 2, \dots, k)$. Этими факторами могут быть такие, как, например, химический состав металла, среда охлаждения металла после плавки, скорость охлаждения, время закалки и т. д.

Допустим также, что модель (1) обладает чувствительностью к начальным условиям. *Это означает, что сколь угодно малая неточность в определении начального состояния системы, описываемой этой ММ, приводит к тому, что две условно близкие траектории² обязательно будут расходиться.* Например, подстановка в ММ (1) численных значений параметров точно определяемого химического состава металла и всех остальных независимых переменных даёт точное определение численного значения функции – Y_n . Другими словами, Y_n допустимо совпадает с численным значением этой величины, которая была получена в эксперименте – $Y_э$.

Теперь допустим, что процентный состав одного из компонентов этого металла не может быть с достаточной степенью точности установлен. Эта неточность может быть обусловлена недостаточной точностью физико-химического анализа³.

Поскольку функция (1), как и любая другая, имеет свой геометрический образ, некоторую $(n+1)$ -мерную поверхность, этот образ, так же как и функция (1), является моделью, а формальное адекватное представление этой модели – цель большинства научных поисков. Чувствительность модели (1) к начальным условиям может

подтверждаться тем, что подстановка в нее относительно неточного численного значения любого компонента приведет к тому, что невязка – ΔY будет значительно превосходить некоторый допустимый порог λ , за пределами которого модель признается неадекватной:

$$|Y_n - Y_э| = \Delta Y \gg \lambda. \quad (2)$$

Неравенство (2) подтверждает тот факт, что различие между траекторией, предсказанной теоретически, и траекторией, полученной экспериментальным путем, довольно значительно. *Причина этого явления кроется не в недостатках модели, а в природе изучаемого процесса.* Для таких объектов приходится искать более сложные характеристики, позволяющие устанавливать взаимно однозначное соответствие между моделью и реальностью.

Существование подобных объектов противоречит гипотезе линейности, которая на протяжении многих веков являлась одним из важнейших принципов математики.

Ещё раз отметим, что опыт нашего визуального восприятия окружающего мира на протяжении всего времени существования человечества показывал, что размерность окружающих нас объектов – суть целое число и дробной быть не может.

Обычно для аппроксимации объектов были применимы традиционные методы геометрии, основанные на приближительной аппроксимации структуры исследуемого объекта геометрическими фигурами, метрическая и топологическая размерность которых целочисленные и равные между собой. При этом внутренняя структура объектов, как правило, игнорировалась, а процессы образования структур и взаимодействия между ними и с окружающей средой характеризовались термодинамическими параметрами. Такой подход приводил к значительной потере информации о свойствах и поведении аппроксимируемых систем.

Вероятно, внимание к объектам, размерность которых не является целым числом, началось с того момента, когда Вейерштрасс построил непрерывную, нигде не дифференцируемую функцию, заданную рядом:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad a < 1, b > 1, a \cdot b > 1. \quad (3)$$

График этой функции показан на рисунке, где фигура А была получена при $a = 0,5$, $b = 4$. Там же фигура В в увеличенном масштабе показана в виде прямоугольника, скопированного с фигуры А. Как видно из рисунка, ломанная кривая инвариантна относительно растяжения ее в b раз вдоль оси абсцисс и в $1/a$ раз вдоль оси ординат. *То есть в меньшем масштабе эта кривая выглядит точно так же, как и в более крупном.* Функция Вейерштрасса является фрактальной.

² Под траекторией, в данном контексте, мы понимаем линию, любая точка которой – $Y_j (j = \{0 \div \infty\})$ может

быть задана координатами x_1, \dots, x_n, t_i .

³ На практике такие ситуации встречаются очень часто.

