Ю. Н. Базилевич

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Ю. Н. Базилевич

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1987

УДК 517.926

Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики / Базилевич Ю. Н.— Киев : Наук. думка, 1987.— 156 с.

В книге изложены вопросы приведения систем уравнений высокого порядка к отдельным подсистемам путем линейной замены переменных. Рассмотрены как методы, использующие информацию о симметрии соответствующей расчетной схемы, так и непосредственно анализирующие систему уравнений. Доказана единственность разложения системы уравнений на подсистемы. Особое внимание уделено вычислительной стороне применяемых методов, вопросам получения решения с помощью ЭВМ. Приведены тексты программ на языке ФОРТРАН.

Рассмотрены неконсервативные системы, в частности рельсовые экипажи. Указаны пути применения изложенных методов для упрощения уравнений движения систем автоматического управления.

Для инженеров и научных работников, занимающихся исследованием сложных динамических систем, а также для специалистов по общей алгебре, дифференциальным уравнениям и студентов соответствующих специальностей.

Ил. 19. Табл. 9. Библиогр.: С. 148—152 (86 назв.).

Ответственный редактор
А. А. МАРТЫНЮК

Рецензенты
М. Л. КОРОТЕНКО, А. К. ЛОПАТИН

Редакция физико-математической литературы

Б $\frac{1702050000\text{-}247}{\text{М}221(04)\text{-}87}$ 174-87

© Издательство «Наукова думка», 1987

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 5

Методы, использующие информацию о симметрии расчетной схемы

Глава 6

Приведение к подсистемам минимального порядка

Глава 7

Упрощение уравнений путем приведения матриц коэффициентов к блочно-треугольному виду (агрегирование)

Глава 8

Управляемые системы

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Исследование устойчивости движения существенно неконсервативных систем с большим числом степеней свободы наталкивается на ряд трудностей при использовании многих классических результатов теории устойчивости, а высокий порядок соответствующих систем уравнений допускает их исследование лишь численными методами с применением современных ЭВМ. Необходимость исследования систем со столь сложной структурой обусловлена, в частности, изучением следующих процессов:

вращение несущих валов в среде с аэродинамическим сопротивлением;

движение систем, подверженных явлению флаттера;

учет боковых колебаний рельсовых экипажей и др.

Что касается последнего примера, то многочисленные исследования подтверждают необходимость учета возможно большего числа степеней свободы, а также сил взаимодействия колеса и рельса (сил крипа). Именно этими неконсервативными силами объясняется «математическая» неустойчивость движения при высоких скоростях экипажа.

Одним из путей преодоления «проклятия размерности» в рассматриваемых задачах является декомпозиция уравнений движения, позволяющая наряду с экономией машинного времени в ряде случаев анализировать решения таких систем уравнений.

В данной книге рассматривается **точная декомпозиция** уравнений движения, т. е. построение такого преобразования переменных, которое приводит исходную систему уравнений к нескольким независимым подсистемам. Процедура декомпозиции разрабатывается для линейных автономных дифференциальных уравнений. Используемые при этом методы могут применяться и к другим системам линейных уравнений — алгебраическим, логическим или уравнениям в частных производных.

Наиболее известный метод точной декомпозиции опирается на применение представлений конечных групп с учетом информации о симметрии расчетной схемы. Этот метод позволяет получить достаточно простые подсистемы при исследовании колебаний молекул и в ряде других задач физики и химии. Однако применение такого метода к многомассовым неконсервативным системам приводит к менее значительным результатам, так как при этом получаются подсистемы сравнительно высокого порядка. Это обстоятельство обусловило разработку способов непосредственного анализа систем уравнений, в том числе способа коммутирующей матрицы, подробно изложенного в монографии. Применение такого способа к исследованию матриц большой размерности потребовало разработки вычислительных алгоритмов и программ для ЭВМ.

В монографии изложены численные способы приведения линейной системы уравнений к подсистемам минимально возможного порядка. Описаны вычислительные алгоритмы и приведены тексты некоторых программ для ЭВМ. Одна из них — программа нахождения общего решения систем линейных однородных алгебраических уравнений — имеет самостоятельное значение. Она применима к системам уравнений высокого порядка, использует преимущества разреженных матриц и может использоваться в других областях.

Центральное место в книге занимают задачи декомпозиции систем уравнений движения рельсовых экипажей.

Вопросам применения в задачах декомпозиции конечных групп посвящена обширная литература. Другие методы точной декомпозиции в настоящее время изложены в литературе меньше. Преобладающими при этом являются теоретические работы. Недостаточное внимание уделялось вычислительной стороне применяемых методов. Данная книга частично восполняет указанный пробел. Здесь все приемы декомпозиции рассматриваются с точки зрения их алгоритмичности и возможности применения ЭВМ.

Книга доступно вводит в круг основных задач алгебраической декомпозиции на независимые подсистемы линейных автономных дифференциальных уравнений, встречающихся в теории колебаний.

К вопросам, представляющим интерес для исследования, нужно отнести задачу создания эффективного вычислительного алгоритма упрощения уравнений путем приведения матриц коэффициентов к блочно-треугольному виду.

Важной также представляется разработка способов декомпозиции уравнений на слабо связанные подсистемы.

Можно с уверенностью предположить, что данная книга будет с интересом встречена специалистами в области теории колебаний и устойчивости движения.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время при исследовании сложных механических, электрических систем и систем автоматического управления все большую роль играют вычислительная техника и численные методы. Анализ и синтез физических систем, описываемых дифференциальными или алгебраическими уравнениями высокого порядка, требуют больших затрат машинного времени и приводят к накоплению погрешностей в процессе вычислений. Такие трудности возникают при решении задач механики многомассовых неконсервативных систем, например, при исследовании устойчивости движения рельсовых экипажей *.

В книге рассматриваются методы, позволяющие либо привести данную систему уравнений к нескольким независимым подсистемам, либо установить, что при выбранном классе преобразований такое приведение невозможно. Поэтому вместо термина «декомпозиция» можно было бы использовать термин «точная декомпозиция» (или «точное расщепление»), в отличие от тех работ, в которых рассматривается приближенная декомпозиция на блоки, соответствующие «быстрым» и «медленным» движениям, или на блоки, соответствующие слабо связанным подсистемам. Возможность или невозможность расщепления уравнений зависит от свойств исследуемой физической системы, точнее от свойств соответствующей расчетной схемы. В частности, один из основных методов расщепления связан с использованием априорной информации о симметрии расчетной схемы с помощью теории групп. Этот метод широко применяется в теоретической физике. Уравнения движения системы, не обладающей явной симметрией, также могут оказаться расщепляемыми. Пример тому — консервативная колебательная система, кинетическая энергия которой представляет собой положительно определенную квадратичную форму. Такая система, как известно, всегда приводится к главным координатам. Для неконсервативных систем предсгавляют интерес изложенные в данной книге методы приведения системы уравнений к максимально возможному количеству подсистем (при использовании точечного преобразования координат).

Из данного круга вопросов в литературе широко освещены лишь методы, использующие информацию о симметрии расчетной схемы. Другие методы рассматриваются в небольшом числе статей, имеющих, как правило, абстрактный характер.

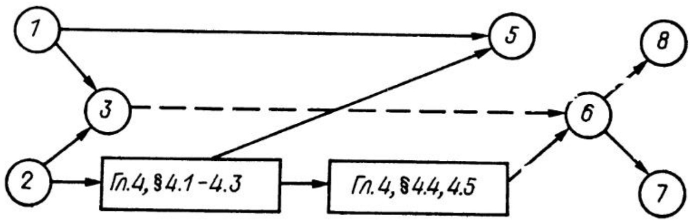
* См. Лазарян В. А., Длугач Л. А., Коротенко М. Л. [41], Чанг, Гарг, Гудспид и др. [79], Гаривалтис, Гарг, Дсоуза [82].

В Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта и Институте технической механики АН УССР работы по декомпозиции начаты в 60-е годы по инициативе В. А. Лазаряна. Направление исследований в основном продиктовано необходимостью работы с несимметрическими матрицами коэффициентов, обусловленными учетом существенно неконсервативных сил.

Вопросы авторства и приоритета в основном тексте книги не обсуждаются и вынесены в библиографический комментарий.

Поскольку книга предназначена для различных категорий читателей, она содержит много справочных данных, необходимых инженеру, и сравнительно сложные доказательства, представляющие интерес в первую очередь для математика.

Зависимость глав следующая:



Первая глава вводит читателя в круг рассматриваемых вопросов. В ней сообщается о простейших методах декомпозиции и демонстрируется их применение на системах дифференциальных и алгебраических уравнений.

Во второй главе приведены необходимые для последующих глав сведения по линейной алгебре. Изложение базируется не на теории определителей, а на методе Гаусса как одном из методов, пригодных для практических вычислений. Кратко рассмотрен вопрос о приведении матрицы к ее жордановой форме.

В третьей главе изложены алгоритмы и программы для ЭВМ, позволяющие преодолеть вычислительные трудности, возникающие при использовании методов декомпозиции для больших систем уравнений. В частности, приведен алгоритм нахождения множества всех матриц, коммутирующих с несколькими данными, путем решения системы разреженных линейных однородных алгебраических уравнений. Все распространенные библиотеки стандартных программ для ЭВМ содержат программы нахождения решения в случаях, когда система уравнений имеет не более одного решения, но нет программ для систем уравнений с бесконечным множеством решений. Поэтому разработанный алгоритм нахождения общего решения системы уравнений представляет самостоятельный интерес и может быть применен в других вычислительных методах линейной алгебры. Здесь также приведены результаты расчетов для ряда прикладных задач.

В четвертой главе кратко изложены некоторые разделы общей алгебры, нужные для изучения методов декомпозиции. Это, в первую очередь, теория представлений конечных групп, необходимая для декомпозиции с учетом симметрии расчетной схемы, и теория конечномерных алгебр, необходимая для декомпозиции уравнений с произвольными (в том числе несимметрическими) матрицами коэффициентов.

В пятой главе рассмотрены вопросы применения методов теории групп для выбора обобщенных координат, соответствующих симметрии сложной механической системы. Показано, как существенно неконсервативные силы сужают группу симметрии, которую допускают консервативные силы. Приведены результаты расчетов для конкретных механических систем, в том числе для железнодорожных экипажей.

В шестой главе рассмотрено приведение нескольких матриц коэффициентов к блочно-диагональному виду путем умножения их слева и справа на неособенные матрицы. Такое преобразование может дать больше блоков на главной диагонали, чем преобразования подобия. Ставится задача о получении максимального количества блоков. Показано, как свести эту задачу к задаче о нахождении преобразования подобия. Описаны различные способы приведения данных матриц к нескольким блокам. Доказано, что последовательность таких приведений позволяет получить максимально возможное количество независимых подсистем минимального порядка. Доказана единственность (в определенном смысле) такого расщепления. На первом этапе решения рассматриваемой задачи используется информация о симметрии расчетной схемы данной физической системы с помощью методов теории групп.

В седьмой главе изложен один из способов дальнейшего упрощения системы уравнений — приведение нескольких матриц коэффициентов к блочно-треугольному виду одним преобразованием. Подсистемы уравнений, соответствующие блокам матриц, стоящим на главной диагонали, позволяют исследовать устойчивость решений исходной системы уравнений. Такой способ упрощения называют агрегированием или вертикальной декомпозицией. После применения методов, изложенных в предыдущей главе, агрегирование может дать дополнительное упрощение только в случае несимметрических матриц коэффициентов.

В восьмой главе рассмотрены различные типы уравнений движения систем автоматического управления. Это, как правило, уравнения с прямоугольными матрицами коэффициентов. Установлено соответствие между задачами приведения рассматриваемых уравнений к подсистемам меньших размерностей и приведения нескольких квадратных матриц к блочно-диагональному виду преобразованием подобия. Это соответствие позволяет распространить на данные системы уравнений вычислительные методы и теоретические результаты, полученные в предыдущих главах.

Для практического применения рекомендуется следующая последовательность применения изложенных методов:

применение методов теории групп, использующих информацию о симметрии расчетной схемы;

приведение к максимально возможному в допустимом классе преобразований количеству независимых подсистем (применение способа «коммутирующей матрицы»);

проверка: не является ли рассматриваемая система близкой к расщепляемой;

приведение матриц коэффициентов к блочно-треугольному виду.

В книге конец доказательства или его отсутствие обозначаются знаком ◀.

Автор выражает благодарность А. А. Мартынюку, М. Л. Коротенко, А. К. Лопатину, А. Л. Зарубинской, О. М. Марковой, Л. М. Коротенко за ценные замечания, позволившие улучшить качество книги.

Автор будет благодарен читателям, которые сообщат о возможных недостатках книги.

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

R	— множество вещественных чисел
C	— множество комплексных чисел
R^n	— множество n-мерных вещественных векторов-столбцов
C^n	— множество n-мерных комплексных векторов-столбцов
$\in$	— «принадлежит»
$\subset$	— является подмножеством
$\Rightarrow$	— влечет (запись $A \Rightarrow B$ означает, что из утверждения A вытекает утверждение B)
$\exists$	— «существуют»
$\forall$	— «при каждом»
т	— знак транспонирования матрицы
$\mathrm{diag}\, a_j$	— диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят числа a_j
$\mathrm{diag}\, A_j$	— блочно-диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят блоки A_j
$v(A)$	— матрица, столбцами которой являются векторы канонического базиса (собственные и присоединенные векторы) матрицы A
$\mathrm{Gr}(A)$	— жорданова форма матрицы A
λ_j	— собственные числа матрицы
$\Lambda(B_j)$	— множество всех матриц, коммутирующих с матрицами B_j
E_m	— единичная матрица порядка m
g_j	— преобразования симметрии
$\mathrm{T}(\mathbf{g}_j)$	— матрицы представления группы симметрии
$\mathbf{q}$	— вектор исходных обобщенных координат
$\mathbf{x}, \mathbf{y}$	— векторы новых обобщенных координат
$\mathbf{u}$	— вектор фазовых координат
S	— матрица преобразования переменных (иногда этой же буквой обозначается и само преобразование)
$j = \overline{1, n}$	— j принимает значения от 1 до n

Глава 1

ПРОСТЕЙШИЕ СПОСОБЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

При составлении уравнений для исследования какой-либо физической системы, как правило, используют симметрию или другие особенности этой системы, для того чтобы уменьшить порядок получающихся систем уравнений. Часто это делают на интуитивном уровне. В то же время существуют специальные методы учета симметрии расчетной схемы. Существуют также методы, не связанные непосредственно с информацией о симметрии расчетной схемы. В данной главе изложены те из методов и приемов, для изучения которых не требуется большого объема дополнительных сведений.

§ 1.1. Использование особенностей расчетной схемы

В теории колебаний и строительной механике накоплен определенный опыт выбора неизвестных таким образом, чтобы получить уравнения, разделенные на подсистемы. Это в некоторых случаях выделение уравнений, описывающих движение центра масс системы, или отделение одних от других уравнений, описывающих симметричные и кососимметричные относительно некоторых осей, центров или плоскостей формы колебаний. При расчете статически неопределимых систем часто используют такие основные системы, при которых появляются ортогональные друг другу симметричные и кососимметричные эпюры. Найти удачный вариант выбора неизвестных или преобразования неизвестных нередко помогают умело составленные расчетные схемы и преобразования расчетных схем в соответствии с отделением некоторых видов колебаний.

Понятно, что в общем случае найти «наилучшие» варианты выбора неизвестных, используя лишь простейшие приемы, невозможно. Но эти приемы надо всегда иметь «на вооружении». Рассмотрим их применение на следующих примерах.

Пример 1.1. Рассмотрим колебательную систему (рис. 1.1), состоящую из двух тел, имеющих возможность перемещаться вдоль оси Ox. Тела соединены пружиной.

Составим уравнения движения этой системы. Кинетическая T и потенциальная Π энергии имеют соответственно следующие выражения:

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2), \quad \Pi = \frac{k}{2}(q_1 - q_2)^2,$$

где q_1 и q_2 — перемещения первого и второго тела; m_1 и m_2 — массы тел; k — жесткость пружины. На основании уравнений Лагранжа II рода получаем

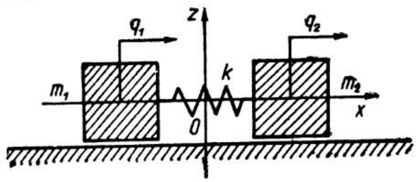


Рис. 1.1

$$m_1\ddot{q}_1 + kq_1 - kq_2 = 0;$$
$$m_2\ddot{q}_2 - kq_1 + kq_2 = 0. \tag{1.1.1}$$

Очевидно, что движение системы будет состоять из движения центра масс и колебаний тел относительно этого центра. При $m_1 = m_2 = m$ таким движениям соответствуют обобщенные координаты $x_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$; $x_2 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$.

Действительно, при этих обобщенных координатах получаем два отдельных уравнения:

$$m\ddot{x}_1 = 0; \quad m\ddot{x}_2 + 2kx_2 = 0.$$

Этот пример иллюстрирует прием отделения уравнения, описывающего движение центра масс системы. Такой результат можно получить не только из интуитивных соображений, а, например, приведением уравнений (1.1.1) к главным координатам (см. § 2.4). Ниже будут показаны и другие формальные способы расщепления уравнений (1.1.1).

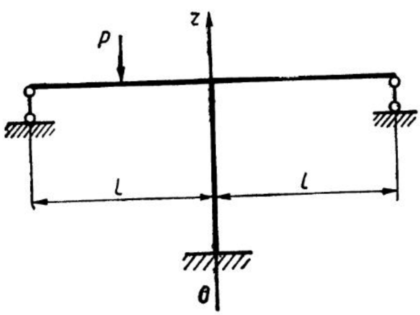


Рис. 1.2

Пример 1.2. Рассмотрим статически неопределимую раму, нагруженную силой P (рис. 1.2).

При расчете такой рамы по методу сил составляются и решаются алгебраические уравнения [59]:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

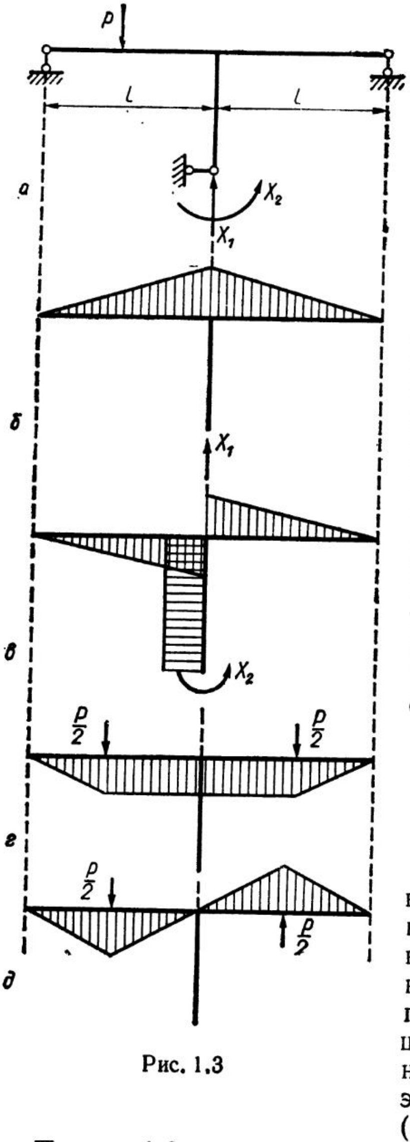


Рис. 1.3

где X_i — неизвестные обобщенные силы; δ_{ij} — коэффициенты влияния; Δ_{iP} — величины прогибов по направлению неизвестной силы X_i от силы P ($i, j = 1, 2$). В таких задачах неизвестные X_i стараются выбрать так, чтобы при $i \neq j$ как можно больше величин δ_{ij} равнялось нулю. В рассматриваемом примере это получается при выборе неизвестных так, как указано на рис. 1.3, *а*. Верхнюю часть эпюры изгибающих моментов, соответствующую X_1 (рис. 1. 3, *б*), в строительной механике принято называть *симметричной*, а X_2 (рис. 1.3, *в*) — *кососимметричной*. Уравнения (1.1.2) вследствие свойства взаимной ортогональности симметричной и кососимметричной эпюры [59, с. 191] приобретают вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Для того чтобы упростить вычисление величин Δ_{iP}, удобно внешнюю силу P представить в виде суммы симметричной и кососимметричной нагрузок, т. е. нагрузок, имеющих соответственно симметричную и кососимметричную эпюру изгибающих моментов (рис. 1.3, *г*, *д*).

Пример 1.2 — это один из простейших примеров, где выделены симметричные и кососимметричные эпюры изгибающих моментов (и, соответственно, линии изогнутых осей стержней). При исследовании колебаний конструкций выделяют симметричные и кососимметричные формы колебаний (пример 1.4, рассмотренный далее).

Пример 1.3. Рассмотрим малые колебания механической системы, изображенной на рис. 1.4. Стержень BC — невесомый, абсолютно жесткий.

Связанные уравнения получаются, если в качестве обобщенных координат выбрать вертикальное перемещение z точки A и угол поворота θ звена BC. Действительно, соста-

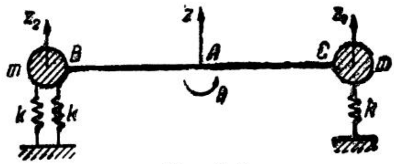


Рис. 1.4

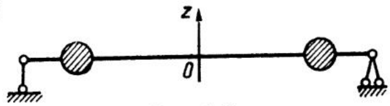


Рис. 1.5

вим выражения кинетической и потенциальной энергий, затем уравнения движения системы:

$$T = \frac{1}{2}(m\dot{z}_2^2 + m\dot{z}_1^2) = \frac{m}{2}((\dot{z} - \dot{\theta}l)^2 + (\dot{z} + \dot{\theta}l)^2) =$$

$$= \frac{m}{2}(2\dot{z}^2 + 2l^2\dot{\theta}^2);$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(2kz_2^2 + kz_1^2) = \frac{k}{2}(2(z - \theta l)^2 + (z + \theta l)^2) =$$

$$= \frac{k}{2}(3z^2 + 3l^2\theta^2 - 2l\theta z);$$

$$\begin{cases} 2m\ddot{z} + 3kz - kl\theta = 0; \\ 2ml^2\ddot{\theta} + 3kl^2\theta - klz = 0. \end{cases}$$

Здесь m — масса каждого из грузов; $2l$ — длина стержня; k — жесткость каждой из пружин.