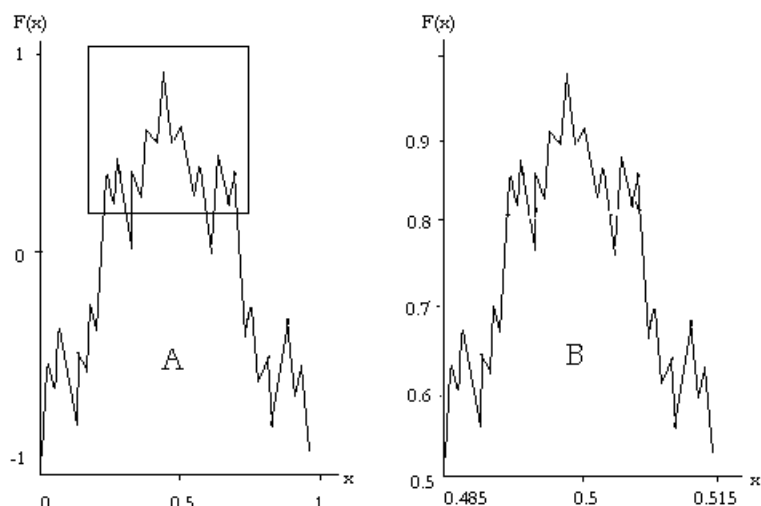


Рис. Функция Вейерштрасса /
Fig. Weierstrass function

Представление о фрактальной размерности, вероятнее всего, возникло при определении расстояния между точками фрактальной структуры. Например, длина L некоторой кривой может быть определена числом $N(\delta)$ прямолинейных отрезков длины δ , необходимых для ее покрытия:

$$N(\delta)\delta \rightarrow L \quad (\text{4})$$

$\delta \rightarrow 0$

То есть в пределе, когда $\delta \rightarrow 0$, мера L становится асимптотически равной длине кривой и не зависит от δ . Эта длина описывается приближенной формулой (5):

$$L(\varepsilon) = a\varepsilon^{1-D}, \quad (\text{5})$$

где D – фрактальная размерность линии.

В ряде работ [6–13] было показано, что существование фрактальных множеств позволяет объяснить (а в некоторых случаях и предсказать) экспериментальные результаты, полученные в разных областях. Среди них космология, химическая кинетика, физика полимеров и многие другие.

Строгого и полного определения фракталов пока не существует. Одно пробное определение фрактала было сделано Б. Мандельбротом: *Фракталом называется множество, размерность которого строго больше его топологической размерности* [1]. Затем он же сузил свое определение, предложив фракталом называть *структуры, состоящие из частей, которые в каком-то смысле подобны целому*.

При этом, если внутренняя метрика структуры, например, шлифа какого-либо металла, являет собой

закономерность, то, установив ее, мы можем постараться перейти к определению взаимно однозначного соответствия между характеристикой качества этого металла и его фрактальной размерностью [14].

Поскольку расстояние – это мера, определяемая между каждым двумя элементами любого множества произвольных элементов, постольку его формальное описание является следствием физической природы этого множества.

Выводы

Таким образом, закономерность, представленная в виде некоторой функции, обязательно включает метрику ПСОИ.

Ещё раз отметим, что причина неадекватности модели зачастую кроется не в недостатках модели, а в природе изучаемого явления, которое может быть идентифицировано применением фрактального формализма.

После изучения специальной литературы у авторов данной статьи создалось впечатление, что связь фрактальной размерности с физической природой объекта незаслуженно мало отображена в публикациях, отражающих практическую применимость этого феномена.

Вероятно, последнее связано с тем, что для каждого материала, с соответствующими ему фрактальными характеристиками, существует одна и только одна, только ему присущая фрактальная размерность.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature / B.B. Mandelbrot. – New-York, San Francisco : Freeman Publ., 1982. – 480 p. – Режим доступа: <http://www.amazon.com/Fractal-Geometry-Nature-Benoit-Mandelbrot/dp/0716711869>.
2. Rényi A. Probability Theory / A. Rényi. – Amsterdam. The Netherlands : North-Holland Publ., 1970. – 670 p. – Режим доступа: <http://www.abebooks.com/PROBABILITY-THEORY-Renyi-A-North-Holland-Publishing/9932099825/bd>.