Эта же система при обобщенных координатах z_1 и z_2 распадается на два независимых уравнения:

$$m\ddot{z}_1 + kz_1 = 0; \quad m\ddot{z}_2 + 2kz_2 = 0.$$

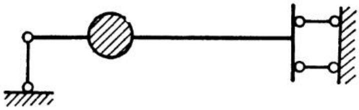
Новые и старые обобщенные координаты взаимосвязаны:

$$\begin{cases} z_1 = z + l\theta; \\ z_2 = z - l\theta. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

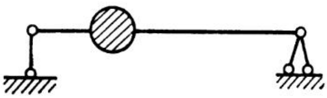
Система, рассмотренная в примере 1.3, не имеет геометрической симметрии. Здесь нахождению удачных обобщенных координат способствует то, что при малых колебаниях системы левая и правая массы движутся независимо друг от друга.

Пример 1.4. Пусть рассматриваются изгибные колебания балки с двумя симметрично расположенными грузами (рис. 1.5). Понятно, что колебания этой системы можно разложить на симметричные и кососимметричные. Для их исследования достаточно выбрать левую половину балки с двумя вариантами закрепления.

Действительно, при симметричных колебаниях точка O может смещаться вверх и вниз, но угол поворота в ней всегда равен нулю. Поэтому при симметричных колебаниях в точке O можно установить опору, препятствующую повороту (рис. 1.6, *а*), и рассмотреть только левую половину балки, поскольку смещения правой половины будут симметричны смещениям левой относительно оси Oz.



а



б

Рис. 1.6

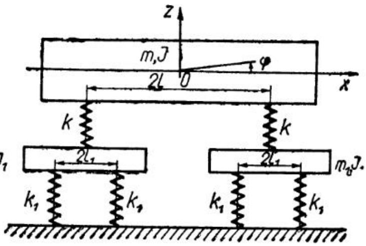


Рис. 1.7

При кососимметричных колебаниях балки точка O неподвижна, а смещения правой половины балки симметричны смещениям левой относительно центра — точки O (рис. 1.6, *б*).

В примерах 1.1—1.4 применены простейшие приемы расщепления. Наблюдаются случаи, когда аналогичные приемы целесообразно применить к данной задаче несколько раз подряд. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.5. Выбор обобщенных координат для исследования собственных колебаний пассажирского вагона в вертикальной плоскости [38, с. 99] при отсутствии перемещений вдоль продольной оси (рис. 1.7).

Рассмотрим сначала колебания первой тележки при неподвижных остальных телах (рис. 1.8). Для того чтобы получить два отдельных уравнения, в качестве обобщенных координат можно выбрать вертикальное перемещение центра масс тележки z_1 и угол поворота тележки φ_1 вокруг поперечной горизонтальной оси. В этом случае $T = \frac{1}{2}(m_1\dot z_1^2 + J_1\dot\varphi_1^2)$; $\Pi = \frac{k_1}{2}((z_1 + l_1\varphi_1)^2 + (z_1 - l_1\varphi_1)^2) + \frac{k}{2} z_1^2 = \frac{k_1}{2}(2z_1^2 + 2l_1^2\varphi_1^2) + \frac{k}{2} z_1^2$, и тогда уравнения имеют вид $m_1\ddot z_1 + (2k_1 + k) z_1 = 0$; $J_1\ddot\varphi_1 + 2k_1 l_1\varphi_1 = 0$. Первое уравнение соответствует колебаниям груза массой m_1 на пружине жесткостью $2k_1 + k$ (рис. 1.8, *б*). Второе уравнение соответствует колебаниям вращения тела с моментом инерции J_1, укрепленного так, что вращениям препятствует пружина упругостью $2k_1l_1^2$ (рис. 1.8, *в*).

Выберем следующие обобщенные координаты вагона: смещение z и угол поворота φ кузова; смещения z_1, z_2 и углы поворота φ_1, φ_2 тележек. При таком выборе обобщенных

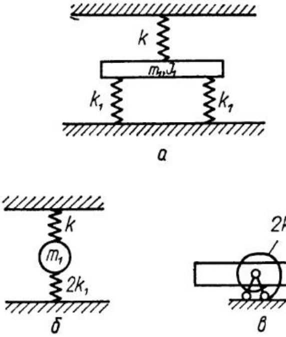


Рис. 1.8

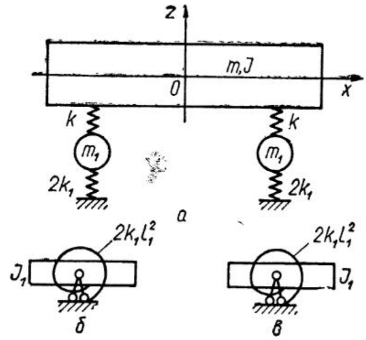


Рис. 1.9

координат уже учитывается симметрия тележек относительно своих вертикальных поперечных плоскостей симметрии. Поэтому уравнения разделяются на три подсистемы, а именно: два отдельных уравнения, в которые входят координаты φ_1, φ_2, и система из четырех уравнений. Можно составить расчетные схемы, соответствующие полученным подсистемам (рис. 1.9, *а—в*).

На рис. 1.9, *а* представлена схема, симметричная относительно оси Oz. Сделаем замену переменных $q_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$; $q_4 = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)$, после чего система четырех уравнений разделится на две части. Первая подсистема описывает смещение кузова и одновременно смещения двух тележек в одну сторону, вторая — повороты кузова и одновременные смещения обеих тележек в противоположные стороны. В этом случае тоже можно составить расчетные схемы, соответствующие полученным подсистемам (рис. 1.10).

Существуют системы, симметричные относи-

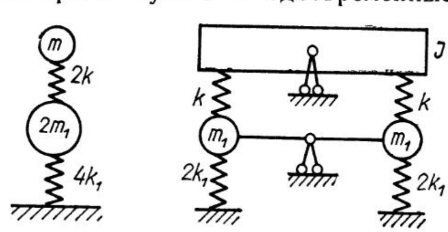


Рис. 1.10

тельно нескольких плоскостей или осей одновременно. В таких случаях многократное последовательное применение простейших методов расщепления может привести к громоздким выкладкам. Такие вычисления требуют сравнительно высокой квалификации исследователя. Поэтому целесообразно использовать теорию представлений конечных групп (гл. 5) для того, чтобы формализовать процесс выбора новых обобщенных координат с учетом симметрии расчетной схемы.

§ 1.2. Матричные обозначения

Цель данного параграфа — напомнить читателю основные определения теории матриц.

Матрицей размера $m \times n$ (или $m \times n$-матрицей) называется прямоугольная таблица элементов

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \; \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \; \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \{a_{ij}\}, \quad i = \overline{1, m}; \; j = \overline{1, n}.$$

Если $m = n$, то матрица называется *квадратной* порядка n. Матрица, состоящая из одного столбца ($n = 1$), называется n-мерным *вектор-столбцом*. Там, где это не приводит к разночтениям, такую матрицу будем называть просто *вектором*.

Матрица называется *нулевой* и обозначается 0, если все ее элементы нули. Квадратная матрица называется *единичной* и обозначается E, если все ее диагональные элементы равны единице, а все остальные равны нулю.

Главной диагональю квадратной матрицы называется множество следующих ее элементов: a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}. Квадратная матрица называется *симметрической*, если $a_{ij} = a_{ji}$, $i, \; j = \overline{1, n}$. Квадратная матрица называется *диагональной* и обозначается $\operatorname{diag} a_i$, если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю.

Часто матрицу разбивают при помощи горизонтальных и вертикальных линий на части, которые также являются матрицами. Такие подматрицы называют *блоками*, а всю матрицу — *блочной*. Если блочная матрица имеет вид, аналогичный диагональной, то ее называют *блочно-диагональной*. Например:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \operatorname{diag} A_i.$$

Блоки, стоящие на главной диагонали такой матрицы, называют *диагональными*.

Забегая вперед, отметим, что задача расщепления систем уравнений заключается в приведении ее матриц коэффициентов к блочно-диагональному виду.

Рассмотрим операции над матрицами.

Произведением матрицы $A = \{a_{ij}\}$ *на число* α называется матрица αA, полученная путем умножения всех элементов A на число α:

$$\alpha A = \alpha \{a_{ij}\} = \{\alpha a_{ij}\}.$$

Суммой матриц $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ одинакового размера называется матрица, полученная поэлементным сложением матриц:

$$A + B = \{a_{ij}\} + \{b_{ij}\} = \{a_{ij} + b_{ij}\}.$$

Для $m_1 \times n_1$-матрицы A и $m_2 \times n_2$-матрицы B в случае, когда $n_1 = m_2$, определено *произведение* $C = AB$ по формуле

$$C = \{c_{ij}\} = \left\{\sum_{k=1}^{n_1} a_{ik}b_{kj}\right\}, \quad i = \overline{1, m_1};\ j = \overline{1, n_2}.$$

Матрицы A и B одинаковых размеров называются равными ($A = B$), если попарно равны все их элементы: $a_{ij} = b_{ij}$.

О законе коммутативности для произведения матриц можно говорить лишь в случае, когда оба произведения AB и BA определены и полученные матрицы сопоставимы, т. е. когда $m_1 = m_2 = n_1 = n_2$. Этот закон может не выполняться. Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если для данных квадратных матриц A и B выполняется равенство $AB = BA$, то эти матрицы называются *коммутирующими,* или *перестановочными.*

Для сложения матриц коммутативный закон справедлив, справедливы также ассоциативные законы для сложения и умножения матриц. Кроме того, умножение дистрибутивно по сложению: $(A + B)\,C = AC + BC$; $C\,(A + B) = CA + CB$.

Матрицей, *транспонированной* по отношению к матрице $A = \{a_{ij}\}$, называется матрица $A^{\mathrm{T}} = \{a_{ji}\}$.

Если для данной квадратной матрицы A существует такая матрица A^{-1}, что $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, то матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к A. Матрица A в этом случае называется *неособенной.* В противном случае квадратная матрица называется *особенной.*

Отметим следующие соотношения:

$$(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}};\ (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}};\ (A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1};$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};\ E^{\mathrm{T}} = E^{-1} = E.$$

Матрица A^* называется эрмитово сопряженной с матрицей A, если $A^* = (\bar{A})^{\mathrm{T}}$. Здесь черточка означает комплексное сопряжение.

Определителем $\det A$ матрицы A второго порядка называется число $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Определитель обозначают и так: $|A|$. Определитель матрицы произвольного порядка будет рассмотрен в гл. 2. Пока ограничимся следующим замечанием. Если матрица имеет блочно-диагональный вид, причем на главной диагонали стоят квадратные подматрицы, то определитель всей матрицы равен произведению определителей этих подматриц.

Если существуют ненулевой вектор $\mathbf{a}$ и число λ, такие, что выполняется равенство

$$A\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}, \tag{1.2.1}$$

то число λ называется собственным числом, а вектор $\mathbf{a}$ — собственным вектором матрицы A. Собственное число удовлетворяет уравнению $|A - \lambda E| = 0$.

В качестве примера использования матричных обозначений рассмотрим матричную запись уравнений (1.1.1):

$$A\ddot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = \mathbf{0}, \tag{1.2.2}$$

где $A = \operatorname{diag}(m_1,\ m_2)$; $C = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$; $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$.

§ 1.3. Свойства матриц коэффициентов симметричной системы

Механические системы, изображенные на рис. 1.1 и 1.2, симметричны относительно оси Oz. Это означает, что если исходную механическую систему отразить относительно оси Oz, то новая система будет совпадать с исходной. Если система обладает какой-либо другой симметрией, то это означает, что после некоторого (нетривиального) преобразования новая система совпадает с исходной. В таких случаях будем говорить, что система *инвариантна* относительно такого преобразования симметрии. Далее отмечается, что для расщепления важны свойства симметрии самой системы, а не действующей на нее нагрузки.

Пусть в уравнениях, составленных для исследования некоторой симметричной системы, неизвестными являются величины $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Преобразование этих величин в матричном виде можно записать так:

$$\mathbf{y} = W\mathbf{q}, \tag{1.3.1}$$

где $\mathbf{q} = (q_1 q_2 \ldots q_n)^{\mathrm{T}}$; W — матрица преобразования; $\mathbf{y} = (y_1 y_2 \ldots y_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор новых неизвестных. Матрицу W будем называть матрицей преобразования симметрии. В примере 1.1 исходные обобщенные координаты при отражении относительно оси Oz преобразуются так: $y_1 = -q_2$; $y_2 = -q_1$, или в матричной записи

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}. \tag{1.3.2}$$

Поэтому $W = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Рассмотрим следующие уравнения движения механической системы:

$$\ddot{\mathbf{q}} + B_2\dot{\mathbf{q}} + B_3\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t), \tag{1.3.3}$$

где B_2 и B_3 — $n \times n$-матрицы коэффициентов; $\mathbf{q}$ — вектор обобщенных координат; $\mathbf{Q}(t)$ — вектор функций времени, характеризующий действие внешних сил. К такому виду приводятся, в частности, уравнения (1.2.2). В этом случае $B_2 = 0$; $B_3 = A^{-1}C$. Пусть расчетная схема, соответствующая этим уравнениям, симметрична. Тогда из формулы (1.3.1) получаем выражение $\mathbf{q} = W^{-1}\mathbf{y}$. Подставляя его в (1.3.3) и умножая найденное равенство на матрицу W, имеем

$$\ddot{\mathbf{y}} + WB_2W^{-1}\dot{\mathbf{y}} + WB_3W^{-1}\mathbf{y} = W\mathbf{Q}(t). \tag{1.3.4}$$

Левая часть равенства (1.3.4) должна совпадать (с точностью до обозначений) с левой частью (1.3.3). Поэтому $WB_iW^{-1} = B_i$ при $i = 2, 3$. Отсюда $WB_i = B_iW$.

Итак, установлено, что матрицы коэффициентов уравнений (1.3.3) коммутируют с матрицей преобразования симметрии. Это свойство характерно и для ряда других систем уравнений, соответствующих физическим системам с симметричной расчетной схемой. Отметим, что при замене переменных в уравнениях (1.3.3) матрицы изменяются по формуле

$$\tilde{B}_i = S^{-1}B_iS. \tag{1.3.5}$$

(В данном случае $S = W^{-1}$.)

Преобразование (1.3.5) называется *преобразованием подобия* матриц B_i.

§ 1.4. Способ коммутирующей матрицы

Примем пока без доказательства следующее утверждение (см. гл. 2).

Теорема 1.1. *Пусть матрица Z коммутирует с матрицами B_i и имеет хотя бы два различных собственных числа. Тогда, если возможно составление неособенной матрицы S, столбцами которой являются собственные векторы матрицы Z, то преобразование подобия $\tilde{B}_i = S^{-1}B_iS$ приведет матрицы B_i к блочно-диагональному виду.*

Теорема 1.1 указывает пути нахождения преобразования подобия для матриц коэффициентов уравнений (1.3.3), или нахождение матрицы замены переменных. Необходимая для этого матрица Z, коммутирующая с матрицами коэффициентов, может быть найдена различными путями.

Вернемся к примеру 1. 1.

Найдем собственные числа и векторы матрицы преобразования симметрии (1.3.2):

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2-(-1)^2 = (\lambda+1)(\lambda-1) = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$. Представив собственный вектор $\mathbf{a}_1$ в виде $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и подставив в уравнения (1.2.1), получим

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0-y = x; \\ -x = y. \end{cases}$$

Тогда $x = \alpha$, $y = \alpha$, где α — произвольное число. Поэтому $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Аналогичными преобразованиями находим $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Таким образом, $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Это соответствует замене координат

$$\begin{cases} q_1 = x_1 + x_2; \\ q_2 = x_1 - x_2. \end{cases}$$

Обратное преобразование совпадает с найденным в примере 1.1.

Когда матрицы преобразований симметрии не известны, можно попытаться найти коммутирующую матрицу Z как решение уравнений

$$B_iZ = ZB_i, \quad i = 2,\ 3. \tag{1.4.1}$$

В этом случае надо составить систему линейных однородных алгебраических уравнений, неизвестными в которой будут элементы матрицы Z.

Матрица B_3, соответствующая примеру 1.3, имеет вид

$$B_3 = \frac{k}{2lm}\begin{bmatrix} 3l & -l^2 \\ -1 & 3l \end{bmatrix}.$$

Поскольку матрицу Z мы находим с точностью до постоянного множителя, далее множитель $\frac{k}{2lm}$ не учитываем. Неизвестную матрицу Z представим в виде $Z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Из уравнений (1.4.1) получаем матричное равенство

$$\left[\begin{array}{c|c} 3la - l^2c & 3lb - l^2d \\ \hline -a + 3lc & -b + 3ld \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 3la - b & -al^2 + 3lb \\ \hline 3lc - d & -l^2c + 3ld \end{array}\right],$$

соответствующее системе из четырех уравнений. Отбросив повторяющиеся уравнения, найдем $d = a$, $b = l^2c$. Тогда

$$Z = \begin{bmatrix} a & l^2c \\ c & a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & l^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Положив $a = 0$, $c = 1$, получим $Z = \begin{bmatrix} 0 & l^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Такая матрица имеет различные собственные числа. Действительно,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & l^2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - l^2 = (\lambda + l)(\lambda - l) = 0.$$

Составляя матрицу S так же, как в предыдущем примере, получаем

$$S = \begin{bmatrix} l & -l \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Такая матрица соответствует следующим преобразованиям обобщенных координат:

$$\begin{cases} z = l(y_1 - y_2); & y_1 = \frac{1}{2l}(z + l\theta); \\ \theta = y_1 + y_2; & y_2 = -\frac{1}{2l}(z - l\theta). \end{cases}$$

Последние формулы с точностью до постоянных множителей совпадают с формулами (1.1.3).

Пример 1.6. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 3q_1 + 2q_2 - q_3 = 0, \\ \ddot{q}_2 + 32q_1 + 3q_2 + 4q_3 = 0, \\ \ddot{q}_3 + 5\dot{q}_3 + 8q_1 - 2q_2 + 5q_3 = 0. \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Матрицы коэффициентов данной системы имеют вид:

$$B_1 = E,\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},\quad B_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 32 & 3 & 4 \\ 8 & -2 & 5 \end{bmatrix}. \quad (1.4.3)$$

Для матриц B_2 и B_3 определена коммутирующая матрица Z. При решении системы (1.4.1) были получены следующие равенства для нахождения элементов z_{ij} матрицы Z:

$$z_{12} = \frac{1}{16} z_{21};\ z_{22} = z_{11};\ z_{33} = z_{11} - \frac{1}{4} z_{21};\ z_{13} = z_{23} =$$

$$= z_{31} = z_{32} = 0.$$

При значениях свободных неизвестных: $z_{11} = 0{,}25$, $z_{21} = 1$ — имеем

$$Z = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}0625 & 0 \\ 1 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные числа матрицы Z таковы: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 0{,}5$. Далее получены собственные векторы матрицы Z и построена матрица преобразования

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Преобразованием координат $\mathbf{q} = S\mathbf{y}$ исходная система приводится к двум подсистемам:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 5\dot{y}_1 + 5y_1 - 4y_2 = 0, \\ \ddot{y}_2 + 4y_1 - 5y_2 = 0; \end{cases}$$

$$\{\ddot{y}_3 + 11y_3 = 0.$$

Этот пример будет использован далее для отработки различных алгоритмов расчета.

Вычислительные алгоритмы решения уравнений (1.4.1) в случае матриц B_i высокого порядка изложены в гл. 3. Теоретические аспекты такого способа и приемы его распространения на различные классы задач рассмотрены в гл. 6.

Глава 2

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

В этой главе приведены сведения, необходимые для дальнейшего изложения. Более подробно это описано в [32, 29] и в ставшей уже классической монографии Ф. Р. Гантмахера [20]. Некоторые дополнительные сведения по линейной алгебре приводятся и в других главах по ходу изложения.

В связи с вопросом о приведении матриц к канонической форме рассмотрена задача теории колебаний о приведении уравнений к главным (нормальным) координатам. При этом, кроме главных координат консервативной колебательной системы, изложен вопрос о приведении уравнений движения неконсервативных систем к главным фазовым координатам

§ 2.1. Линейная зависимость

Принято обозначать R и C — множества всех вещественных и комплексных чисел. Множество всех n-мерных вектор-столбцов $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = (a_1 \quad a_2 \ \ldots \ a_n)^{\mathrm{T}}$ с элементами из R (вещественных векторов) обозначается через R^n и называется *арифметическим линейным пространством* размерности n над R. Аналогично вводится и обозначение C^n. Операции сложения таких векторов и умножения их на числа совпадают с обычными матричными операциями.

В данном параграфе изложены некоторые свойства векторов, принадлежащих R^n. Аналогичные определения и утверждения имеют место и для векторов, принадлежащих C^n.

Будем называть $V \subset R^n$ (линейным) *подпространством* в R^n, если $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \Rightarrow \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \in V$ для любых $\alpha, \beta \in R$.

Общие определения линейного пространства и подпространства будут даны в гл. 4.

Вектор $\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbf{b}_k$, где α_k — некоторые числа, называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$. Например, вектор $\mathbf{a} = [2\,3\,0]^{\text{т}}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{b}_1 = [1\;0\;0]^{\text{т}}$ и $\mathbf{b}_2 = [0\;1\;0]^{\text{т}}$, а вектор $\mathbf{d} = [0\;0\;1]^{\text{т}}$ не является линейной комбинацией этих векторов. Множество V всех линейных комбинаций векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ называется *линейной оболочкой* этих векторов и обозначается $V = L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m) = L(\mathbf{b}_i)$. Линейная оболочка векторов $\mathbf{b}_i \in R^n$, $i = \overline{1, m}$, является подпространством в R^n. Его называют *подпространством, натянутым на векторы* $\mathbf{b}_i$.