3. Hentschel H.G. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica D* / H.G. Hentschel, I.E. Procaccia. – 1983. – Vol. 8 (3). – Pp. 435–444. – Режим доступа: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727898390235X>.
4. Свечников А. В. Материалы с кластерной структурой – новые свойства, новые возможности / А. В. Свечников // Сучасне матеріалознавство XXI сторіччя: збірник Національної Академії наук України. – Київ : Наукова думка, 1998. – С. 352–369. – Режим доступа: <http://www.nbu.gov.ua/node/924>.
5. Дубров Ю. Пути идентификации периодических многокритериальных технологий / Ю. Дубров, В. Большаков, В. Волчук. – Саарбрюккен, Германия: Palmarium Academic Publishing, 2015. – 236 p. – Режим доступа: <https://www.ljubljuknigi.ru/store/ru/book/Пути-идентификации-периодических-многокритериальных-технологий/isbn/978-3-659-60262-7>.
6. Большаков Вад. І. Часткова компенсація неповноти формальної аксіоматики при ідентифікації структури металу / Вад. І. Большаков, В. І. Большаков, В. М. Волчук [та ін.] // Вісник Національної Академії наук України. – 2014. – № 12. – С. 45–48. – Режим доступа: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/73434>.
7. Большаков В. И. Особенности применения мультифрактального формализма в материаловедении / В. И. Большаков, В. Н. Волчук, Ю. И. Дубров // Доповіді Національної Академії наук України. – 2008. – №11. – С. 99–107. – Режим доступа: <http://www.dopovidi.nas.gov.ua/200.8-11/>
8. Федер Е. Фракталы: монография / Е. Федер. – Москва : Мир, 1991. – 254 с. – Режим доступа: <http://inis.jinr.ru/sl/vol2/Physics/Динамические%20системы%20и%20Хаос/Федер%20Е..%20Фракталы,%201991.pdf>
9. Фрактальные множества, функции, распределения : монография / [А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый]. – Киев : Наукова думка, 1992. – 208 с. – Режим доступа: [http://www.e-catalog.name/x/x?LNG=&C21COM=S&I21DBN=VDPU&P21DBN=VDPU&S21FMT=&S21ALL=\(%3C.%3EK%3D%D0%91%D0%90%D0%97%D0%98%3C.%3E\)&FT_REQUEST=&FT_PREFIX=&Z21ID=&S21STN=1&S21REF=&S21CNR=20](http://www.e-catalog.name/x/x?LNG=&C21COM=S&I21DBN=VDPU&P21DBN=VDPU&S21FMT=&S21ALL=(%3C.%3EK%3D%D0%91%D0%90%D0%97%D0%98%3C.%3E)&FT_REQUEST=&FT_PREFIX=&Z21ID=&S21STN=1&S21REF=&S21CNR=20)
10. Schaefer D.W. Structure of Random Porous Materials: Silica Aerogel. / D.W. Schaefer, K. D. Keefer // *Phys. Rev. Lett.* – 1986. – Vol. 56. – Pp. 2199–2202. – Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.2199>.
11. Witten T.A. Diffusion-limited aggregation / T.A. Witten, L. M. Sander // *Phys. Rev.* – Ser.B. – 1983. – Vol. 27. – Pp. 5686. – Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.27.5686>.
12. Calcagni G. Particle-physics constraints on multifractal spacetimes / G. Calcagni, G. Giuseppe Nardelli, D. Rodríguez-Fernández // *Phys. Rev.* – Ser. D. – 2016. – Vol. 93. – Pp. 25005. – Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.93.025005>.
13. Большаков В. И. Материаловедческие аспекты применения вейвлетно-мультифрактального подхода для оценки структуры и свойств малоуглеродистой стали / В. И. Большаков, В. Н. Волчук // *Металлофизика и новейшие технологии.* – 2011. – Т. 33. – № 3. – С. 347–360. – Режим доступа: <http://mfint.imp.kiev.ua/ru/toc/v33/i03.html>.
14. Большаков В. И. Об оценке применимости языка фрактальной геометрии для описания качественных трансформаций материалов / В. И. Большаков, Ю. И. Дубров // *Доповіді Національної Академії наук України.* – № 4. – 2002. – С. 116–121. – Режим доступа: <http://www.dopovidi.nas.gov.ua/>.