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа α_i, не все равные нулю, при которых выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}. \qquad (2.1.1)$$

Когда из равенства (2.1.1) вытекает, что все $\alpha_i = 0$, векторы $\mathbf{a}_i$ называются *линейно независимыми*. Если векторы линейно зависимы, то хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных. И наоборот, если один из векторов $\mathbf{a}_i$ линейно зависит от остальных, то вся совокупность векторов линейно зависима. Нулевой вектор линейно зависит от любых векторов.

Пусть V — подпространство. Система векторов $\mathbf{a}_i \in V$, $i = \overline{1, m}$, называется *базисом* V, если она линейно независима и любой вектор $\mathbf{b} \in V$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_i$, т. е. $L(\mathbf{a}_i) = V$.

Любой базис данного подпространства состоит из одного и того же числа $m \leqslant n$ векторов. Это число называют *размерностью* подпространства V и обозначается $m = \dim V$. Все пространство R^n имеет базис, состоящий из *единичных векторов*

$$\mathbf{e}_1 = [1\quad 0\quad 0\ \ldots\ 0]^{\text{т}},\quad \mathbf{e}_2 = [0\quad 1\quad 0\ \ldots\ 0]^{\text{т}}, \ldots,$$

$$\mathbf{e}_n = [0\quad 0\quad 0\ \ldots\ 1]^{\text{т}}.$$

Поэтому $\dim R^n = n$.

Отметим, что число линейно независимых векторов-столбцов матрицы равно числу линейно независимых векторов-строк. Это число называется *рангом* матрицы.

Скалярным произведением векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$ называется число $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in R$, определяемое по следующей формуле:

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \mathbf{b}^{\text{т}}\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Имеют место следующие свойства:

а) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})$, где $\alpha \in R$;

б) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$;

в) $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Это свойство векторов обозначают также $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Ортогональные ненулевые векторы линейно независимы.

Для комплексных векторов скалярным произведением называется комплексное число, определяемое по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{b}^*\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{n} a_k\bar{b}_k.$$

В этом случае приведенные выше свойства скалярного произведения сохраняются за исключением свойства «б», которое заменяется на следующее: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \overline{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}$.

§ 2.2. Метод Гаусса

Метод исключения неизвестных, или метод Гаусса, называется также алгоритмом Гаусса, схемой Гаусса. Этот метод вычислений аналогичен применяемому в средней школе способу решения системы из двух уравнений с двумя неизвестными.

Метод Гаусса применяется для решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

В матричной форме эта система имеет вид $Ax = b$. Используется тот факт, что решение системы не изменяется при выполнении любой из следующих операций:

а) перестановка двух уравнений местами;

б) умножение одного из уравнений на число, не равное нулю;

в) вычитание одного уравнения, умноженного на некоторое число, из другого.

Если $a_{11} = 0$, поменяем местами первое уравнение с таким j-м уравнением, что $a_{j1} \neq 0$. Теперь коэффициент в первом уравнении при первой неизвестной отличен от нуля. Обозначим его через a'_{11} и будем называть *ведущим элементом* первого шага. Разделим первое уравнение на ведущий элемент. Затем вычтем его из k-го уравнения ($k = 2, 3, \ldots, n$) полученной системы, предварительно умножив на a'_{k1}. После таких преобразований первый столбец коэффициентов уравнений будет состоять из единицы на первом месте и нулей — на остальных местах.

Рассмотрим полученные уравнения с номерами 2, ..., n. Они образуют систему из $(n-1)$ уравнения с $(n-1)$ неизвестным. Проделаем с этой системой те же операции, что и с исходной (второй шаг метода Гаусса). Следующий шаг выполняем для последних $(n-2)$ уравнений и т. д. Если на каждом шаге удается выбрать ведущий элемент, то после ряда преобразований система уравнений приобретает треугольный вид:

$$\begin{aligned} x_1 + a''_{12}x_2 + a''_{13}x_3 + \cdots + a''_{1n}x_n &= b''_1; \\ x_2 + a''_{23}x_3 + \cdots + a''_{2n}x_n &= b''_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_n &= b''_n. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Таким образом, мы уже знаем значение неизвестного x_n из последнего уравнения. Остальные можно найти, последовательно подставляя значения x_n в предпоследнее уравнение, затем значения x_n и x_{n-1} в уравнение с номером $n-2$ и т. д.

Но лучше продолжить вычисления по следующей схеме (обратный ход метода Гаусса). Вычтем последнее уравнение системы (2.2.2), умноженное на a''_{kn}, из k-го уравнения ($k = \overline{1, n-1}$). Затем аналогично исключим неизвестное x_{n-1} из первых $(n-2)$ уравнений.

После ряда преобразований система (2.2.2) будет приведена к виду $x_k = b'''_k$, $k = \overline{1, n}$.

Осталось рассмотреть случай, когда на очередном шаге не удается выбрать ведущий элемент. Это произойдет в том случае, когда на очередном r-м шаге все коэффициенты при неизвестном x_r в уравнениях r, $r+1$, ..., n окажутся равными нулю, что является следствием линейной зависимости строк исходной матрицы A. В этом случае можно условно считать ведущий элемент $a_{kk}^{(k)}$ нулевым и продолжить приведение уравнений к треугольному виду. Полученные уравнения будут отличаться от уравнений (2.2.2) тем, что в некоторых местах на диагонали будут стоять коэффициенты, равные нулю, а не единице. Более подробно уравнения, имеющие матрицу коэффициентов с линейно зависимыми строками, будут рассмотрены в следующей главе. Сейчас же отметим, что в этом случае уравнения (2.2.1) либо не имеют решений, либо имеют бесконечное множество решений.

Пример 2.1. Решим по методу Гаусса следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
1)&\quad 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15;\\
2)&\quad -2x_1 + x_2 + x_3 = 0;\\
3)&\quad 3x_1 - x_2 \qquad = 5.
\end{aligned}
\tag{2.2.3}
$$

Ход вычислений приведен в табл. 2.1. На графы I, II и III пока не обращаем внимания. Из последних трех строк таблицы видно, что $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

Таблица 2.1

Уравнение системы (2.2.3)	Коэффициент при неизвестных			b_i	I	II	III	Комментарий
	x_1	x_2	x_3					
1)	2	− 1	4	15	1	0	0	Исходная система уравнений
2)	− 2	1	1	0	0	1	0	
3)	3	− 1	0	5	0	0	1	
$1)' = 1)/2$	1	− 0,5	2	7,5	0,5	0	0	Первый шаг метода
$2)' = 2) - 1)' \cdot (-2)$		0	5	15	1	1	0	
$3)' = 3) - 1)' \cdot 3$		0,5	− 6	− 17,5	− 1,5	0	1	
$2)'' = 3)'$		0,5	− 6	− 17,5	− 1,5	0	1	Перестановка строк
$3)'' = 2)'$		0	5	15	1	1	0	
$2)''' = 2)''/0,5$		1	− 12	− 35	− 3	0	2	Второй шаг метода
$3)''' = 3)'' - 2)''' \cdot 0$			5	15	1	1	0	
$3)^{IV} = 3)'''/5$			1	3	0,2	0,2	0	Третий шаг метода
$1)^{V} = 1)^{I} - 3)^{IV} \cdot 2$	1	− 0,5		1,5	0,1	− 0,4	0	Начало обратного хода
$2)^{V} = 2)''' - 3)^{IV} \times (-12)$		1		1	− 0,6	2,4	2	
$1)^{VI} = 1)^{V} - 2)^{V} \cdot -(0,5)$	1			2	− 0,2	0,8	1	Окончание обратного хода
$2)^{VI} = 2)^{V}$		1		1	− 0,6	2,4	2	
$3)^{VI} = 3)^{V}$			1	3	0,2	0,2	0	

Введем понятие «определитель матрицы» следующим образом. Пусть A — квадратная матрица, $a_{kk}^{(k)}$ — ведущие элементы метода Гаусса при решении уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (они не зависят от вектора $\mathbf{b}$); s — количество перестановок строк, сделанных при выполнении вычислений по методу Гаусса. Произведение

$$(-1)^s \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)}$$

не зависит от того, какие из подходящих для этих целей строк переставлялись. Будем называть это произведение *определителем* квадратной матрицы A.

Матрица коэффициентов уравнений (2.2.3) следующая:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.2.4)$$

При решении уравнений сделана одна перестановка строк ($s = 1$). Ведущие элементы равны: 2; 0,5; 5. Поэтому определитель матрицы (2.2.4) равен $\det A = (-1)^1 \cdot 2 \cdot 0{,}5 \cdot 5 = -5$.

Для вычисления определителя матрицы третьего порядка удобней пользоваться формулой

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}. \qquad (2.2.5)$$

Отметим, для того чтобы система уравнений (2.2.1) с матрицей коэффициентов A имела ровно одно решение, необходимо и достаточно выполнение условия $\det A \neq 0$. Достаточность этого условия видна из приведенных выше рассуждений.

Метод Гаусса удобен еще и тем, что с его помощью можно одновременно решать несколько систем уравнений

$$A\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)}, \quad k = \overline{1, m},$$

имеющих одну и ту же матрицу коэффициентов A и различающихся лишь векторами правых частей. Это видно по тому, что в табл. 2.1 числа, стоящие в графе свободных членов b_i, не влияют на ход операций со строками таблицы. Поэтому в такую таблицу можно ввести несколько граф для свободных членов $b_i^{(k)}$ нескольких систем уравнений. Тогда после завершения расчетов получим в каждой из граф значения неизвестных соответствующих систем уравнений

Указанным свойством метода Гаусса можно воспользоваться для вычисления обратной матрицы. Запишем искомую обратную к A матрицу следующим образом: $A^{-1} = (\mathbf{x}^{(1)}\mathbf{x}^{(2)}\ldots\mathbf{x}^{(n)})$, где $\mathbf{x}^{(k)}$ — k-й столбец матрицы A^{-1}. Аналогично единичную матрицу представим как совокупность единичных вектор-столбцов: $E = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\ldots\mathbf{e}_n)$. Тогда равенство $AA^{-1} = E$ эквивалентно n системам уравнений

$$A\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{e}_k, \quad k = \overline{1, n}. \tag{2.2.6}$$

Все эти системы имеют одну и ту же матрицу коэффициентов A. Поэтому в табл. 2.1 метода Гаусса можно занести вместо одной графы правых частей уравнений все n единичных векторов. По окончании вычислений получим все векторы-столбцы $\mathbf{x}^{(k)}$, из которых и состоит обратная матрица.

Рассмотрим еще раз матрицу (2.2.4). Это матрица коэффициентов системы уравнений (2.2.3), решение которой приведено в табл. 2.1. Запишем в графы I, II, III табл. 2.1 рядом с исходной системой уравнений единичные векторы и рассмотрим одновременно с решением системы уравнений (2.2.3) решение систем (2.2.6), предназначенных для нахождения обратной матрицы. Порядок выбора ведущих элементов и выполнения шагов метода не изменяется. Только строки, с которыми производятся вычисления, становятся длинней. Полученная обратная матрица A^{-1} в таблице обведена штриховой линией. Убедиться в правильности вычислений можно, непосредственно перемножив матрицы A и A^{-1}.

Необходимое и достаточное условие неособенности (обратимости) матрицы A следующее: $\det A \neq 0$.

§ 2.3. Каноническая форма матриц

Число λ и ненулевой вектор $\mathbf{a}$ называются соответственно *собственным числом* и *собственным вектором* квадратной матрицы A, если справедливо равенство

$$A\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}. \tag{2.3.1}$$

Отметим, что собственный вектор (как это видно из уравнения (2.3.1)) определяется с точностью до произвольного множителя $\alpha \neq 0$, т. е. если $\mathbf{a}$ — собственный вектор матрицы A, то $\alpha\mathbf{a}$ — тоже собственный вектор этой матрицы. Уравнение для нахождения собственных чисел (*характеристическое* уравнение) следующее:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{2.3.2}$$

Множество всех собственных чисел матрицы называется ее *спектром*. Если матрица A действительная и симметрическая, то ее собственные числа и векторы действительные. В общем случае действительная матрица может иметь комплексные собственные числа и векторы.

Справедливы следующие утверждения:

а) матрица порядка n имеет ровно n собственных чисел (с учетом их кратности);

б) каждому собственному числу соответствует хотя бы один собственный вектор;

в) собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, линейно независимы, а если матрица вещественная и симметрическая, то они взаимно ортогональны;

г) собственному числу кратности m соответствует не более чем m линейно независимых собственных векторов;

д) симметрические матрицы, а также матрицы, не имеющие кратных собственных чисел, имеют набор из n линейно независимых собственных векторов, где n — порядок матрицы. Другими словами, для этих матриц существуют базисы пространства C^n, состоящие из собственных векторов.

Квадратная матрица называется *верхней треугольной*, если все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю. Условимся далее верхнюю треугольную матрицу называть *треугольной*. Собственными числами треугольной матрицы являются элементы ее главной диагонали.

Блочную матрицу, имеющую главную диагональ, будем называть *блочно-треугольной*, если все ее блоки ниже главной диагонали нулевые. Спектр блочно-треугольной матрицы равен объединению спектров диагональных блоков (если они являются квадратными матрицами).

В случае, когда матрица порядка n имеет ровно n линейно независимых собственных векторов, ее называют матрицей *простой структуры*. Еще говорят: «матрица *с диагональной жордановой формой*», «матрица *с простыми элементарными делителями*».

Пусть $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$ — линейно независимые векторы матрицы A. Составим из них матрицу S и рассмотрим преобразование подобия $\tilde{A} = S^{-1}AS$. Используя равенство (2.3.1) и правила умножения матриц, получаем

$$\tilde{A} = S^{-1}A(\mathbf{s}_1\ \mathbf{s}_2 \ldots \mathbf{s}_n) = S^{-1}(A\mathbf{s}_1\ A\mathbf{s}_2 \ldots A\mathbf{s}_n) =$$

$$= S^{-1}(\lambda_1\mathbf{s}_1\ \lambda_2\mathbf{s}_2\ \ldots\ \lambda_n\mathbf{s}_n) =$$

$$= S^{-1}(\mathbf{s}_1\ \mathbf{s}_2 \ldots \mathbf{s}_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\lambda_i.$$

Таким образом, матрицы простой структуры приводятся преобразованием подобия к диагональному виду, называемому их жордановым *каноническим видом (канонической формой)*.

В общем случае матрица порядка n с кратными собственными числами может иметь меньше, чем n, линейно независимых собственных векторов. Это видно из следующего примера.

Пример 2.2. Матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ имеет собственное число $\lambda_{1,2} = 0$ кратности два. Пусть $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ искомый собственный вектор. Для его нахождения составляем систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0; \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Найденный собственный вектор $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Любой другой собственный вектор пропорционален ему. Получаем, что матрица A второго порядка не имеет двух линейно независимых собственных векторов.

В случае, когда линейно независимых собственных векторов меньше, чем n, их дополняют до базиса пространства C^n присоединенными векторами, т. е. векторами, определяемыми с помощью уравнений

$$A\mathbf{b}_k^{(j)} = \lambda_k \mathbf{b}_k^{(j)} + \mathbf{b}_k^{(j-1)}, \quad j = \overline{1, m_k},$$

где $\mathbf{b}_k^{(0)}$ — один из линейно независимых собственных векторов.

Вернемся к примеру (2.2). Найдем присоединенный вектор $\mathbf{b}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$. Учитывая, что $\mathbf{b}_1^{(0)} = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, получаем систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v = 1; \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Найденный вектор $\mathbf{b}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix}$, где u — произвольное число. Полагаем $u = 0$, тогда $\mathbf{b}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Этот вектор и вектор $\mathbf{a}_1$ линейно независимы.

Для любой матрицы суммарное количество линейно независимых собственных и присоединенных векторов, соответствующих некоторому собственному числу, равно кратности этого числа. Весь набор таких векторов образует базис пространства C^n, называемый каноническим базисом матрицы. Составим матрицу S из собственных и присоединенных векторов:

$$S = [\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1^{(1)} \mathbf{b}_1^{(2)} \ \dots \ \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2^{(1)} \ \dots \ \mathbf{b}_m^{(n_m)}], \quad \sum_{k=1}^{m} n_k = n.$$

В этом случае преобразование подобия приведет матрицу A к следующему виду: $\tilde{A} = S^{-1}AS = \operatorname{diag} C_k$, где каждый блок G_k, соответствующий одному из линейно независимых векторов матрицы, имеет порядок n_k на единицу больший, чем число присоединенных векторов к данному собственному вектору, и представляет собой следующую матрицу:

$$G_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_k & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots \lambda_k \end{bmatrix}.$$

При $n_k = 1$ этот блок представляет собой число $G_k = \lambda_k$.

Указанная форма является жордановой канонической формой произвольной матрицы. Выше был указан частный случай этой формы для матриц простой структуры.

Если матрицу A можно получить из матрицы B преобразованием подобия, то эти матрицы называются *подобными*. Жордановы формы подобных матриц совпадают, т. е. у них не только одинаковый спектр, но и одинаковые наборы жордановых блоков.

§ 2.4. Главные координаты колебательной системы

Рассмотрим преобразование матрицы коэффициентов квадратичной формы при линейной замене ее аргументов.

Квадратичной формой называется следующая числовая функция действительных аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$K(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k x_j = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \cdots$$
$$\cdots + a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + \cdots + a_{nn} x_n^2,$$

где $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\mathrm{T}}$; A — симметрическая матрица (*матрица квадратичной формы*).

Квадратичная форма и ее матрица называются *положительно определенными*, если $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x} > 0 \ \forall \, \mathbf{x} \neq 0$.

Сделаем замену переменных $\mathbf{x} = W\mathbf{y}$, тогда

$$\tilde{K}(\mathbf{y}) = K(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\text{т}}A\mathbf{x} = (W\mathbf{y})^{\text{т}}AW\mathbf{y} = \mathbf{y}^{\text{т}}\hat{A}\mathbf{y},$$

где преобразованная матрица $\hat{A}$ имеет вид

$$\hat{A} = W^{\text{т}}AW.$$

Такое преобразование называется преобразованием *конгруэнтности*. Если матрица W *ортогональная* ($W^{\text{т}} = W^{-1}$), то преобразование конгруэнтности совпадает с преобразованием подобия. Симметрическая матрица имеет набор собственных векторов, из которых может быть составлена ортогональная матрица S. Это означает, что квадратичная форма может быть приведена к «диагональному» виду путем замены аргументов: $\mathbf{x}^{\text{т}}A\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$. При ручном счете часто оказывается удобным приведение квадратичной формы к диагональному виду путем выделения полных квадратов (пример 2.3).

Пример 2.3.

$$9x^2 + 12xy + 5y^2 = 9\left(x^2 + 2\cdot\frac{2}{3}xy + \left(\frac{2}{3}\right)^2 y^2\right) -$$

$$-9\cdot\frac{4}{9}y^2 + 5y^2 = 9\left(x + \frac{2}{3}y\right)^2 + y^2 = 9u^2 + v^2,$$

где $u = x + \frac{2}{3}y$; $v = y$.

Обратимся к часто рассматриваемой в теории колебаний системе уравнений

$$B_1\ddot{\mathbf{q}} + B_3\mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{q} \in R^n, \tag{2.4.1}$$

где B_1 и B_3 — симметрические вещественные матрицы, причем матрица B_1 положительно определенная.

Положительно определенная матрица имеет обратную. Умножая матричное уравнение (2.4.1) слева на матрицу B_1^{-1}, получаем систему уравнений в нормальной форме Коши:

$$\ddot{\mathbf{q}} + D\mathbf{q} = 0, \quad D = B_1^{-1}B_3. \tag{2.4.2}$$

Можно доказать, что такая матрица D имеет вещественные собственные числа и является матрицей простой структуры, т. е. имеет n линейно независимых собственных векторов $\mathbf{a}_k$.

Составим матрицу S из собственных векторов $\mathbf{a}_k$ и сделаем замену переменных

$$\mathbf{q} = S\mathbf{y} \tag{2.4.3}$$

в уравнениях (2.4.2). При этом матрица D заменяется на подобную ей: $\tilde{D} = S^{-1}DS$ (см. § 1.3). Преобразованная таким образом матрица D имеет диагональный вид $\tilde{D} = \operatorname{diag} \lambda_k$ (см. § 2.3). Следовательно, уравнения (2.4.2) приводятся к n отдельным уравнениям

$$\ddot{y}_k = \lambda_k y_k = 0, \quad k = \overline{1, n}. \tag{2.4.4}$$

Переменные y_k называются *главными* (*нормальными*) *координатами*. При $\lambda_k = \omega_k^2 > 0$ решения уравнений (2.4.4) имеют вид $y_k = C_k \sin(\omega_k t + \nu_k)$. Их называют *главными (нормальными) движениями* колебательной системы. Подставив эти решения в выражение (2.4.3), можно получить решение уравнений (2.4.1):

$$\mathbf{q} = S\mathbf{y} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \ldots \ \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} y_k \mathbf{a}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \sin(\omega_k t + \nu_k)\, \mathbf{a}_k.$$

С точки зрения задачи решения уравнений (2.4.1) главные координаты имеют лишь теоретический интерес. В ряде случаев применение главных координат полезно и с вычислительной точки зрения. Пусть исследуются вынужденные колебания: $\ddot{\mathbf{q}} + D\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$. После замены переменных (2.4.3) уравнения приобретают вид

$$\ddot{y}_k + \omega_k^2 y_x = f_k(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad [f_1(t) \ \ldots \ f_n(t)]^{\mathrm{T}} =$$
$$= S^{-1}\mathbf{Q}(t). \tag{2.4.5}$$

Начальные условия преобразуются по формуле $\mathbf{y}(0) = S^{-1}\mathbf{q}(0)$. После получения решения уравнений (2.4.5) составляется решение исходной системы уравнений с помощью преобразования (2.4.3). Если рассматриваются нелинейные уравнения $\ddot{\mathbf{q}} + D\mathbf{q} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, t)$ с выделенной линейной частью, то после приведения к главным координатам они приобретают вид:

$$\ddot{y}_k + \lambda_k y = \varphi_k(y_1, \ \ldots, \ y_n, \ t), \quad k = \overline{1, n},$$

где $[\varphi_1 \ldots \varphi_n]^{\mathrm{T}} = S^{-1}\mathbf{F}(S^{-1}\mathbf{q}, \ t)$. Многие методы исследования нелинейных систем легче применить к данной системе уравнений, чем к исходной.

Рассмотрим механическую систему, характеризуемую уравнениями:

$$B_1\ddot{\mathbf{q}} + B_2\mathbf{q}_2 + B_3\mathbf{q} = \mathbf{0}, \tag{2.4.6}$$

где B_i — произвольные (не обязательно симметрические) вещественные матрицы. Понятно, что к обычным главным координатам эта система приводится, когда выполняются условия: все матрицы B_i — симметрические, матрица B_1 — знакоопределена, а матрица B_2 — линейно зависима от матриц B_1 и B_2. В противном случае приведение системы (2.4.6) к отдельным уравнениям, как правило, невозможно. Существует ряд задач, приводящих к необходимости исследовать уравнения (2.4.6), для которых указанные условия не выполняются. Это связано не только с наличием сил диссипации и гироскопических сил, а также с действием *неконсервативных позиционных сил*, т. е. сил, вносящих несимметрические добавки в матрицу B_3. Необходимость учета влияния таких сил появляется при исследовании боковых колебаний рельсовых экипажей, при исследовании устойчивости движения вращающихся валов в среде с аэродинамическим сопротивлением и во многих других задачах (см. [49]).

Если использовать преобразование фазовых координат, в котором участвуют координаты и скорости, то можно привести уравнения (2.4.6) к *главным фазовым координатам* (за исключением того редкого случая, когда соответствующая матрица коэффициентов имеет непростую структуру). Главные фазовые координаты, как правило, комплексны.

Приведем уравнения (2.4.6) к нормальной форме Коши:

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in R^m. \tag{2.4.7}$$

Если матрица B_1 неособенная, то $m = 2n$ и матрица A следующая:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -B_1^{-1}B_3 & -B_1^{-1}B_2 \end{bmatrix}.$$

Если матрица A имеет простую структуру, то матрица $\tilde{A} = S^{-1}AS$ — диагональная. Здесь S — матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы A. Следовательно, преобразование $\mathbf{u} = S\rho$ приводит систему (2.4.7) к главным фазовым координатам: $\dot{\boldsymbol{\rho}}_k = \lambda_k \boldsymbol{\rho}_k$, $k = \overline{1, m}$.

Главные фазовые координаты, как и обычные главные координаты, могут применяться для исследования вынужденных колебаний или применения методов исследования нелинейных систем. Например, система уравнений $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{F}(t)$ после перехода к главным фазовым координатам приобретает вид $\dot{\mathbf{u}} = (\operatorname{diag} \lambda_i)\ \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{F}}(t)$, где $\tilde{\mathbf{F}}(t) = S^{-1}\mathbf{F}(t)$. Это соответствует уравнениям вида: $\dot{u}_k = \lambda_k u_k + \tilde{f}_k(t)$, $k = \overline{1, m}$.

§ 2.5. Свойства коммутирующих матриц

Приведем полное доказательство теорем о коммутирующих матрицах и связанных с этим вопросом матричных уравнениях.

Используем обозначения: $\mathrm{Gr}(A)$ — жорданова форма матрицы A; $v(A)$ — матрица, столбцами которой являются векторы канонического базиса матрицы A; $v^{-1}(A) = [v(A)]^{-1}$.

Теорема 2.1. *Пусть спектры матриц A и B не пересекаются, тогда уравнение*

$$AX = XB \tag{2.5.1}$$

(где матрица X, вообще говоря, прямоугольная) имеет единственное решение $X = 0$.

Лемма 2.1. *Пусть Λ и M — жордановы блоки, имеющие собственные числа λ и μ соответственно, причем $\lambda \neq \mu$. Тогда из равенства*

$$\Lambda X = X\mathrm{M} \tag{2.5.2}$$

вытекает $X = 0$.

Доказательство. Суть доказательства видна из примера, когда порядки матриц Λ и M равны соответственно 3 и 2.

Представив матрицу X в виде $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$ и подставив в равенство (2.5.2)

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_1 \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},$$

получим

$$\begin{bmatrix} \lambda x_{11} + x_{21} & \lambda x_{12} + x_{22} \\ \lambda x_{21} + x_{31} & \lambda x_{22} + x_{32} \\ \lambda x_{31} & \lambda x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu x_{11} & x_{11} + \mu x_1 \\ \mu x_{21} & x_{21} + \mu x_{22} \\ \mu x_{31} & x_{31} + \mu x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \\ y_5 & y_6 \end{bmatrix}$$

Пронумеруем равенства в соответствии с номерами элементов y_k. Равенство с номером 5 имеет вид $\lambda x_{31} = \mu x_{31}$, отсюда $x_{31} = 0$.

Рассматривая другие равенства, соответствующие первому столбцу, получаем $x_{21} = 0$, затем $x_{11} = 0$. Из второго равенства, соответствующего последней строке, имеем $x_{32} = 0$. Далее из равенств с номерами 4 и 2 получаем $x_{22} = 0$, затем $x_{12} = 0$. ◀

Доказательство теоремы 2.1. Пусть S и H — матрицы преобразований подобия, приводящие к жордановой форме соответственно матрицы A и B. Умножив равенство (2.5.1) слева на матрицу S^{-1} и справа на H, получим

$$S^{-1}AXH = S^{-1}XBH \Rightarrow S^{-1}ASS^{-1}XH = S^{-1}XHH^{-1}BH.$$

Запишем последнее равенство в виде

$$\mathrm{Gr}\,(A)\,\hat{X} = \hat{X}\,\mathrm{Gr}\,(B), \tag{2.5.3}$$

где $\hat{X} = S^{-1}XH$. Пусть Λ_k — жордановы блоки матрицы A, имеющие порядки n_k, и M_l — жордановы блоки матрицы B с порядками m_j. При этом $\sum\limits_{k=1}^{s} n_k = n \sum\limits_{j=1}^{r} m_j = m$. Представим матрицу $\hat{X}$ в блочном виде в соответствии с блочным видом матриц Gr (A) и Gr (B):

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{s1} & X_{s2} & \dots & X_{sr} \end{bmatrix},$$

где X_{kj} — блок размером $n_k \times m_k$. Равенство (2.5.3) соответствует следующей системе равенств для блоков:

$$\Lambda_k X_{kj} = X_{kj}\mathrm{M}_j, \quad k = \overline{1, s}; \; j = \overline{1, r}.$$

Согласно лемме 2.1 $X_{kj} = 0 \; \forall \; k, j$. Поэтому $\hat{X} = 0$, а следовательно, $X = S\hat{X}H^{-1} = 0$. ◀

Второй вариант доказательства теоремы 2.1. Если спектры матриц A и B не пересекаются, то матричное уравнение вида $AX - XB = C$ имеет единственное решение, определяемое по формуле [24]:

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\Gamma_A} \oint\limits_{\Gamma_B} \frac{1}{\lambda - \mu} (A - \lambda E)^{-1} C (B - \mu E)\, d\lambda d\mu,$$

где Γ_A и Γ_B — не пересекающиеся между собой замкнутые контуры на комплексной плоскости, внутри которых находятся спектры матриц A и B. По этой формуле получаем $X = 0$. ◀

Теорема 2.2. *Свойство коммутирования матриц сохраняется при преобразовании подобия:*

$$AB = BA \Rightarrow \tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}, \;\; \tilde{A} = S^{-1}AS, \;\; \tilde{B} = S^{-1}BS.$$

Доказательство. Умножив равенство $AB = BA$ на матрицу S^{-1} слева и на S справа, получим

$$S^{-1}ABS = S^{-1}BAS \Rightarrow S^{-1}ASS^{-1}BS = S^{-1}BSS^{-1}AS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}. \; ◀$$

Теорема 2.3. *Пусть матрицы A и X коммутируют*

$$AX = XA, \tag{2.5.4}$$

матрица A имеет вид $A = \operatorname{diag} A_k$, причем спектры блоков A_k попарно не пересекаются. Тогда матрица X также имеет блочно-диагональный вид $X = \operatorname{diag} X_k$.

Доказательство. Представим матрицу X в блочном виде в соответствии с видом матрицы A, тогда равенство (2.5.4) приобретет вид

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & A_2 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & A_2 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots A_n \end{bmatrix}.$$

Это соответствует системе уравнений для блоков матрицы X:

$$A_k X_{kj} = X_{kj} A_j, \quad k,\ j = \overline{1, n}.$$

Поскольку спектры различных блоков A_k не пересекаются, получаем по теореме 2.1 следующее равенство: $X_{kj} = 0$ при $k \neq j$. ◀

Следствием этой теоремы является теорема 1.1.

Теорема 2.4. *Коммутирующие матрицы простой структуры A и B имеют общий канонический базис.*

Доказательство. Составим матрицу S из собственных векторов матрицы A и сделаем преобразование подобия $\tilde{A} = S^{-1}AS$, $\tilde{B} = S^{-1}BS$. Матрица $\tilde{A}$ имеет диагональный вид, и на ее диагонали стоят собственные числа матрицы A. Пусть λ_k, $k = \overline{1, s}$,— различные собственные числа, m_k — их кратности и E_{m_k} — единичные матрицы порядков m_k. Поэтому $\tilde{A} = \operatorname{diag}(\lambda_k E_{m_k})$. Отсюда из теоремы 2.3 следует: $\tilde{B} = \operatorname{diag} B_k$, где B_k — блоки порядка m_k. Пусть $\mathbf{b}_{kj}$, $j = \overline{1, m_k}$,— векторы канонического базиса матрицы B_k. Докажем, что векторы

$$\mathbf{a}_{kj} = S \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{kj} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = S \operatorname{diag}(\mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0} \ \mathbf{b}_{kj}^{\mathrm{T}} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0})^{\mathrm{T}},$$

$$j = \overline{1, m_k}, \quad k = \overline{1, s},$$

являются собственными векторами матриц A и B. Действительно,

$$Ba_{kj} = (S\tilde{B}S^{-1})\,S\operatorname{diag}(0\ \ldots\ 0\ \mathbf{b}_{kj}^{\mathrm{T}}\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}} =$$

$$= S\operatorname{diag}B_k\operatorname{diag}(0\ \ldots\ 0\ \mathbf{b}_{kj}^{\mathrm{T}}\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}} =$$

$$= S\operatorname{diag}(0\ \ldots\ 0\ \mu_{kj}\mathbf{b}_{kj}^{\mathrm{T}}\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}} =$$

$$= \mu_{kj}S\operatorname{diag}(0\ \ldots\ 0\ \mathbf{b}_{kj}^{\mathrm{T}}\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}} = \mu_{kj}\mathbf{a}_{kj},$$

где μ_{kj} — собственное число блока B_k, являющееся одним из собственных чисел матрицы B. Теперь

$$A\mathbf{a}_{kj} = (S\tilde{A}S^{-1})\,S\operatorname{diag}(0\ \ldots\ 0\ \mathbf{b}_{kj}^{\mathrm{T}}\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}} =$$

$$= S\operatorname{diag}\lambda_k E_{m_k}\operatorname{diag}(0\ \ldots\ 0\ \mathbf{b}_{kj}^{\mathrm{T}}\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}} =$$

$$= S\operatorname{diag}(0\ \ldots\ 0\ \lambda_k E_{m_k}\mathbf{b}_{kj}^{\mathrm{T}}\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}} =$$

$$= \lambda_k S\operatorname{diag}(0\ \ldots\ 0\ \mathbf{b}_{kj}^{\mathrm{T}}\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}} = \lambda_k\mathbf{a}_{kj}. \blacktriangleleft$$

Замечание. Из доказательства видно, что утверждение теоремы остается в силе и в случае, когда лишь одна из матриц A или B имеет простую структуру.

Теорема 2.5. *Пусть квадратные матрицы A и B, порядки которых соответственно n и m, имеют ровно q совпадающих собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$, причем число λ_k имеет кратность n_k для матрицы A и m_k — для матрицы B. Пусть для матрицы X выполняется равенство $AX = XB$. Тогда*

$$\hat{X} = v^{-1}(A)\,Xv(B) = \begin{bmatrix} X_{11} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & X_{qq} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

причем каждый блок X_k имеет размеры $n_k \times m_k$.

Доказательство. Обозначим через $\mathrm{Gr}\,(A)$ жорданову форму матрицы A. Аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 2.1, приводим равенство $AX = XB$ к виду

$$\mathrm{Gr}\,(A)\,\hat{X} = \hat{X}\,\mathrm{Gr}\,(B), \quad \hat{X} = V(A)\,XV^{-1}(B). \tag{2.5.5}$$

В соответствии с условием теоремы

$$\mathrm{Gr}\,(A) = \operatorname{diag}(A_1 \ldots A_q\ A_{q+1}),$$

$$\mathrm{Gr}\,(B) = \operatorname{diag}(B_1 \ldots B_q B_{q+1}),$$

где блоки A_k и B_k при $k = \overline{1,\ q}$ имеют попарно равные собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$, а спектры блоков A_{q+1} и B_{q+1}

не пересекаются и не содержат чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$. Представим матрицу X в блочном виде так, чтобы блок X_{kj} имел размеры $n_k \times m_j$ ($k = \overline{1, q+1}$; $j = \overline{1, q+1}$). Тогда равенство (2.5.5) соответствует системе равенств $A_k X_{kj} = X_{kj} B_j$. Поскольку при разных k и j спектры блоков A_k и B_j не пересекаются, $X_{kj} = 0$ при $k \neq j$ (теорема 2.1).

Спектры блоков A_{q+1} и B_{q+1} также не пересекаются. Поэтому $X_{q+1,q+1} = 0$. Последние два равенства означают

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & X_{qq} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacktriangleleft$$

Глава 3

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММЫ

В данной главе изложены эффективные вычислительные алгоритмы, связанные с применением методов расщепления. Приведены результаты расчетов для ряда механических систем.

Эффективность вычислительного метода, как правило, зависит не только от идеи этого метода, а и от того, как эта идея реализуется. Часто незначительные (на первый взгляд) изменения в алгоритме могут существенно изменить его надежность или быстродействие. Поэтому наиболее интересные программы для ЭВМ приведены в основном тексте книги. Они и являются четкими описаниями соответствующих алгоритмов. Язык программирования (ФОРТРАН, версия ФОРТРАН-Дубна) не играет особой роли, поскольку эти программы легко переводятся на любой другой язык.

О том, как далеки многие теоретические курсы линейной алгебры от практических потребностей, написано в статье В. В. Воеводина [19]. Об этом свидетельствуют и другие авторы (см. Лазарян В. А. и др. [43]).

Известен способ нахождения общего решения системы линейных однородных алгебраических уравнений, связанный с отысканием базисного минора. Для этого нужно вычислить все возможные миноры матрицы коэффициентов. Понятно, что такой способ неудобен для счета на ЭВМ. Тем более что сами определители все равно вычисляются с помощью какого-либо алгоритма, например по методу Жордана — Гаусса. В настоящей главе изложен вычислительный метод решения указанной задачи. Он представляет собой метод исключения неизвестных, аналогичный методу Жордана — Гаусса, но учитывающий также отбрасывание линейно зависимых уравнений. Кроме того, предусмотрен выбор ведущего элемента таким образом, чтобы значительно сократить общий объем вычислений. Этот прием, как показала практика вычислений, позволяет одновременно увеличить точность получаемых результатов. Разработанный вычислительный метод используется для применения способа коммутирующей матрицы и для решения многих других задач.

§ 3.1. Метод Жордана — Гаусса и его модификации

При использовании способа коммутирующей матрицы приходится решать систему линейных однородных алгебраических уравнений. Такую же вычислительную задачу необходимо решать и при использовании ряда других способов. Алгоритм решения этой задачи строится на основе метода Жордана — Гаусса, который незначительно отличается от метода Гаусса. Различие заключается в том, что столбцы матрицы коэффициентов сразу приводятся к такому виду, что не только ниже ведущего элемента (как в методе Гаусса), а и выше его стоят нули. Для этого очередная k-я строка так же, как и в методе Гаусса, делится на ведущий элемент a_{kk}, затем эта строка, умноженная на число a_{jk}, вычитается от строки с номером j. Последняя операция, в отличие от метода Гаусса, выполняется для всех значений $j \neq k$. По окончании таких вычислений матрица коэффициентов становится единичной, а в правом столбце стоят значения неизвестных. Обратный ход при этом не нужен.

При выполнении расчетов по методу Жордана — Гаусса в ряде случаев необходимо выполнять перестановку строк. Возможна также и перестановка столбцов, что соответствует перенумерации неизвестных. Вследствие перестановки можно выбирать в качестве ведущего элемента на первом шаге любой ненулевой элемент матрицы, а на последующих шагах любой ненулевой элемент оставшейся части матрицы (кроме первых r строк и столбцов). Выбором ведущего элемента следует пользоваться для повышения точности вычислений. Действительно, если ведущий элемент мал по абсолютной величине по сравнению с другими элементами матрицы, то это приводит к сравнительно большим погрешностям. Поэтому желательно выбирать в качестве ведущего элемента максимальный по абсолютной величине элемент матрицы или оставшейся ее части. Иногда удобней выбирать максимальный элемент столбца или строки. Перестановки столбцов можно производить неявно, т. е. столбцы оставлять на своих местах, а вычисления производить так, как будто они переставлены. В этом случае преобразованная матрица отличается от единичной перестановкой столбцов, зато перенумерация неизвестных не делается. Система уравнений приводится к уравнениям вида $x_k = \tilde{b}_k$, $k = \overline{1, n}$, расположенным не обязательно в порядке возрастания номеров.

В табл. 3.1. приведен ход решения системы уравнений (2.2.3) по методу Жордана — Гаусса с выбором в качестве ведущего элемента максимального по абсолютной величине

Таблица 3.1

Уравнение системы (2.2.3)	Коэффициент при неизвестных			b_i	Комментарий
	x_1	x_2	x_3		
1)	2	-1	4	15	Исходная система уравнений
2)	-2	1	1	0	
3)	3	-1	0	5	
$1)' = 1)/4$	0,5	$-0,25$	1	3,75	Первый шаг метода
$2)' = 2) - 1)' \cdot 1$	$-2,5$	1,25	0	$-3,75$	
$3)' = 3) - 1)' \cdot 0$	3	-1	0	5	
$1)'' = 1)' - 2)'' \cdot 0,5$	0	0	1	3	Второй шаг метода
$2)'' = 2)'/(-2,5)$	1	$-0,5$	0	1,5	
$3)'' = 3)' - 2)'' \cdot 3$	0	0,5	0	0,5	
$1)''' = 1)'' - 3)''' \cdot 0$	0	0	1	3	Третий шаг метода
$2)''' = 2)'' - 3)''' \cdot (-0,5)$	1	0	0	2	
$3)''' = 3)''/0,5$	0	1	0	1	

элемента строки. Отметим, что при выполнении второго и последующих шагов метода сначала вычисляются новые значения элементов ведущей строки и только потом — всех остальных строк, начиная с первой.

В результате расчета получаем уравнения: $x_3 = 3$; $x_1 = 2$; $x_2 = 1$.

§ 3.2. Алгоритм нахождения множества решений системы линейных алгебраических уравнений

До сих пор мы рассматривали методы решения систем уравнений, у которых число уравнений m, число неизвестных n и ранг матрицы коэффициентов r равны между собой: $m = n = r$.

Рассмотрим систему однородных уравнений с произвольной матрицей коэффициентов:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0.$$

Эта система всегда имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$. Кроме него она может иметь и другие решения.

Если матрица коэффициентов произвольная, то применение метода Жордана — Гаусса усложняется тем, что возможно наличие линейно зависимых уравнений. Уравнения, линейно зависящие от других, не несут новой информации и могут быть отброшены.

При выполнении расчетов по методу Жордана — Гаусса строки, линейно зависящие от предыдущих, на определенном шаге метода становятся нулевыми. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено k шагов метода Жордана — Гаусса без перестановки строк, причем строка исходной матрицы с номером $k+1$ линейно зависит от предыдущих строк. Тогда:*

а) первые k строк преобразованной матрицы линейно независимы;

б) строка с номером $(k+1)$ — нулевая.

Лемма 3.1. *Свойство линейной зависимости (или независимости) векторов не меняется при выполнении любой из следующих операций:*

1) умножения одного из уравнений на число, не равное нулю;

2) вычитания одного уравнения, умноженного на некоторое число, из другого.

Доказательство. Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы, т. е. $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \forall\, \alpha_i = 0$. Пусть для определенности преобразованию подвергается первый вектор. Выполним преобразование 1, т. е. $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{c}\mathbf{a}_1$ $(c \neq 0)$ и $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i$ при $i > 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\beta_1}{c}\mathbf{a}_1 + \sum_{i=2}^{k} \beta_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\beta_1}{c} = 0, \quad \beta_i = 0,$$

$$i = \overline{2, k} \Rightarrow \forall\, \beta_i = 0.$$

Выполним преобразование 2, т. е. $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 - p\mathbf{a}_s$ и $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i$ $(i > 1)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{i \neq s} \beta_i \mathbf{a}_i + (\beta_s - p\beta_1)\,\mathbf{a}_s = \mathbf{0} \Rightarrow \forall\, \beta_i = 0.$$

В случае линейной зависимости доказательство аналогичное. ◀

Доказательство теоремы 3.1. а. Преобразованная матрица содержит столбцы с номерами s_j, $j = \overline{1, k}$, у которых на j-м месте стоит единица, а остальные элементы равны нулю. Блок A_1 преобразованной матрицы, содержащий первые k строк, имеет ранг k, поскольку столбцы с номерами s_j линейно независимы;

б. При выполнении шагов метода Жордана — Гаусса без перестановки строк используются только преобразования, перечисленные в лемме, поэтому строка с номером $k+1$ преобразованной матрицы линейно зависит от предыдущих строк. Если бы она не была нулевой, то было бы возможно выполнение следующего $(k+1)$-го шага метода Жордана — Гаусса. В этом случае первые $(k+1)$ строк стали бы линейно независимыми (первая часть теоремы). Этого не может быть, поскольку свойство линейной зависимости строк при выполнении очередного шага сохраняется. ◀

Итак, для отбрасывания всех линейно зависимых строк достаточно предусмотреть следующие дополнительные операции. Перед выбором ведущего элемента в очередной строке делается проверка: является ли эта строка нулевой. Если это условие выполняется, то строка отбрасывается.