REFERENCES

1. Mandelbrot B.B. *The Fractal Geometry of Nature*. New-York, San Francisco: Freeman Publ., 1982, 480 p.
2. Rényi A. *Probability Theory*. Amsterdam. The Netherlands: North-Holland Publ., 1970, 670 p.
3. Hentschel H.G. and Procaccia I.E. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica D*. 1983, vol. 8 (3), pp. 435–444.
4. Svechnikov A.V. *Materialy s klasternoy strukturoy – novyye svoystva, novyye vozmozhnosti* [Materials with cluster structure – new features, new opportunities]. Modern materials XXI century: a collection of National Academy of Sciences of Ukraine, department of Physics and Engineering. Kyiv : Naukova Dumka, 1998, pp. 352–369. (in Russian).
5. Dubrov Yu., Bolshakov V. and Volchuk V. *Puti identifikatsii periodicheskikh mnogokriterial'nykh tekhnologiy* [Road periodic identification of multi-criteria Technology]. Saarbrücken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2015, 236 p. (in Russian).
6. Bolshakov Vad.I., Bolshakov V.I., Volchuk V.N. [& oth]. *Chastkova kompensatsiya nepovnoty formal'noyi aksiomatyky pry identyfikatsiyi struktury metalu* [The partial compensation of incompleteness of formal axiomatics in the identification of the metal structure]. *Visnik Nacional'noi Akademii nauk Ukraini* [Bulletin of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2014, no. 12, pp. 45–48. (in Ukrainian).
7. Bolshakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Osobennosti primeneniya mul'tifraktal'nogo formalizma v materialovedenii* [Features of the multifractal formalism in materials]. *Dopovidi Nacional'noi Akademii nauk Ukraini* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2008, no.11, pp. 99–107. (in Russian).
8. Feder E. *Fraktaly* [Fractals]. Moscow : Mir, 1991, 254 p. (in Russian).
9. Turbin A.F. and Pratevity N.V. *Fraktal'nyye mnozhestva, funktsii, raspredeleniya* [Fractal sets, functions, distribution]. Kyiv : Naukova Dumka, 1992, 208 p. (in Ukrainian).
10. Schaefer D.W. and Keefer K.D. Structure of Random Porous Materials: Silica Aerogel. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, vol. 56, pp. 2199–2202.
11. Witten T.A. and Sander L.M. Diffusion-limited aggregation. *Phys. Rev. Ser. B*. 1983, vol. 27, pp. 5686.
12. Calcagni G., Giuseppe Nardelli G. and Rodríguez-Fernández D. Particle-physics constraints on multifractal spacetimes. *Phys. Rev. D*. 2016, vol. 93, pp. 25005.
13. Bolshakov V.I. and Volchuk V.N. *Materialovedcheskiye aspekty primeneniya veyvletno-mul'tifraktal'nogo podkhoda dlya otsenki struktury i svoystv malouglerodistoy stali* [Materialovedchesky aspects of wavelet-multifractal approach for assessing the

structure and properties of low-carbon steel]. *Metallofizika i novejshe tehnologii* [Metal Physics and Advanced Technologies]. 2011, vol. 33, no. 3, pp. 347–360. (in Russian).

14. Bolshakov V.I. and Dubrov Yu.I. *Ob otsenke primenimosti yazyka fraktal'noy geometrii dlya opisaniya kachestvennykh transformatsiy materialov* [An estimate of the applicability of the language of fractal geometry to describe Ria-quality transformation of materials]. *Dopovidi Nacional'noi Akademii nauk Ukraini* [Reports National Academy of Sciences of Ukraine]. No. 4, 2002, pp. 116–121. (in Russian).

Поступила в редколлегию 12.04.2016

Принята к печати 15.04.2016