После окончания описанных выше вычислений преобразованная матрица состоит из r строк, где r — ранг исходной матрицы. Преобразованная матрица содержит r столбцов, являющихся единичными векторами порядка r. Для упрощения дальнейших рассуждений переставим столбцы матрицы так, чтобы k-й единичный вектор стоял на k-м месте. Перестановке столбцов соответствует перенумерация неизвестных. Система уравнений приобретает вид

$$[E_r,\ A_2]\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow E_r\mathbf{y}_1 + A_2\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}, \qquad (3.2.1)$$

где блок A_2 объединяет последние $n-r$ столбцов преобразованной матрицы, вектор $\mathbf{y}_1$ состоит из первых r неизвестных с новыми номерами, а вектор $\mathbf{y}_2$ — из остальных неизвестных. Равенство (3.2.1) перепишем так:

$$\mathbf{y}_1 = -A_2\mathbf{y}_2. \qquad (3.2.2)$$

Отсюда видно, что неизвестным, входящим в вектор $\mathbf{y}_2$ (свободным неизвестным), можно присвоить произвольные значения и вычислить соответствующие значения неизвестных, входящих в вектор $\mathbf{y}_1$ (базисных неизвестных). Для получения общего решения исходной системы уравнений можно последовательно присваивать вектору $\mathbf{y}_2$ значения, равные единичным векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-r}$ порядка $n-r$, и вычислять соответствующие значения вектора $\mathbf{y}_1$. Полученные векторы

$$\mathbf{y}^{(k)} = \begin{bmatrix}-A_2\mathbf{e}_k\\ \mathbf{e}_k\end{bmatrix}$$

образуют базис во множестве всех решений исходной системы уравнений.

Пример 3.1. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} &1)\quad 4x_1 - x_2 + 3x_4 = 0,\\ &2)\quad 7x_1 + 5x_3 + x_4 = 0,\\ &3)\quad -0{,}7x_2 - 2x_3 + 1{,}7x_4 = 0. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Таблица 3.2

Уравнение системы (3.2.3)	Коэффициент при неизвестных				Комментарий
	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	0	0	0	Вспомогательная строка
1)	4	-1	0	3	Исходная система уравнений
2)	7	0	5	1	
3)	0	$-0{,}7$	-2	1,7	
	1	0	0	0	Вспомогательная строка
$1)' = 1)/4$	1	$-0{,}25$	0	0,75	Первый шаг метода
$2)' = 2) - 1)' \cdot 7$	0	1,75	5	$-4{,}25$	
$3)' = 3) - 1)' \cdot 0$	0	$-0{,}7$	-2	1,7	
	1	0	2	0	Вспомогательная строка
$1)'' = 1)' - 2)'' \cdot 0$	1	$-0{,}25$	0	0,75	Второй шаг метода
$2)'' = 2)'/5$	0	0,35	1	$-0{,}85$	
$3)'' = 3)' - 2)'' \cdot (-2)$	0	0	0	0	
	1	0	2	0	Вспомогательная строка
$1)''' = 1)''$	1	$-0{,}25$	0	0,75	Отбрасывание нулевых строк
$2)''' = 2)''$	0	0,35	1	$-0{,}85$	

Ход решения приведен в табл. 3.2. Перед каждым шагом метода записана строка чисел, в которой ненулевые числа стоят лишь в тех столбцах, где уже выбирался ведущий элемент. Эти числа равны номерам соответствующих строк, где был ранее выбран ведущий элемент. Он выбирается максимальным в строке по абсолютной величине. Преобразованной матрице соответствует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 + 0{,}75x_4 = 0,\\ 0{,}35x_2 + x_3 - 0{,}85x_4 = 0. \end{cases}$$

Свободные неизвестные здесь x_2 и x_4. Это видно также из того, что во вспомогательной строке остались нулевыми второй и четвертый элементы. Присвоив свободным неизвестным значения $x_2^{(1)} = 1$, $x_4^{(1)} = 0$, получим $x_1^{(1)} = 0{,}25$; $x_3^{(1)} = -0{,}35$. Аналогично при $x_2^{(2)} = 0$, $x_4^{(2)} = 1$ имеем $x_1^{(2)} = -0{,}75$; $x_3^{(2)} = 0{,}85$. Таким образом, базис в множестве всех решений системы уравнений следующий:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 1 \\ -0{,}35 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0{,}75 \\ 0 \\ 0{,}85 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Многие практические задачи приводят к системам уравнений с разреженными матрицами, т. е. матрицами, содержащими большое количество нулевых коэффициентов. В этих случаях целесообразно выбирать ведущий элемент в строке с минимальным количеством ненулевых элементов, причем выбирать наибольший по абсолютной величине элемент строки. Как показала практика решения таких задач, изложенный выше способ выбора ведущего элемента обычно позволяет значительно сократить общий объем вычислений, а также повысить точность получаемых результатов.

Ниже приведена программа нахождения общего решения системы линейных однородных алгебраических уравнений. Ведущий элемент выбирается в строке с минимальным количеством ненулевых элементов. Для этого перед очередным k-м шагом метода просматриваются все строки от k-й до последней и выбранная строка переставляется на k-е место. Далее выбирается максимальный по абсолютной величине элемент строки.

При выполнении расчетов на ЭВМ коэффициенты линейно зависимых уравнений в процессе исключений становятся нулевыми с точностью до ошибок округления, связанных с ограниченностью разрядной сетки ЭВМ. Поэтому вводятся два числа: абсолютная погрешность (ε_1) и относительная (ε_2). В случае, когда при вычитании двух близких чисел получается коэффициент, меньший по абсолютной величине, чем произведение ε_2, на одно из этих чисел, коэффициенту присваивается нулевое значение. Если полученный коэффициент по абсолютной величине меньше ε_1, ему также присваивается нулевое значение. Строка отбрасывается, когда максимальная из абсолютных величин элементов строки меньше ε_1.

После окончания расчетов по указанной схеме вектору свободных неизвестных последовательно присваиваются значения единичных векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-r}$ и в каждом случае вычисляется соответствующий набор базисных неизвестных по формуле (3.2.2).

Обращение к программе следующее: CALL SLAU5 (A, NN, M, E1, E2, L, V, N2, N3, KB), где A — вещественный двумерный массив размерностью NN $\times$ M, содержащий коэффициенты системы уравнений. После работы программы первые (M — L) строк матрицы A содержат векторы базиса подпространства, натянутого на векторы-строки исходной матрицы A. В головной программе массив A может иметь размерность большую, чем NN $\times$ M; NN — количество уравнений (INTEGER); M — количество неизвестных (INTEGER); E1, E2 — абсолютная и относительная погрешности. Рекомендуемые значения соответственно 1.OE — 15 и 1.OE — 9 (REAL); L — количество найденных линейно независимых решений (INTEGER); V — вещественный двумерный массив размерностью N3 $\times$ M, после работы программы в его первых L строках находятся найденные линейно независимые решения; N2 — число строк в описании массива A в головной программе (N2 $\geqslant$ NN); N3 — число строк в описании массива V в головной программе. При неизвестном заранее числе L надо задавать N3 = M. Если оказалось N3 < L, то линейно независимые решения не составляются и работа программы заканчивается после преобразования матрицы A и вычисления числа L; KB — целый одномерный рабочий массив размерностью M.

Программа SLAU5 может использоваться также и для решения следующих задач:

а) определение ранга матрицы;

б) проверка линейной зависимости векторов;

в) определение количества линейно независимых векторов из данных и выбор базиса в продпространстве, натянутом на заданные векторы.

Для вычисления ранга матрицы надо обратиться к программе SLAU5, задав вместо матрицы коэффициентов системы уравнений данную матрицу, а вместо чисел NN и M — соответственно числа ее строк и столбцов. Ранг матрицы равен M — L.

Для определения количества линейно независимых векторов из заданных и выбора базиса в подпространстве, натянутом на заданные векторы, нужно обратиться к программе SLAU5, предварительно расположив в строках массива A данные векторы. В этом случае NN — число векторов, M — их порядок. Количество линейно независимых векторов будет равняться M — L, векторы искомого базиса после работы программы будут расположены в первых M — L строках массива A. В этом случае, а также при вычислении ранга матрицы можно для экономии памяти задать в качестве параметра V одномерный массив размерностью M; число N3 при этом надо положить равным 1.

Проверка линейной зависимости векторов — это частный случай предыдущей задачи.

Текст программы SLAU5 следующий:

```
            SUBROUTINE   S L A U 5
          *    ( A,NN,M,E1,E2,L,V,N2,N3,KB )
C===============================================
C   ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ
C   ОДНОРОДНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
C   С УЧЕТОМ РАЗРЕЖЕННОСТИ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ
C   А В Т О Р :   Ю.Н. БАЗИЛЕВИЧ (ИТМ АН УССР).
C-----------------------------------------------------
C   A - МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ.
C   NN*M - ЕЕ РАЗМЕРНОСТЬ.
C   E1,E2 - АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГР.
C   L - К-ВО ЛИН. НЕЗАВИСИМЫХ РЕШЕНИЙ
C   KB - В МАССИВЕ ОТМЕЧАЮТСЯ БАЗИСНЫЕ ПЕРЕМ.
C   V - В ПЕРВЫЕ L СТРОК ЗАНОСЯТСЯ ЛИН. НЕЗАВ. РЕШЕНИЯ
C   N2 - ЧИСЛО СТРОК В ОПИСАНИИ МАТР. A
C   N3 -         - " -         V
C------------------------------
      DIMENSION A(N2,M), KB(M), V(N3,M)
      INTEGER ВЕДСТР
      N=NN
      DO 5 I=1,M
5        KB(I)=0
C.............................     ...
      ВЕДСТР=1
3     CONTINUE
C
      IF (ВЕДСТР.GT.N) GO TO 6
C...ПОИСК СТРОКИ С МИН. К-ВОМ ЭЛ-ТОВ
      МИНКВО=M
      МИНС=ВЕДСТР
      DO 30 I=ВЕДСТР,N
         КЭЛ=0
         DO 31 J=1,M
            P=ABS(A(I,J))
31          IF (P.GT.E1) КЭЛ=КЭЛ+1
         IF (КЭЛ.GE.МИНКВО) GO TO 30
         МИНКВО=КЭЛ
         МИН C=I
30       CONTINUE
      DO 32 J=1,M
         R=A(ВЕДСТР,J)
         A(ВЕДСТР,J)=A(МИН C,J)
```

```
32        A(МИН C,J)=R
C...ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ - НАИБОЛЬШИЙ В СТРОКЕ
      K=1
      DO 1 J=2,M
         P=ABS(A(ВЕДСТР,J))
         P2=ABS(A(ВЕДСТР,K))
1        IF (P.GT.P2) K=J
      S=A(ВЕДСТР,K)
      P=ABS(S)
      IF (P.GT.E1) GO TO 2
C   УДАЛЕНИЕ СТРОКИ
      N=N-1
      IF(ВЕДСТР.GT.N) GO TO 3
      DO 4 K1=ВЕДСТР,N
         DO 4 J=1,M
4          A(K1,J)=A(K1+1,J)
      GO TO 3
2     KB(K)=ВЕДСТР
C...ЖОРДАНОВЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ
      DO 9 J=1,M
9           A(ВЕДСТР,J)=A(ВЕДСТР,J)/S
         DO  7  I = 1,N
          IF (I.EQ.ВЕДСТР) GO TO 7
          АМНОЖ=A(I,K)
          DO 10 J=1,M
            P=ABS(A(I,J))
            A(I,J)=A(I,J)-A(ВЕДСТР,J)*АМНОЖ
            P2=ABS(A(I,J))
10          IF (P2.LT.E2*P.OR.P2.LT.E1) A(I,J)=0.
7         CONTINUE
      ВЕДСТР=ВЕДСТР+1
      GO TO 3
6     CONTINUE
      L=M-N
СОСТАВЛЕНИЕ ЛИН.НЕЗАВ. РЕШЕНИЙ
      IF (L.GT.N3) RETURN
      DO 12 I=1,L
         DO 12 J=1,M
12         V(I,J)=0.
      K=0
      DO 13 I=1,M
         IF(KB(I).NE.0) GO TO 13
         K=K+1
         V(K,I)=1.
         DO 14 J=1,M
14     IF (KB(J).NE.0) V(K,J)=-A(KB(J),I)
13    CONTINUE
      RETURN
      END
```

В качестве тестового примера использованы уравнения (3.2.3). Приведем текст проверяющей программы:

```
      PROGRAM ОТЛ
      DIMENSION A(15,15), V(15,15), KB(15)
     1 ,A2(3,4)
      DATA A2 / 4.0, 7.0, 0.0,
     1           -1.0, 0.0,-0.7,
     2           0.0, 5.0,-2.0,
     3           3.0, 1.0, 1.7/
      NN=3
      M=4
      DO 8 I=1,3
         DO 8 J=1,4
8           A(I,J)=A2(I,J)
      PRINT 23,((A(I,J),J=1,4),I=1,3)
C-----------------
      CALL SLAU5 (A,NN,M,1.0E-15,1.0E-9,L,V,15,15,KB)
C-----------------
      IR=M-L
      PRINT 24,(I,(V(I,J),J=1,4),I=1,L)
      PRINT 25,IR
      PRINT 26
      IF (IR.EQ.NN) PRINT 27
      IF (IR.LT.NN) PRINT 28
      PRINT 29,(I,(A(I,J),J=1,4),I=1,IR)
23    FORMAT(/2X, 'ИСХОДНАЯ МАТРИЦА (КОЭФФИЦИЕНТЫ',
     1 ' СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ)'/(4F7.2))
24    FORMAT(/2X, 'ЛИНЕЙНО   НЕЗАВИСИМЫЕ РЕШЕНИЯ'/
     1(2X,I4, ').',3X,4F8.4))
25    FORMAT(/2X, 'РАНГ МАТРИЦЫ РАВЕН :',I4/)
26    FORMAT(/2X, 'ВЕКТОРЫ-СТРОКИ МАТРИЦЫ -')
27    FORMAT(2X, 'ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫ.'/)
28    FORMAT(2X, 'ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ.'/)
29    FORMAT(/2X, 'БАЗИС ПОДПРОСТРАНСТВА, НАТЯНУТОГО ',
     1 ' НА ВЕКТОРЫ-СТРОКИ МАТРИЦЫ'/(2X,I4, ').',4F8.4))
      STOP
      END
```

Результаты расчета:

```
ИСХОДНАЯ МАТРИЦА (КОЭФФИЦИЕНТЫ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ)
4.00  —1.00   0.00  3.00
7.00   0.00   5.00  1.00
0.00  —0.70  —2.00  1.70

ЛИНЕЙНО  НЕЗАВИСИМЫЕ РЕШЕНИЯ
1).    0.2500  1.0000  —0.3500  0.0000
2).   —0.7500  0.0000   0.8500  1.0000

РАНГ МАТРИЦЫ РАВЕН: 2

ВЕКТОРЫ-СТРОКИ МАТРИЦЫ —
ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ.
```

БАЗИС ПОДПРОСТРАНСТВА, НАТЯНУТОГО НА ВЕКТОРЫ-СТРОКИ МАТРИЦЫ

1). 1.0000 — 0.2500 0.0000 0.7500
2). 0.0000 0.3500 1.0000 — 0.8500

Для создания комплексного варианта CSLAU программы SLAU5 необходимо внести в нее следующие изменения:

а) добавить описание

COMPLEX A, V, R, S, АМНОЖ,

б) все библиотечные функции ABS заменить на CABS,

в) вещественные константы Ø. и 1. заменить соответственно на комплексные константы (Ø., Ø.) и (1. , Ø.).

При использовании этой программы следует учесть, что массивы A и V комплексные. В остальном использование программы CSLAU такое же, как и SLAU5.

Программа CSLAU может использоваться для нахождения собственных векторов произвольной матрицы A, соответствующих известному собственному числу. Действительно, решая систему уравнений $(A - \lambda_k E)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, мы получаем все линейно независимые собственные векторы $\mathbf{x}_k$, $k = \overline{1,\ L}$, соответствующие собственному числу λ_k.

Рассмотренный алгоритм нахождения общего решения можно применить и для неоднородных уравнений. Отличие состоит в том, что в таблицу метода Жордана — Гаусса дополнительно вводится столбец свободных членов. Нетрудно доказать, что если рассматриваемая система уравнений не совместна, то на одном из шагов метода при выборе ведущего элемента окажется, что в рассматриваемой строке все коэффициенты при неизвестных нулевые, а свободный член не равен нулю. В противном случае расчет по методу Жордана — Гаусса будет успешно закончен. Преобразованная система уравнений будет отличаться от системы (3.2.2) наличием в правой части этой формулы второго слагаемого — постоянного вектора. Дальнейшее построение общего решения не отличается от случая однородной системы уравнений.

§ 3.3. Нахождение множества матриц, коммутирующих с данными

Для решения задачи, указанной в заглавии, предназначена программа CENTER. Алгоритм работы программы состоит в составлении и решении с помощью программы SLAU5, описанной в предыдущем параграфе, системы линейных однородных алгебраических уравнений, соответствующих матричным уравнениям

$$ZB_i = B_iZ,\ i = \overline{1,\ k}, \tag{3.3.1}$$

где B_i — заданные матрицы; Z — неизвестная матрица.

Обращение к программе следующее: CALL CENTER (B, NB, NB2, NB3, KBOB, A, V, C, L, NMB), где B — вещественный трехмерный массив размерностью NB $\times$ NB $\times$ $\times$ KBOB, содержащий KBOB исходных квадратных матриц порядка NB. Первая из исходных матриц расположена в следующих элементах массива: $B(i, j, 1)$ $(i = \overline{1, NB}, j = \overline{1, NB})$, вторая — $B(i, j, 2)$ и т. д., NB — порядок исходных матриц; NB2 = NB $\times$ NB; NB3 = 2 $\times$ NB2; KBOB — количество исходных матриц; A, V — вещественные рабочие двумерные массивы размерностью соответственно NB3 $\times$ $\times$ NB2 и NB2 $\times$ NB2; C — вещественный трехмерный массив размерностью NB $\times$ NB $\times$ NB, первые L слоев которого содержат найденные матрицы базиса искомого централизатора, т. е. множества всех матриц, коммутирующих с данными. Слоем называем множество элементов трехмерного массива, соответствующее фиксированному третьему индексу; L — количество матриц, являющихся базисом искомого множества; NMB — целый одномерный рабочий массив размерностью NB2.

Текст программы CENTER следующий:

```
      SUBROUTINE CENTER(B,NB,NB2,NB3,KBOB,A,V,C,L,NMB)
C   НАХОЖДЕНИЕ МНОЖЕСТВА МАТРИЦ,КОММУТИРУЮЩИХ С
C   ДАННЫМИ МАТРИЦАМИ (ЦЕНТРАЛИЗАТОР)
C   А В Т О Р Ы :   Ю.Н. БАЗИЛЕВИЧ,  Л.М. КОРОТЕНКО,
C                   Г.М. КОРОТЕНКО   (ИТМ АН УССР)
C-----------------------------------------------------
C   B - ИСХОДНЫЕ МАТРИЦЫ
C   NB,KBOB - ИХ ПОРЯДОК И КОЛИЧЕСТВО
C   A,V,NMB - РАБОЧИЕ МАССИВЫ
C   NB2=NB*NB, NB3=2*NB2
C   C - ВЫЧИСЛЕННЫЕ МАТРИЦЫ БАЗИСА ИСКОМОГО МН-ВА
C   L - КОЛИЧЕСТВО ЭТИХ МАТРИЦ
C-----------------------------------
      DIMENSION  B(NB,NB,KBOB), A(NB3,NB2),
     1           V(NB2,NB2), C(NB,NB,NB),
     2             NMB(NB2)
C-----------------------------------------
      NH=0
      M =NB*NB
      N4=1
C   NH - ЧИСЛО УРАВНЕНИЙ, СОСТАВЛЕННЫХ РАНЕЕ
C   M - ЧИСЛО НЕИЗВЕСТНЫХ
      DO 1 IB=1,KBO B
         NN=NH+M
         N1=NH+1
C   ...ОЧИСТКА МЕСТА ДЛЯ НОВЫХ УРАВНЕНИЙ
         DO 8 I=N1,NN
            DO 8 J=1,M
```

```
8               A(I,J)=0.
C   ...СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ
          DO 3 I=1,NB
             DO 3 J=1,NB
               IA=(I-1)*NB+J+NH
               DO 6 K=1,NB
                  JA=(K-1)*NB+J
6                 A(IA,JA)=B(I,K,IB)
               DO 3 K=1,NB
                  JA=(I-1)*NB+K
3                 A(IA,JA)=A(IA,JA)-B(K,J,IB)
C   ...РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ
          IF (IB.EQ.KBO B) N4=NB2
       CALL SLAU5(A,NN,M,1.E-15,1.E-9,L,V,NB3,N4,NMB)
          NH=M-L
1         CONTINUE
C--------------------
C...ЗАПОЛНЕНИЕ МАТРИЦЫ C
       DO 9 K=1,L
          DO 9 I=1,NB
             DO 9 J=1,NB
9               C(I,J,K)=V(K,(I-1)*NB+J)
       RETURN
       END
```

В качестве тестового примера использованы матрицы (I.4.3). Для проверки подпрограммы CENTER с помощью этого примера составлена программа:

```
      PROGRAM KMAT
      DIMENSION BB(3,3,3),B(3,3),A(18,9),V(9,9),
     1           C(3,3,3), NMB(9)
C--------------------
      READ 57, KBO B, NB
C   NB - ПОРЯДОК МАТРИЦЫ B
      PRINT 51,KBO B, NB
      DO 1 K=1,KBOB
         READ 5, ((B(I,J),J=1,NB),I=1,NB)
         PRINT 4,K
         FORMAT (I5,'-Я ИСХОДНАЯ МАТРИЦА')
         DO 20 I=1,NB
            PRINT 22, (B(I,J), J=1,NB)
20          CONTINUE
C...ПЕРЕСЫЛКА МАТРИЦЫ В ТРЕХМЕРНЫЙ МАССИВ
         DO 1 I=1,NB
            DO 1 J=1,NB
1              BB(I,J,K)=B(I,J)
      NB2=NB*NB
      NB3=2*NB2
      CALL CENTER(BB,NB,NB2,NB3,KBOB,A,V,C,L,NMB)
C...ПЕЧАТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ
```

```
      PRINT 7
7     FORMAT (/'P E З Y Л Ь T A T Ы')
      DO 3 K=1,L
         PRINT 55,K
         DO 3 I=1,NB
3           PRINT 22,(C(I,J,K),J=1,NB)
51    FORMAT (2X,'К-ВО МАТРИЦ:',I3,',  ПОРЯДОК =',I3)
22    FORMAT (10E12.5)
55    FORMAT (/I5,'-Я МАТРИЦА НАЙДЕННОГО БАЗИСА')
57    FORMAT (2I3)
5     FORMAT (E4.2)
      STOP
      END
```

Числовой материал к этой программе и результаты расчета приведены ниже. Единичная матрица не включена в числовой материал, поскольку ее отсутствие не влияет на результат:

```
002003
0.
0.
0.
0.
0.
0.
0.
0.
5.
3.
2.
—1.
32.
3.
4.
8.
—2.
5.
```

```
К-ВО МАТРИЦ: 2, ПОРЯДОК = 3
  1-Я ИСХОДНАЯ МАТРИЦА
0.00000+00  0.00000+00  0.00000+00
0.00000+00  0.00000+00  0.00000+00
0.00000+00  0.00000+00  5.00000+00
  2-Я ИСХОДНАЯ МАТРИЦА
3.00000+00   2.00000+00  —1.00000+00
3.20000+01   3.00000+00   4.00000+00
8.00000+00  —2.00000+00   5.00000+00

Р Е З У Л Ь Т А Т Ы

  1-Я МАТРИЦА НАЙДЕННОГО БАЗИСА
2.50000—01  6.25000—02  0.00000+00
1.00000+00  2.50000—01  0.00000+00
0.00000+00  0.00000+00  0.00000+00

  2-Я МАТРИЦА НАЙДЕННОГО БАЗИСА
1.00000+00  0.00000+00  0.00000+00
0.00000+00  1.00000+00  0.00000+00
0.00000+00  0.00000+00  1.00000+00
```

Каждому матричному уравнению соответствует n^4 элементов при обычной записи системы уравнений. Поэтому программа CENTER непосредственно позволяет решать задачи с матрицами сравнительно небольших порядков. Так, при использовании стандартного объема памяти машины БЭСМ-6, максимально допустимый порядок исходных матриц равен 9. Небольшое увеличение порядка можно получить, используя внешнюю память машины.

Для матриц большого порядка составлена программа (текст здесь не приведен), реализующая тот же алгоритм, что и CENTER, но при компактном хранении данных. Система однородных алгебраических уравнений, соответствующая (3.3.1), содержит очень много нулевых элементов. Поэтому программа построена таким образом, что нулевые элементы не хранятся в памяти машины. Для этих целей введены два массива W и C. Элементами массива действительного типа W являются ненулевые коэффициенты при неизвестных в системе уравнений. В массиве целого типа C записываются числа, являющиеся номерами соответствующих неизвестных при записи матрицы Z по строкам в виде одномерного массива. Для отделения уравнений друг от друга в массиве C ставится знак «минус» как признак начала нового уравнения. Например, для уравнений

$$\begin{cases} 2z_{21} - 32z_{12} = 0, \\ z_{22} - z_{11} = 0, \\ z_{11} - z_{33} - 4z_{12} = 0 \end{cases}$$

при $n = 3$ массивы W и C имеют вид

$$\begin{array}{lrrrrrrr} W: & 2 & -32 & 1 & -1 & 1 & -1 & -4, \\ C: & -4 & 2 & -5 & 1 & -1 & 9 & 2. \end{array}$$

Если в процессе вычисления появляются новые ненулевые коэффициенты или какие-нибудь числа массива W становятся нулевыми, то правые части массивов W и C сдвигаются соответственно вправо или влево.

§ 3.4. Системы уравнений, близкие к расщепляемым

Как было указано ранее, возможность или невозможность расщепления уравнений зависит от свойств расчетной схемы, соответствующей исследуемой физической системе. Исходные данные, как правило, вводятся в машину приближенно. Сам расчет также осуществляется приближенно. Поэтому представляет интерес задача выявления случаев, когда исследуемая система уравнений не расщепляется, но близка к такой системе уравнений, для которой существует преобразование переменных, приводящее систему к отдельным подсистемам. Близость здесь понимается как приближенное равенство всех коэффициентов одной системы уравнений коэффициентам другой.

Для того чтобы выяснить: является ли рассматриваемая система близкой к расщепляемой, нужно значения величин ε_1 и ε_2 в алгоритме нахождения общего решения системы соответствующих алгебраических уравнений выбрать не столь малыми, как при «точной» декомпозиции. Тогда уравнения, близкие к линейно зависимым, будут признаны программой линейно зависимыми. В результате программа выдаст «коммутирующую» матрицу Z. Преобразование подобия с матрицей S, столбцами которой являются собственные векторы матрицы Z, дает требуемое приближенное приведение матриц коэффициентов к блочно-диагональному виду.

Поясним сказанное на примере. Изменим матрицы (1.4.3) следующим образом. Элемент с номером 21 матрицы B_3, равный 32, заменим на 30. Как показывает расчет по программе, измененная система уравнений уже не расщепляется. Теперь повторим расчет при $\varepsilon_1 = 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 0{,}5$. В этом случае получаем коммутирующую матрицу

$$Z = \begin{bmatrix} 0{,}25 & \underline{0{,}0666\ldots} & 0 \\ 1 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При исходных «неиспорченных» матрицах подчеркнутый элемент равен 0,0625, остальные элементы совпадают. Собственные числа матрицы Z следующие: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0{,}008194$, $\lambda_3 = 0{,}5082$. Матрица собственных векторов

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}2582 & 0{,}2582 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Преобразованные матрицы $\tilde{B}_i = S^{-1}B_iS$ имеют вид

$$\tilde{B}_1 = E, \quad \tilde{B}_2 = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\tilde{B}_3 = \left[\begin{array}{ll|l} 5 \qquad - & -4{,}0656 & 0{,}0656 \\ 3{,}94 & -4{,}746 & 0 \\ \hline 0{,}0651 & 0 & 10{,}746 \end{array}\right].$$

Таким образом, для примера, в котором «точное» расщепление невозможно, получено приведение матриц к такому виду, что вне диагональных блоков стоят малые числа. Сопоставление собственных чисел показывает, что отбрасывание этих малых элементов почти не влияет на результат (изменяется лишь четвертая или пятая значащая цифра).

§ 3.5. Расщепление уравнений возмущенного движения рельсовых экипажей

Уравнения движения рельсовых экипажей обычно составляются как уравнения Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i,$$

где П — потенциальная энергия, являющаяся квадратичной формой координат; T и Ф — кинетическая энергия и функция рассеивания, являющиеся квадратичными формами скоростей; $\{Q_i\}$ — горизонтальные силы, взаимодействия колес и рельс, возникающие в результате псевдоскольжения. При составлении выражений для этих сил используется гипотеза Картера

$$Q_i = -F\varepsilon_i,$$

где ε_i — «проскальзывание», соответствующее обобщенной координате q_i; F — коэффициент, определяемый экспериментально и называемый коэффициентом псевдоскольжения [38].

Рассмотрим применение способа коммутирующей матрицы к системе уравнений, описывающей движение четырехосного вагона с двойным рессорным подвешиванием в случае, когда рамы тележек не имеют поворотов относительно кузова ($\psi_1 = \psi_2 = \psi$). Такая система описана в работе [40]. Найти преобразования симметрии для этой системы из физических соображений не удалось.

Уравнения, представляющие интерес с точки зрения устойчивости движения, составляют систему связанных уравнений 28-го порядка:

$$\ddot{\mathbf{x}} + B_2\dot{\mathbf{x}} + B_3\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Здесь вектор x состоит из следующих компонентов:

$$\theta,\ y,\ \psi,\ \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2),\ y_1,\ y_2,\ y_{11},\ y_{12},\ y_{21},\ y_{22},\ \psi_{11},\ \psi_{12},\ \psi_{21},\ \psi_{22},$$

где θ, y, ψ — перемещения кузова (рисунок); θ_i, y_i — перемещения рамы i-й тележки; y_{ij}, ψ_{ij} — перемещения колесной пары с номером ij, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$.

Матрицы B_2 и B_3 приведены в табл. 3.3. и 3.4. Через m и J с соответствующими номерами и индексами обозначены массы и моменты инерции кузова, тележек и колесных пар; β_i и k_i — коэффициенты вязкости демпферов и жесткости пружин, приведенных на рисунке; v — скорость движения; 2μ и r — коничность и радиус круга катания колеса. Остальные геометрические размеры указаны на рисунке.

Общее решение системы (1.4.1) имеет вид:

$$Z = \begin{bmatrix} \alpha E_6 & & \\ & D & \\ & & D \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \beta & \alpha-\beta & \alpha-\beta & \beta-\alpha \\ \alpha-\beta & \beta & \beta-\alpha & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & \beta-\alpha & \beta & \alpha-\beta \\ \beta-\alpha & \alpha-\beta & \alpha-\beta & \beta \end{bmatrix},$$

где α и β — произвольные числа. По виду матрицы Z можно сказать, что первые шесть координат остаются неизменными.

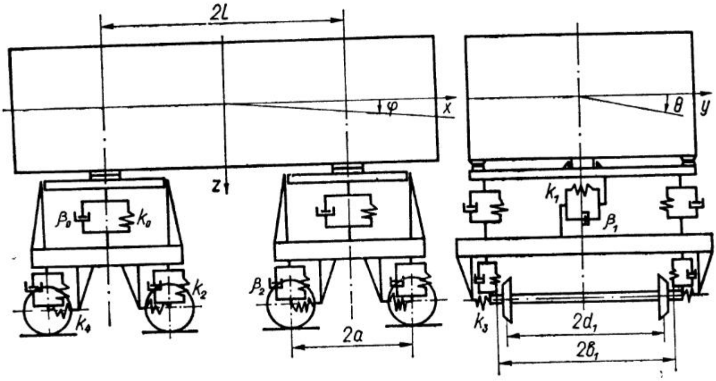


Рис. 3.1

Преобразованиям подвергаются координаты y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, ψ_{11}, ψ_{12}, ψ_{21}, ψ_{22}.

Выпишем собственные числа блока D: $\lambda_1 = -3\alpha + 4\beta$; $\lambda_{2,3,4} = \alpha$. Таким образом, матрица Z имеет два различных собственных числа: $\lambda = \alpha$ кратности 12 и $\lambda = -3\alpha + 4\beta$ кратности 2. Поэтому исходная система уравнений распадается на две подсистемы, состоящие из 12-ти и 2-х уравнений.

Числу $\lambda = -3\alpha + 4\beta$ соответствует собственный вектор матрицы $Z: v = (1 - 1 - 1\ 1)^{\text{т}}$. Для нахождения остальных трех собственных векторов получаем равенство:

$$u_{i4} = -u_{i1} + u_{i2} + u_{i3}. \tag{3.5.1}$$

Здесь u_{ij} — компоненты вектора $\mathbf{U}_i$, $i = 2, 3, 4$. Выбирая в этом равенстве свободные неизвестные u_{i1}, u_{i2}, u_{i3} различным

B_2	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{4b_1^2\beta_0 + 4h^2\beta_1}{J_x}$	$-\frac{4h\beta_1}{J_x}$		$-\frac{4b_1^2\beta_0}{J_x}$	$\frac{2h\beta_1}{J_x}$	$\frac{2h\beta_1}{J_x}$
2	$-\frac{4h\beta_1}{m}$	$\frac{4\beta_1}{m}$			$-\frac{2\beta_1}{m}$	$-\frac{2\beta_1}{m}$
3			$\frac{4l^2\beta_1}{J_z + 2J_{z1}}$		$-\frac{2l\beta_1}{J_z + 2J_{z1}}$	$\frac{2l\beta_1}{J_z + 2J_{z1}}$
4	$-\frac{4b_1^2\beta_0}{2J_{x1}}$			$\frac{8b_1^2\beta_2 + 4b_1^2\beta_0}{2J_{x1}}$		
5	$\frac{2h\beta_1}{m_1}$	$-\frac{2\beta_1}{m_1}$	$-\frac{2l\beta_1}{m_1}$		$\frac{2\beta_1}{m_1}$	
6	$\frac{2h\beta_1}{m_1}$	$-\frac{2\beta_1}{m_1}$	$\frac{2l\beta_1}{m_1}$			$\frac{2\beta_1}{m}$
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						

Таблица 3.3

7	8	9	10	11	12	13	14
$\frac{2F}{m_{11}V}$							
	$\frac{2F}{m_{11}V}$						
		$\frac{2F}{m_{11}V}$					
			$\frac{2F}{m_{11}V}$				
				$\frac{2Fd_1^2}{J_{z11}V}$			
					$\frac{2Fd_1^2}{J_{z11}V}$		
						$\frac{2Fd_1^2}{J_{z11}V}$	
							$\frac{2Fd_1^2}{J_{z11}V}$

B_3	1	2	3
1	$\frac{4b_1^2k_0 + 4h^2k_1}{J_x}$	$-\frac{4hk_1}{J_x}$	
2	$-\frac{4hk_1}{m}$	$\frac{4k_1}{m}$	
3			$\frac{4l^2k_1 + 8a^2k_3 + 8b_1^2k_4}{J_z + 2J_{z1}}$
4	$-\frac{4b_1^2k_0}{2J_{x1}}$		
5	$\frac{2hk_1}{m_1}$	$-\frac{2k_1}{m_1}$	$-\frac{2lk_1}{m_1}$
6	$\frac{2hk_1}{m_1}$	$-\frac{2k_1}{m_1}$	$\frac{2lk_1}{m_1}$
7			$-\frac{2ak_3}{m_{11}}$
8			$\frac{2ak_3}{m_{11}}$
9			$-\frac{2ak_3}{m_{11}}$
10			$\frac{2ak_3}{m_{11}}$
11			$-\frac{2b_1^2k_4}{J_{z11}}$
12			$-\frac{2b_1^2k_4}{J_{z11}}$
13			$-\frac{2b_1^2k_4}{J_{z11}}$
14			$-\frac{2b_1^2k_4}{J_{z11}}$

Таблица 3.4

4	5	6	7
$-\frac{4b_1^2k_0}{J_x}$	$\frac{2hk_1}{J_x}$	$\frac{2hk_1}{J_x}$	
	$\frac{2k_1}{m}$	$\frac{2k_1}{m}$	
	$-\frac{2lk_1}{J_z+2J_{z1}}$	$\frac{2lk_1}{J_z+2J_{z1}}$	$-\frac{2ak_3}{J_z+2J_{z1}}$
$\frac{8b_1^2k_2+4b_1^2k_0}{2J_{x1}}$			
	$\frac{4k_3+2k_1}{m_1}$		$-\frac{2k_3}{m_1}$
		$\frac{4k_3+2k_1}{m_1}$	
	$-\frac{2k_3}{m_{11}}$		$\frac{2k_3}{m_{11}}$
	$-\frac{2k_3}{m_{11}}$		
		$-\frac{2k_3}{m_{11}}$	
		$-\frac{2k_3}{m_{11}}$	
			$\frac{2Fd_1\mu}{rJ_{z11}}$

B_3	8	9	10
1			
2			
3	$\frac{2ak_3}{J_z + 2J_{z1}}$	$-\frac{2ak_3}{J_z + 2J_{z1}}$	$\frac{2ak_3}{J_z + 2J_{z1}}$
4			
5	$-\frac{2k_3}{m_1}$		
6		$-\frac{2k_3}{m_1}$	$-\frac{2k_3}{m_1}$
7			
8	$\frac{2k_3}{m_{11}}$		
9		$\frac{2k_3}{m_{11}}$	
10			$\frac{2k_3}{m_{11}}$
11			
12	$\frac{2Fd_1\mu}{rJ_{z11}}$		
13		$\frac{2Fd_1\mu}{rJ_{z11}}$	
14			$\frac{2Fd_1\mu}{rJ_{z11}}$

11	12	13	14
$-\dfrac{2b_1^2k_4}{J_z+2J_{z1}}$	$-\dfrac{2b_1^2k_4}{J_z+2J_{z1}}$	$-\dfrac{2b_1^2k_4}{J_z+2J_{z1}}$	$-\dfrac{2b_1^2k_4}{J_z+2J_{z1}}$
$-\dfrac{2F}{m_{11}}$			
	$-\dfrac{2F}{m_{11}}$		
		$-\dfrac{2F}{m_{11}}$	
			$-\dfrac{2F}{m_{11}}$
$\dfrac{2b_1^2k_4}{J_{z11}}$			
	$\dfrac{2b_1^2k_4}{J_{z11}}$		
		$\dfrac{2b_1^2k_4}{J_{z11}}$	
			$\dfrac{2b_1^2k_4}{J_{z11}}$

образом, можно получить различные наборы собственных векторов, т. е. находим множество всех возможных матриц преобразования S, при которых исходная система распадается на две подсистемы. Для наборов свободных неизвестных (100), (010), (001) получаем матрицу S:

$$S=\begin{bmatrix} E_6 & & \\ & S_1 & \\ & & S_1 \end{bmatrix},\quad S_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица соответствует следующему преобразованию координат:

$$\begin{aligned} y_{11} &= q_7+q_{10}, & \psi_{11} &= q_{11}+q_{14}, \\ y_{12} &= q_8-q_{10}, & \psi_{12} &= q_{12}-q_{14}, \\ y_{21} &= q_9-q_{10}, & \psi_{21} &= q_{13}-q_{14}, \\ y_{22} &= -q_7+q_8+q_9+q_{10}, & \psi_{22} &= -q_{11}+q_{12}+q_{13}+q_{14}. \end{aligned}$$

При другом выборе свободных неизвестных в равенстве (3.5.1) получится другое преобразование координат:

$$\begin{aligned} y_{11} &= q_7+q_8+q_9+q_{10}, & \psi_{11} &= q_{11}+q_{12}+q_{13}+q_{14}, \\ y_{12} &= q_7-q_8+q_9-q_{10}, & \psi_{12} &= q_{11}-q_{12}+q_{13}+q_{14}, \\ y_{21} &= q_7+q_8-q_9-q_{10}, & \psi_{21} &= q_{11}+q_{12}-q_{13}-q_{14}, \\ y_{22} &= q_7-q_8-q_9+q_{10}, & \psi_{22} &= q_{11}-q_{12}-q_{13}+q_{14}. \end{aligned}$$

Несмотря на то что общее решение системы (1.4.1) вычислялось при некоторых конкретных параметрах системы, полученные преобразования координат позволяют расщепить систему дифференциальных уравнений в общем виде, т. е. при любых параметрах. Это закономерно, поскольку расщепление соответствует некоторым свойствам симметрии исследуемой механической системы.

Были определены собственные числа исходной системы 28-го порядка и собственные числа подсистем 24-го и 4-го порядков, полученных при первом из приведенных выше преобразований координат. Собственные числа вычислялись на ЭВМ «Минск-22М» по программе, реализующей QR-алгоритм. Численные данные параметров системы соответствуют пассажирскому вагону на тележках КВЗ-5. Время определения собственных чисел для системы 28-го порядка — 63 с, для 24-го порядка — 37 с, для 4-го порядка — 3 с. Собственные числа подсистемы четвертого порядка: $\lambda_{1,2}=-302{,}8\pm 11{,}321i$, $\lambda_{3,4}=-9{,}4759\pm 11{,}374i$. Следовательно, отщепленная система 4-го порядка описывает быстрозатухающие движения, и ее можно не учитывать при исследовании устойчивости движения динамической системы. Поэтому можно рассматривать систему 24-го порядка, собственные числа которой вычисляются намного быстрее, что очено важно при использовании поисковых методов оптимизации параметров системы, требующих многократного вычисления собственных чисел.

§ 3.6. Приведение уравнений движения неконсервативной системы к главным фазовым координатам

3.6.1. Уравнения вида

$$B_1\ddot{\mathbf{x}} + B_2\dot{\mathbf{x}} + B_3\mathbf{x} = 0, \tag{3.6.1}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$; B_i — квадратные вещественные матрицы, не всегда приводятся к обычным главным координатам. Такое приведение возможно в случае, когда две из матриц B_i симметрические, причем одна из них положительно определена, а третья является линейной комбинацией первых двух. В таком случае приведение к диагональному виду первых двух матриц (§ 2.4) означает и приведение третьей. Выполнить это преобразование, как правило, проще, чем применить общую методику приведения системы уравнений к максимально возможному количеству подсистемы (см. гл. 6). Но результат во втором случае получился бы тот же: n отдельных уравнений второго порядка.

Линейная зависимость матриц не является необходимым условием того, чтобы уравнения приводились к главным координатам. Например, матрицы $B_1 = E$, $B_2 = \mathrm{diag}\,(1, 0, 0)$, $B_3 = \mathrm{diag}\,(1, 2, 3)$ линейно независимы и в то же время имеют диагональный вид. Соответствующая система уравнений уже приведена к главным координатам.

3.6.2. Приведем уравнения (3.6.1) к нормальной форме Коши

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in R^m. \tag{3.6.2}$$

Если A — матрица простой структуры, то, как было указано в § 2.4, уравнения (3.6.2) заменой переменных $\mathbf{u} = S\rho$ приводятся к отдельным уравнениям первого порядка

$$\dot{\rho}_k = \lambda_k\rho_k, \quad k = \overline{1, m}. \tag{3.6.3}$$

Здесь $S = v\,(A)$ — матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы A. Переменные ρ_k называют *главными* (собственными, нормальными) *фазовыми координатами.*

Решения $u_k = c_k e^{\lambda_k t}$ уравнений (3.6.3) — это *главные колебания (главные движения)* исследуемой системы. Общее решение уравнений (3.6.2) имеет вид

$$\mathbf{u} = S \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \cdots \\ c_m e^{\lambda_m t} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{\lambda_k t} \mathbf{a}_k,$$

где $\mathbf{a}_k$ — собственные векторы матрицы A; c_k — свободные переменные, зависящие от начальных условий. Поэтому в случае неконсервативной системы *формами колебаний* называют собственные векторы $\mathbf{a}_k$ матрицы A, а *коэффициентами распределения амплитуд* — элементы этих векторов.

3.6.3. Главные фазовые координаты, как правило, комплексные. Поэтому для расчетов удобней переход к отдельным уравнениям или подсистемам второго порядка с вещественными коэффициентами и переменными.

Можно построить преобразование фазовых координат

$$\begin{cases} \mathbf{x} = H_{11}\mathbf{z} + H_{12}\dot{\mathbf{z}}, \\ \dot{\mathbf{x}} = H_{21}\mathbf{z} + H_{22}\dot{\mathbf{z}}, \end{cases}$$

приводящее уравнения (3.6.1) к действительным уравнениям вида

$$\ddot{z}_j + p_j \dot{z}_j + g_j z_j = 0,$$

где $p_j = -(\lambda_{2j-1} + \lambda_{2j})$; $g_j = \lambda_{2j-1} \cdot \lambda_{2j}$.
Способы вычисления матриц преобразования приведены в работе [7]. Здесь же изложим другой прием.

Пусть $U(A)$ — вещественная матрица, построенная следующим образом: если собственное число λ_k матрицы A вещественное, то k-й столбец матрицы $U(A)$ — это собственный вектор $\mathbf{a}_k$, а если λ_k и λ_{k+1} — пара комплексно сопряженных собственных чисел, то в k-м и $(k+1)$-м столбцах матрицы $U(A)$ расположены соответственно действительная и мнимая части собственного вектора $\mathbf{a}_k$. Рассмотрим результат умножения матрицы A на такие два столбца матрицы $U(A)$. Обозначим эти столбцы через $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$. Из равенств $\mathbf{a}_k = \mathbf{c} + i\mathbf{d}$ и $\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{c} - i\mathbf{d}$ получаем $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_{k+1})$, $\mathbf{d} = \frac{1}{2i}(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{k+1})$.

Обозначим также $\lambda_k = \alpha + i\beta$. Тогда $\alpha = \frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_{k+1})$, $\beta = \frac{1}{2i}(\lambda_k - \lambda_{k+1})$.

С учетом введенных обозначений имеем

$$A[\mathbf{c}\ \mathbf{d}] = [A\mathbf{c}\ \ A\mathbf{d}] = \frac{1}{2}\left[A(\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_{k+1})\ \frac{1}{i}A(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{k+1})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lambda_k \mathbf{a}_k + \lambda_{k+1}\mathbf{a}_{k+1}\ \frac{1}{i}\left(\lambda_k \mathbf{a}_k - \lambda_{k+1}\mathbf{a}_{k+1}\right)\right] =$$

$$= [\alpha\mathbf{c} - \beta\mathbf{d} \quad \beta\mathbf{c} + \alpha\mathbf{d}] = [\mathbf{c}\ \ \mathbf{d}]\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Далее числа α, β и векторы $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, соответствующие комплексным собственным числам λ_k и λ_{k+1}, будем обозначать с индексом k. Пусть первые $r-1$ собственных чисел матрицы вещественные, а остальные — комплексные. Матрица $U(A)$ в этом случае будет иметь вид: $U(A) = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{r-1}\mathbf{c}_r\mathbf{d}_r \ldots \ldots \mathbf{c}_{m-1}\mathbf{d}_{m-1}]$. Рассмотрим преобразование подобия

$$\tilde{A} = U^{-1}(A)\,AU(A) = U^{-1}(A)\,A\,[\mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}_{r-1}\ \ \mathbf{c}_r\ \ \mathbf{d}_r\ \ldots$$

$$\ldots\ \mathbf{c}_{m-1}\ \mathbf{d}_{m-1}] = U^{-1}(A)\Bigg[\lambda_1\mathbf{a}_1\ \ldots\ \lambda_{r-1}\mathbf{a}_{r-1}\,[\mathbf{c}_r\ \ \mathbf{d}_r]\begin{bmatrix} \alpha_r & \beta_r \\ -\beta_r & \alpha_r \end{bmatrix}\ldots$$

$$\ldots[\mathbf{c}_{m-1}\ \ \mathbf{d}_{m-1}]\begin{bmatrix} \alpha_{m-1} & \beta_{m-1} \\ -\beta_{m-1} & \alpha_{m-1} \end{bmatrix}\Bigg] = U^{-1}(A)\,[\mathbf{a}_1\ \ldots$$

$$\ldots\mathbf{a}_{r-1}\ \ \mathbf{c}_r\ \ \mathbf{d}_r\ \ldots\ \mathbf{c}_{m-1}\ \ \mathbf{d}_{m-1}]\operatorname{diag} B_j = \operatorname{diag} B_j =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & 0 \\ & \cdot & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & \\ & & & & \lambda_{r-1} & & & & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} \alpha_r & \beta_r \\ -\beta_r & \alpha_r \end{matrix}} & & & \\ & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & \cdot \\ 0 & & & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \alpha_{m-1} & \beta_{m-1} \\ -\beta_{m-1} & \alpha_{m-1} \end{matrix}} \end{bmatrix}.$$

Полученный результат означает, что замена переменных

$$\mathbf{u} = H\xi \quad (H = U(A)) \tag{3.6.4}$$

приводит уравнения (3.6.2) к отдельным вещественным подсистемам первого и второго порядков. Преобразованные уравнения имеют вид:

$$\dot{\xi}_j = \lambda_j \xi_j, \quad j = \overline{1, r-1};$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_j &= \alpha_j \xi_j + \beta_j \xi_{j+1}, \\ \dot{\xi}_{j+1} &= -\beta_j \xi_j + \alpha_j \xi_{j+1}, \end{aligned}\right\} \quad j = r,\ r+2,\ \ldots,\ m-1. \tag{3.6.5}$$

Для однообразия первые уравнения можно объединить по два. Тогда уравнения будут состоять из отдельных подсистем второго порядка.

Если при исследовании вынужденных колебаний, описываемых уравнениями $\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u} + \mathbf{f}(t)$, выполнить замену переменных (3.6.4), то в каждое из уравнений (3.6.5) добавится слагаемое $f_k^*(t)$, где $[f_1^*(t) \ldots f_m^*(t)]^{\mathrm{T}} = H^{-1}f(t)$. Решив полученные уравнения, найдем с помощью преобразования (3.6.4) значения переменных $\mathbf{u}$.

Возможны и другие применения уравнений (3.6.5), аналогичные применениям обычных главных координат.

3.6.4. Применение главных фазовых координат для исследования устойчивости движения многомассовых систем. В ряде случаев спектр линеаризованной системы такой, что первые p собственных чисел расположены на комплексной плоскости вблизи мнимой оси. Именно этими числами определяется устойчивость движения системы. Вторая часть спектра находится в левой полуплоскости вдали от мнимой оси. Этим собственным числам соответствуют быстрозатухающие решения. Пусть рассматриваемая система имеет вид

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{u}), \tag{3.6.6}$$

где $\mathbf{u} \in R^m$; A — матрица линеаризованной системы уравнений; $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ — вектор нелинейных «добавок».

Выполним преобразование (3.6.4). При этом первые p координат вектора ξ обозначим через $\mathbf{w}$, остальные — через $\mathbf{v}$. После преобразования система (3.6.6) приобретает вид:

$$\dot{\mathbf{w}} = A_1\mathbf{w} + \mathbf{f}_1(\mathbf{w}, \mathbf{v}), \tag{3.6.7}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = A_2\mathbf{v} + \mathbf{f}_2(\mathbf{w}, \mathbf{v}), \tag{3.6.8}$$

где A_1 и A_2 — блоки преобразованной матрицы $\tilde{A} = H^{-1}AH = \mathrm{diag}(A_1, A_2)$. На главной диагонали этих блоков находятся вещественные собственные числа матрицы A и блоки второго порядка, соответствующие комплексным собственным числам.

В подсистеме (3.6.8) линейная часть описывает быстрозатухающие движения. Если норма вектор-функции $\mathbf{f}_2(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ достаточно мала, то и вся подсистема (3.6.8) описывает быстрозатухающие движения. Тогда переменные $\mathbf{v}$ можно отбросить, так как они не влияют на устойчивость движения. В результате из (3.6.7) получается система уравнений низкого порядка:

$$\dot{\mathbf{w}} = A_1\mathbf{w} + \varphi(\mathbf{w}). \tag{3.6.9}$$

Вопрос о малости $\| \mathbf{f}_2 (\mathbf{w}, \mathbf{v}) \|$ требует самостоятельного изучения, но в ряде практических задач изложенный выше подход дает хорошие результаты.

Заметим, что для исключения быстрозатухающих решений не обязательно находить все собственные векторы матрицы A. Пусть прямоугольная матрица S_1 состоит из первых p столбцов матрицы $U(A)$, а S_1' — такая $p \times m$-матрица, что $S_1' S_1 = E_p$. В качестве матрицы S_1' можно взять любое из множества решений системы линейных алгебраических уравнений, соответствующей матричному уравнению $S_1' S_1 = E_p$. Неизвестными в такой системе уравнений являются все элементы матрицы S_1'.

Если сделать в уравнениях (3.6.6) замену переменных $\mathbf{u} = S_1 \mathbf{w}$ и умножить полученную систему уравнений слева на S_1', то получим систему уравнений низкого порядка, аналогичную системе (3.6.9): $\mathbf{w} = \tilde{A}_1 \mathbf{w} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{w})$, $\tilde{A}_1 = S_1' A S_1$, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{w}) = S_1' F(S_1 \mathbf{w})$. Спектр матрицы $\tilde{A}_1$ — это первая часть спектра матрицы A.

В качестве столбцов матрицы S_1 можно взять (вместо вещественных и мнимых частей первых собственных векторов) любой базис подпространства L, натянутого на эти собственные векторы.

Существуют методы нахождения подпространства L, не связанные с предварительным определением собственных чисел и векторов матрицы. Рассмотрим один из таких методов.

Осуществим сначала конформное отображение, при котором собственные числа с максимальной вещественной частью станут наибольшими по абсолютной величине, а затем воспользуемся степенным методом, выделяющим наибольшие по абсолютной величине собственные числа и их векторы. Требуемое конформное отображение производится с помощью функции $f(z) = e^{\theta z}$. Эту функцию следует приблизить многочленом $P_k(z) \approx e^{\theta z}$ на области, где находятся все собственные числа матрицы A. Например, если область имеет форму круга с центром в точке C, то функцию $e^{\theta z}$ можно приблизить отрезком ряда Тейлора:

$$P_k(z) = \sum_{m=1}^{k} \frac{\theta^m}{m!} (z - C)^m.$$

Пусть $D = P_k(A)$. Тогда собственные числа матрицы D приближенно равны $e^{\theta \lambda_k}$, а собственные векторы точно равны собственным векторам матрицы A. Следовательно, высокой точности при вычислении экспоненты не требуется, поскольку здесь нас интересует подпространство, а не собственные числа. Выбрав параметр θ достаточно малым, можно получить удовлетворительную точность при нескольких членах ряда. При разреженной матрице A имеет смысл выбрать небольшое число членов ряда и, не вычисляя матрицу D, проводить вычисления по формуле $\mathbf{x}_{j+1} = P_k(A)\,\mathbf{x}_j$ так, чтобы использовать разреженность матрицы A. Например, в случае трех членов ряда можно использовать равенство $(A^2 + cA + dE)\,\mathbf{x} = A\,(A\mathbf{x} + c\mathbf{x}) + d\mathbf{x}$.

Степенной метод дает плохую сходимость в случае близких по модулю собственных чисел, которым при предварительном использовании упомянутого выше конформного отображения соответствуют собственные числа матрицы A с близкими вещественными частями. Поэтому итерации надо производить до тех пор, пока вектор $\mathbf{x}_j$ не станет принадлежать подпространству размерности p. Чтобы убедиться, что выделилось нужное подпространство, надо подсчитать число линейно независимых векторов среди векторов $\mathbf{x}_{j+1}$, $\mathbf{x}_{j+2}, \ldots$ $\ldots, \mathbf{x}_{j+p+1}$, где $\mathbf{x}_{j+1} = D\mathbf{x}_j$. Если добавление последнего вектора делает систему векторов линейно зависимой, а сами эти векторы линейно независимы, то они уже принадлежат подпространству L, поскольку следующие векторы, $\mathbf{x}_{j+p+2}$ и $\mathbf{x}_{j+p+3}$, как нетрудно доказать, снова будут зависеть от первых.

Рассмотренный метод нахождения подпространства L и составление матрицы A_1 можно рассматривать как один из методов решения частичной проблемы собственных значений, поскольку нахождение собственных чисел и векторов матрицы низкого порядка A_1 не представляет трудностей. Такой метод обладает следующими достоинствами: сравнительная простота; возможность эффективного использования преимуществ разреженных матриц; возможность применения метода для уточнения собственных векторов или подпространства L, если они уже приближенно известны; неизменяемость матрицы A в процессе итераций и, следовательно, отсутствие накопления ошибок.

Глава 4

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОБЩЕЙ АЛГЕБРЕ

В настоящей главе изложены сведения, необходимые для чтения последующих глав. Из огромного конгломерата алгебраических наук выбраны только вопросы, непосредственно связанные с задачей декомпозиции. Для чтения гл. 5 достаточно изучить § 4.1, 4.2 и 4.3.

Методы общей алгебры применяются, как правило, к физическим задачам, в которых используются самосопряженные операторы и симметрические матрицы коэффициентов. Применяемые в этих случаях группы симметрии либо конечны, либо, по крайней мере, компактны; для их представлений условия приводимости и разложимости совпадают. Из теории алгебр применяются в основном полупростые алгебры.

Развитие динамики неконсервативных систем привело к необходимости исследования дифференциальных уравнений с несимметрическими матрицами коэффициентов. Как алгебра, порожденная несимметрическими матрицами, так и ее централизатор в общем случае представляет собой неполупростые алгебры. Поэтому в шестой и седьмой главах для декомпозиции уравнений с произвольными (в том числе несимметрическими) матрицами используется ряд результатов теории представлений, которые ранее не применялись в прикладных задачах. Сравнительно краткая сводка этих результатов приведена в § 4.4 и 4.5 настоящей главы.

Для более глубокого знакомства с общей алгеброй можно рекомендовать монографии [32, 26]. Там же приведены списки основной литературы по алгебре.

§ 4.1. Группа, кольцо

Пусть U — некоторое множество, и пусть выполняется операция над упорядоченными парами элементов этого множества. Будем говорить, что множество U *замкнуто относительно этой операции,* если в результате операции получается опять элемент множества U. Например, множество натуральных чисел N замкнуто относительно сложения и не замкнуто относительно вычитания. В частности, $(2+3) \in N$, $(2-3) \notin N$.

Множество G называется *группой*, если оно замкнуто относительно некоторой операции (условно называемой умножением) и для этой операции выполняются следующие аксиомы.

1. $(\mathbf{ab})\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\mathbf{bc})$ — ассоциативность,

2. $\exists\,\mathbf{e} : \mathbf{ae} = \mathbf{ea} = \mathbf{a}\ \forall\,\mathbf{a}$ — существование *единичного элемента*,

3. $\forall\,\mathbf{a}\,\exists\,\mathbf{a}^{-1} : \mathbf{aa}^{-1} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{e}$ — существование *обратного элемента*.

Здесь $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}, \mathbf{a}^{-1} \in G$.

Если, кроме указанных, выполняется еще аксиома

4. $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ — коммутативность,

то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*. В этом случае групповую операцию, как правило, называют сложением и обозначают знаком «$+$», а элемент $\mathbf{e}$ называют *нулем*.

Примеры.

4.1. Множество вещественных чисел является абелевой группой относительно сложения.

4.2. Множество вещественных чисел не является группой относительно умножения, поскольку число 0 не имеет обратного. Но множество всех остальных вещественных чисел образует абелеву группу относительно умножения.

4.3. Множество, состоящее из двух элементов -1 и 1, является абелевой группой относительно умножения.

4.4. Множество всех неособенных матриц порядка n с обычной операцией умножения матриц — пример неабелевой группы.

4.5. Множество всех поворотов пространства вокруг оси Oz образует абелеву группу относительно операции последовательного выполнения поворотов.

4.6. Множество всех преобразований пространства, совмещающих данную геометрическую фигуру с собой,— это группа относительно операции последовательного выполнения преобразований (*группа симметрии*). Единичным элементом этой группы является «тождественное преобразование», оставляющее фигуру на месте. Обратным для каждого из преобразований является преобразование, возвращающее фигуру в исходное положение. Именно группы симметрии используются для выполнения декомпозиции уравнений в соответствии со свойствами симметрии расчетной схемы (гл. 5).

Группа, состоящая из конечного числа элементов, называется *конечной*.

Подмножество группы, замкнутое относительно той же групповой операции, называется *подгруппой*.

Например, группа действительных чисел с операцией сложения имеет подгруппу целых чисел.

Конечную группу удобно описывать с помощью *таблицы умножения,* т. е. таблицы, в которой указаны значения всех возможных произведений элементов группы. Для группы из примера 4.3 таблица умножения приведена на рис. 4.1.

Пусть M — некоторое подмножество группы G. Составим множество S из всевозможных произведений вида $\mathbf{t}_1 \times \times \mathbf{t}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{t}_k$, где либо $\mathbf{t}_j \in S$, либо $\mathbf{t}_j^{-1} \in S$, $j = \overline{1, k}$. Понятно, что S — это группа, содержащая множество M. Она называется *группой, порожденной множеством* M, а элементы множества M называются *образующими* группы S.

I сомножитель \ II сомножитель	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Рис. 4.1

Часто бывает удобно задать операцию на конечной группе не с помощью таблицы умножения, а с помощью графа группы. Вершины такого графа изображают элементы группы. Каждая дуга графа соответствует умножению справа на образующую, т. е. если дуга направлена от одного элемента к другому, то это означает, что второй элемент равен произведению первого элемента и образующей.

Будем рассматривать только графы конечных групп. Для построения такого графа используется система образующих, которая является минимальной в том смысле, что после удаления любого элемента из этого множества остаток уже не составляет систему образующих.

Рассмотрим сначала граф группы G, имеющей одну образующую $a \in G$. Такая группа называется *циклической*. Она состоит из элементов a, a^2, ..., a^n, где n — число элементов группы. Докажем, что $a^n = e$. Если бы это было не верно, то $\exists k < n$: $a^k = e$, поскольку единичный элемент обязан принадлежать группе. Тогда

$$a^n = a^k a^{n-k} = e a^{n-k} = a^{n-k},$$

т. е. группа состояла бы из меньшего, чем n, числа элементов.

Итак, $a^n = e$. Поэтому граф циклической группы представляет собой многоугольник, сторонам которого дано направление от элемента a^m к элементу a^{m+1} (рис. 4.2). Для построения графа группы, имеющей r образующих, нарисуем на плоскости вершины графа, изображающие все элементы группы. Далее из каждой вершины графа проводим r ориентированных дуг графа, соответствующих образующим.

Заканчивается дуга в вершине, изображающей элемент, равный соответствующему произведению. Дуги для разных образующих изображаются линиями разных цветов или разного типа (сплошными, штриховыми и т. п.). Если образующая a обладает свойством $a^2 = e$, то любая соответствующая ей дуга проходит рядом с дугой, направленной в противоположную сторону и соединяющей те же элементы. Рекомендуется каждую пару таких дуг заменить одной неориентированной дугой.

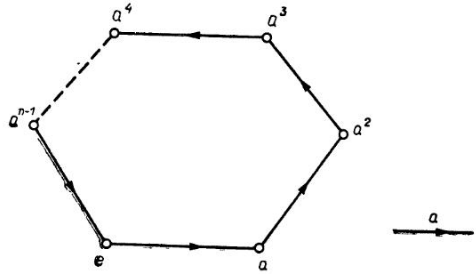


Рис. 4.2

Множество K, замкнутое относительно двух операций (сложения и умножения), называется *кольцом*, если относительно операции сложения оно является абелевой группой (нуль этой группы называется *нулем кольца*), а операция умножения связана с операцией сложения законами дистрибутивности, т. е. для любых трех элементов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in K$ выполняются равенства

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac} \text{ и } (\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba} + \mathbf{ca}.$$

Умножение, определенное в кольце, не обязано быть ни ассоциативным, ни коммутативным. Если умножение, определенное в кольце K, ассоциативное (т. е. для любых трех элементов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in K$ $\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c}$), то кольцо называется *ассоциативным* кольцом. Если, кроме того, умножение, определенное в K, коммутативно, то K называется *коммутативным* кольцом. Далее будем рассматривать только ассоциативные кольца.

Если кольцо K содержит *единицу*, т. е. такой элемент $\mathbf{e}$, что для $\forall \mathbf{a} \in K$ выполняется условие $\mathbf{ae} = \mathbf{ea} = \mathbf{a}$, то K называется *кольцом с единицей*.

Примером некоммутативного кольца является множество матриц порядка n с операциями сложения и умножения матриц.

Частными случаями кольца являются поле действительных чисел R и поле комплексных чисел C.

Ненулевой элемент $\mathbf{a}$ кольца называется *нильпотентным*, если $\exists m : \mathbf{a}^m = 0$. Пример нильпотентного элемента в кольце матриц порядка 2 — матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Для этой матрицы выполняется равенство $A^2 = 0$. Кольца вещественных и комплексных чисел не содержат ненулевых нильпотентных элементов.

Элемент $\mathbf{p}$ кольца называется *идемпотентом,* если для него выполняется равенство $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}$. Идемпотент в кольце матриц порядка n называется *проектором.* Пример проектора — это матрица $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Название «проектор» объясняется следующим. Умножение такой матрицы P на любой элемент пространства C^n переводит этот элемент в подпространство $P\,C^n$. Умножение проектора P на элемент подпространства PC^n оставляет элемент неизменным. Действительно, если $\mathbf{x} \in PC^n$, то $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in C^n$. Поэтому $P\mathbf{x} = PP\mathbf{y} = P\mathbf{y} = \mathbf{x}$.

§ 4.2. Линейное пространство и модуль

Множество A, замкнутое относительно операций сложения элементов $(\mathbf{a},\ \mathbf{b} \in A \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in A)$ и умножения элементов на комплексные числа $(\mathbf{a} \in A,\ \alpha \in C \Rightarrow \alpha\mathbf{a} \in A)$, называется комплексным линейным (векторным) пространством, если выполняются следующие условия.

I. Относительно сложения A — абелева группа:

1. $(\mathbf{ab})\ \mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\mathbf{bc})$,
2. $\exists\, \mathbf{e} : \mathbf{ae} = \mathbf{ea} = \mathbf{a}$,
3. $\forall\, \mathbf{a}\ \exists\, \mathbf{a}^{-1} : \mathbf{aa}^{-1} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{e}$,
4. $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$;

II. Операция — умножение на число имеет следующие свойства:

5. $\alpha\,(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\ \mathbf{a}$,
6. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}\quad \forall\, \mathbf{a}$;

III. Выполняются законы дистрибутивности:

7. $(\alpha + \beta)\,\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$,
8. $\alpha\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$.

Здесь $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}, \mathbf{a}^{-1} \in A$; $\alpha, \beta \in C$.

Аналогично определяется и вещественное линейное пространство. Там, где это не приводит к недоразумениям, пишут просто — *линейное пространство.*

Примером линейного пространства является арифметическое линейное пространство, рассмотренное в § 2.1.

Подмножество U линейного пространства A называется *подпространством,* если оно является линейным пространством, т. е. если это подмножество замкнуто относительно операций сложения и умножения на число.

Подпространство арифметического линейного пространства является подпространством и в смысле проведенного здесь определения. Подпространствами трехмерного пространства являются плоскости и прямые, проходящие через начало координат.

Множество $\{\mathbf{0}\}$, состоящее из одного нулевого элемента, всегда является подпространством. Все пространство A также является своим подпространством. Подпространство, не совпадающее ни с основным пространством, ни с нулевым элементом, называется *нетривиальным*.

Подпространство L называется *инвариантным* относительно матрицы D, если любой элемент подпространства L остается в нем после умножения на матрицу D, т. е. если $x \in L \Rightarrow Dx \in L$. Пример такого подпространства — множество $\alpha\mathbf{a}$, где $\alpha \in C$, $\mathbf{a}$ — собственный вектор матрицы D. Нетрудно доказать, что любое инвариантное относительно матрицы подпространство является линейной оболочкой некоторых векторов ее канонического базиса.

Множество $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ элементов пространства A называется его *базисом*, если выполняются следующие два условия:

а) элементы $\{\mathbf{a}_k\}$ линейно независимы, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{n} \rho_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0} \Rightarrow$ $\Rightarrow \rho_k = 0,\ k = \overline{1, n}$;

б) пространство A — линейная оболочка элементов $\{\mathbf{a}_k\}$, т. е. $\forall \mathbf{x} \in A$ является линейной комбинацией элементов $\{\mathbf{a}_k\}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{a}_k. \tag{4.2.1}$$

Если пространство имеет базис, состоящий из n элементов, то оно называется *n-мерным*. Если же пространство не имеет базиса из конечного числа элементов, то оно называется *бесконечномерным*. Мы далее будем рассматривать только конечномерные пространства. В курсе линейной алгебры доказывается, что два различных базиса одного и того же пространства имеют одинаковое количество элементов.

Заметим, что числа $\{\alpha_k\}$ в формуле (4.2.1) называются *координатами* элемента $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{a}_k\}$. Они определяются однозначно. Действительно, допустим $\{\alpha_k'\}$ — другие координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{a}_k\}$. Тогда вычитая равенство $\mathbf{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k' \mathbf{a}_k$ из равенства (4.2.1), получаем $\sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k' - \alpha_k)\, \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. В силу линейной независимости элементов $\{\mathbf{a}_k\}$ находим $\alpha_k' - \alpha_k = 0$.

Пусть $\{\mathbf{b}_k\}$ — другой базис, а $\{\beta_k\}$ — координаты в этом базисе. Какая зависимость между координатами элемента в различных базисах?

Выразим элементы нового базиса $\{\mathbf{b}_j\}$ в старом базисе $\{\mathbf{a}_k\}$ $\mathbf{b}_j = s_{1j}\mathbf{a}_1 + s_{2j}\mathbf{a}_2 + \cdots + s_{nj}\mathbf{a}_n = \sum_{k=1}^{n} s_{kj}\mathbf{a}_k$, $j = \overline{1, n}$. Матрица чисел $S = \{s_{kj}\}$ называется матрицей перехода от старого базиса к новому. Эта матрица неособенная. Запишем элемент $\mathbf{x}$ в новом базисе

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{b}_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{k=1}^{n} s_{kj}\mathbf{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j}^{n} s_{kj}\beta_j \right) \mathbf{a}_k.$$

Сравнивая последнюю запись с выражением (4.2.1) и учитывая однозначность определения координат вектора, получаем $\alpha_k = \sum_{j=1}^{n} s_{kj}\beta_j$, или в матричной записи

$$\boldsymbol{\alpha} = S\boldsymbol{\beta}, \tag{4.2.2}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n]^{\mathrm{T}}$.

Рассмотрим, как изменяется матрица, задающая некоторое преобразование, при переходе к новому базису. Умножив матрицу D на координаты $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n]^{\mathrm{T}}$ элемента $\mathbf{x}$, получим вектор

$$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n]^{\mathrm{T}} = D\boldsymbol{\alpha}, \tag{4.2.3}$$

содержащий координаты некоторого элемента $\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \mathbf{a}_k$ пространства A. Пусть в новом базисе $\{\mathbf{b}_k\}$ элемент $\mathbf{y}$ имеет вектор координат $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1\eta_2 \ldots \eta_n]^{\mathrm{T}}$. Тогда $\boldsymbol{\gamma} = S\boldsymbol{\eta}$. Подставив это выражение и выражение (4.2.2) в (4.2.3), получим $S\boldsymbol{\eta} = DS\boldsymbol{\beta}$; отсюда $\boldsymbol{\eta} = \tilde{D}\boldsymbol{\beta}$, где

$$\tilde{D} = S^{-1}DS. \tag{4.2.4}$$

Таким образом, при переходе от одного базиса к другому координаты векторов изменяются по формуле (4.2.2), а матрицы преобразуются по формуле (4.2.4).

Возможна еще одна форма записи соотношения (4.2.4). Пусть $\{\mathbf{s}_k\}$ — столбцы матрицы S. Тогда из правил умножения матриц получаем, что равенство $DS = S\tilde{D}$, эквивалентное (4.2.4), может быть записано в виде

$$D\mathbf{s}_k = \sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_{jk}\mathbf{s}_j, \quad k = \overline{1, n}, \tag{4.2.5}$$

где $\tilde{d}_{jk}$ — элементы матрицы $\tilde{D}$.

Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей; *K-модулем* (или *модулем над кольцом* K) называется множество M с операциями сложения элементов M и умножения справа элементов множества M на элементы кольца K. При этом должны выполняться такие же свойства, как и в определении линейного пространства.

Таким образом, комплексное линейное пространство является модулем над полем C, действительное — над полем R.

Понятия *подмодуль, базис модуля* вводятся так же, как и для линейного пространства.

Подпространства U и W пространства A называются взаимно *ортогональными*, если для любых $\mathbf{u} \in U$ и $\mathbf{w} \in W$ выполняется условие $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$.

Базис пространства называется *ортогональным*, любой элемент $\mathbf{a}_k$ базиса ортогонален остальным его элементам. Если, кроме того, скалярный квадрат $(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k)$ любого элемента базиса равен единице, то базис называется *ортонормальным*. От произвольного базиса всегда можно перейти и к ортогональному и к ортонормальному базисам. Эти процессы называются соответственно *ортогонализацией* и *ортонормировкой*. Так, от базиса $\{\mathbf{a}_k\}$ можно перейти к ортонормальному базису $\{\mathbf{b}_k\}$ по следующим рекуррентным формулам (ортонормировка Грамма — Шмидта):

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{d}_k / \sqrt{(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_k)},$$

$$\mathbf{d}_k = \begin{cases} \mathbf{a}_k & \text{при} \quad k = 1, \\ \mathbf{a}_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} (\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_j)\,\mathbf{b}_j & \text{при} \quad k > 1. \end{cases}$$

§ 4.3. Представления конечных групп

Взаимно-однозначное соответствие между элементами двух групп F и G, обозначаемое $\mathbf{f} \leftarrow\rightarrow \mathbf{g}$ $(\mathbf{g} \in G,\ \mathbf{f} \in F)$, называется изоморфным, если из любой пары соотношений $\mathbf{f}_1 \leftarrow\rightarrow \mathbf{g}_1$, $\mathbf{f}_2 \leftarrow\rightarrow \mathbf{g}_2$ $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in F;\ \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in G)$ вытекает соотношение $\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 \leftarrow\rightarrow \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$. Группы, между элементами которых можно установить изоморфное соответствие, называются *изоморфными*.

Всякая алгебраическая теорема, установленная применительно к некоторой группе G, автоматически распространяется на все группы, изоморфные G. Другими словами, с точки зрения теории групп изоморфные группы одинаковы.

Группа G называется *гомоморфной* группе F, если каждому элементу $\mathbf{g} \in G$ можно поставить в соответствие некоторый элемент $\mathbf{f} \in F$ таким образом, что из соотношений $\mathbf{g}_1 \rightarrow \mathbf{f}_1$, $\mathbf{g}_2 \rightarrow \mathbf{f}_2$ вытекает $\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2 \rightarrow \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2$ $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in G;\ \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 \in F)$. Гомоморфное соответствие двух групп отличается от изоморфного отсутствием требования взаимной однозначности. Изоморфизм, таким образом, является частным случаем гомоморфизма.

Мы будем говорить, что задано матричное *представление* Т *группы* G, если каждому элементу $\mathbf{g}$ группы G отвечает матрица $\mathrm{T}(g)$ так, что произведению элементов группы отвечает произведение матриц, т. е.

$$\mathrm{T}(g_1)\,\mathrm{T}(g_2) = \mathrm{T}(g_1,\ g_2).$$

Далее рассматриваются только матричные представления, поэтому слово матричное будем опускать.

Подпространство L пространства C^n называется *инвариантным относительно представления* $\mathrm{T}(g_\nu)$, если оно инвариантно относительно всех матриц представления: $\mathbf{x} \in L \Rightarrow \mathrm{T}(g_\nu)\ \mathbf{x} \in L\ \ \forall\nu$.

Когда для данного представления $\mathrm{T}(g_\nu)$ существует нетривиальное (т. е. не совпадающее ни со всем пространством C^n, ни с нулевым элементом) инвариантное подпространство, то представление называется *приводимым*, а если такого подпространства не существует, то — *неприводимым*. Заметим, что абелева группа имеет только одномерные неприводимые представления. В этом случае число различных неприводимых представлений равно числу n элементов группы.

Для конечных групп выполняется следующее правило: каждое нетривиальное инвариантное относительно группы подпространство L_1 имеет ортогональное дополнение, т. е. такое инвариантное подпространство L_2, что $\mathbf{x} \in C^n \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, $\mathbf{y} \perp \mathbf{z}$, где $\mathbf{y} \in L_1$, $\mathbf{z} = L_2$. В таком случае говорят, что пространство C^n разлагается в прямую сумму подпространств L_1 и L_2.

Пусть $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ — базис подпространства L_1, а $\mathbf{b}_{m+1} \ldots \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис подпространства L_2. Пусть S — матрица преобразования, столбцами которой являются векторы $\mathbf{b}_1, \ldots \ldots, \mathbf{b}_n$. Тогда преобразованные матрицы представления становятся блочно-диагональными

$$\tilde{\mathrm{T}}(g_\nu) = S^{-1}\mathrm{T}(g_\nu)\,S = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_1(g_\nu) & 0 \\ 0 & \mathrm{T}_2(g_\nu) \end{bmatrix}.$$

Такое преобразование соответствует переходу от базиса, состоящего из единичных векторов, к базису $\{\mathbf{b}_j\}$. Матрицы $\mathrm{T}_1(g_\nu)$ образуют представление группы G в подпространстве L_1, а $\mathrm{T}_2(g_\nu)$ — в подпространстве L_2. В этом случае будем говорить, что *подпространство* L_k *преобразуется по представлению* $\mathrm{T}_j(g_\nu)$, $j = 1, 2$.

Каждое из подпространств L_j, в свою очередь, либо преобразуется по неприводимому представлению, либо представляет собой прямую сумму инвариантных подпространств меньших размерностей. Поскольку размерность подпространств не меньше единицы, разделение C^n на инвариантные подпространства приведет к тому, что мы получим разложение всего пространства C^n в прямую сумму инвариантных подпространств, преобразующихся по неприводимым представлениям $\tau_j(g_\nu)$.

Таблица 4.1

j	$\tau_j(g_\nu)$			
	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$
1	1	1	1	1
2	—1	1	—1	1
3	1	—1	—1	1
4	—1	—1	1	1

Два представления группы называются *эквивалентными,* если матрицы одного из них могут быть получены из матриц другого с помощью преобразования подобия: $T_1(g_\nu)=S^{-1}T_2(g_\nu)S$. Для любого представления конечной группы существует эквивалентное ему представление, все матрицы которого *унитарны:* $(T(g_\nu))^* = T(g_\nu)$. Из неприводимых представлений конечных групп рассматриваются только такие унитарные представления.

Рассмотрим неприводимые представления некоторых конкретных групп.

Группа поворотов трехмерного пространства R^3 вокруг некоторой фиксированной оси на углы, кратные $\frac{2\pi}{n}$, обозначается $\mathbf{C}_n$. Она является абелевой. Пусть $\mathbf{g}_1$ — поворот на угол $\frac{2\pi}{n}$. Тогда группа $\mathbf{C}_n$ состоит из элементов $\mathbf{g}_k = \mathbf{g}_1^k$, $k=\overline{1,\ n}$. При этом $\mathbf{g}_1^n = \mathbf{e}$. Из последнего равенства вытекает $\tau_j^n(g_1) = \tau_j(g_1^n) = \tau_j(e) = 1$ для любого неприводимого представления τ_j. Поэтому $\tau_j(g_1)$ принимает одно из значений $\exp\left(\frac{2\pi i}{n}j\right)$, $j=\overline{1,\ n}$, $i=\sqrt{-1}$. Отсюда мы получаем все n неприводимых представлений группы $\mathbf{C}_n$

$$\tau_j(g_\nu) = \exp\left(\frac{2\pi i j\nu}{n}\right),\ j,\ \nu=\overline{1,\ n}.$$

Рассмотрим группу $\mathbf{C}_{2v}$ симметрии прямоугольника в плоскости. Эта группа, кроме тождественного преобразования $\mathbf{g}_4 = \mathbf{e}$, содержит два отражения $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ относительно осей, проходящих через середины сторон прямоугольника и поворот $\mathbf{g}_3$ на угол π вокруг центра прямоугольника. Группа $\mathbf{C}_{2v}$ абелева. Поэтому она имеет четыре одномерных неприводимых представления. Для их составления рассмотрим все возможные случаи, когда $\tau(g_1)$ и $\tau(g_2)$ принимают значения из множества $\{1, -1\}$. Значения остальных элементов находятся с помощью равенств $g_1^2 = g_4$, $g_1 g_2 = g_3$. Все полученные неприводимые представления группы $\mathbf{C}_{2v}$ приведены в табл. 4.1.

§ 4.4. Конечномерные алгебры

В этом параграфе в качестве основного поля используется множество C комлексных чисел. Другими словами, все числа и элементы матриц принадлежат полю C.

Множество A замкнутое относительно трех операции: сложения и умножения элементов множества A; умножение элементов множества A на числа называется алгеброй (линейной алгеброй), если выполняются следующие условия.

I. A является ассоциативным кольцом относительно первых двух операций.

II. A является линейным пространством относительно операций сложения элементов A и умножения элементов A на числа.

III. $(\alpha \mathbf{a})\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\,(\alpha \mathbf{b}) = \alpha\,(\mathbf{ab})$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in A$, $\alpha \in C$.

Если кольцо (которым является алгебра относительно первых двух операций) содержит единицу $\mathbf{e}$, то $\mathbf{e}$ также называется единицей алгебры. Алгебра является линейным пространством относительно первой и третьей операций. Если это пространство конечномерное, то алгебра называется конечномерной. Размерность пространства называется рангом (размерностью) алгебры.

Подмножество B алгебры A называется подалгеброй, если B само является алгеброй относительно тех же операций, что и A.

Примером алгебры размерности n^2 является множество всех квадратных матриц порядка n. Другой пример алгебры — это множество $\Lambda(B_1, B_2)$ всех матриц, коммутирующих с матрицами B_1 и B_2.

Пусть $W_1, W_2, \ldots, W_r$ — некоторый базис алгебры A. Произведение элементов $W_j W_k$ принадлежит алгебре A и поэтому может быть выражено в этом же базисе:

$$W_j W_k = \sum_{\nu=1}^{r} \gamma_{jk}^{(\nu)} W_\nu. \tag{4.4.1}$$

Коэффициенты $\{\gamma_{jk}^{(\nu)}\}$, j, k, $\nu = \overline{1, r}$, называются *структурными константами* A.

В случае, когда A является алгеброй матриц и, кроме того, известен ее базис $\{W_j\}$, структурные константы можно вычислить непосредственно по формуле (4.4.1), которая для каждого сочетания j и k приводится к системе линейных алгебраических уравнений с неизвестными $\gamma_{jk}^{(\nu)}$, $\nu = \overline{1, r}$. Такая система состоит из n^2 уравнений с r неизвестными. Поэтому для решения такой системы уравнений надо использовать алгоритм, позволяющий исключать линейно зависимые уравнения (см. § 3.2).

Централизатором подмножества M алгебры A называется множество $\Lambda_A(M)$ элементов A, коммутирующих со всеми элементами множества M, т. е. $\Lambda_A(M) = \{\mathbf{a} \in A : \mathbf{ax} = \mathbf{xa}\ \forall \mathbf{x} \in M\}$. Там, где ясно, в какой алгебре рассматривается централизатор, будем писать просто $\Lambda(M)$.

Пусть $M = \{m_1, m_2 \ldots m_n\}$ — конечное подмножество алгебры A. Составим множество K, элементами которого являются $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и все их конечные произведения: $K = \{m_1, m_2 \ldots m_n, \quad m_1^2, \quad m_1 m_2, \ldots, m_n^2, \quad m_1^3 \ldots\}$. Составим далее множество φ всех линейных комбинаций элементов K. Ясно, что φ является подалгеброй A. Будем называть φ *алгеброй, порожденной множеством* M.

Алгебра A называется *нильпотентной*, если существует натуральное число p, такое, что $A^p = 0$, т. е. любое произведение из p элементов алгебры A равно нулю.

Алгебра матриц порядка n называется *приводимой*, если в C^n есть нетривиальное инвариантное (относительно этих матриц) подпространство. Если таких подпространств нет, то алгебра называется *неприводимой*.

Сформулируем без доказательства следующие теоремы.

Теорема 4.1 (*Веддерберн*). *Если конечномерная алгебра имеет базис из нильпотентных элементов, то она нильпотентна.* ◀

Теорема 4.2 (*Бернсайд*). *Любая неприводимая алгебра матриц порядка n содержит n^2 линейно независимых элементов.* ◀

Подалгебра U алгебры A называется *идеалом* алгебры A, если для $\forall \mathbf{x} \in U$ и $\forall \mathbf{a} \in A$ выполняются условия $\mathbf{ax} \in U$, $\mathbf{xa} \in U$.

Радикалом алгебры A называется такое множество G, что любое произведение $\mathbf{xa}$ и $\mathbf{ax}$ (где $\mathbf{x} \in G$, $\mathbf{a} \in A$) является нильпотентным элементом. Можно доказать, что радикал является идеалом.

Алгебра, не имеющая нетривиального идеала, называется *простой*. Если алгебра не содержит отличного от нуля радикала, то она называется *полупростой*.

Пусть A — некоторая алгебра матриц порядка n, а $\{W_1, W_2, \ldots, W_r\}$ — ее базис ($r \leqslant n^2$). Координаты $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r]$ любого элемента радикала удовлетворяют уравнению

$$D\alpha = \mathbf{0}, \quad D = \{d_{jk}\}, \tag{4.4.2}$$

где $d_{jk} = \mathrm{Sp}\,(W_l W_k)$, Sp — след матрицы, т. е. сумма ее диагональных элементов. Определитель матрицы D называется *дискриминантом* алгебры. Если он отличен от нуля, то уравнения (4.4.2) имеют только нулевое решение. В этом случае алгебра A полупроста. Следовательно, критерий полупростоты алгебры: $\det\{\mathrm{Sp}\,(W_j W_k)\} = 0$.

Теорема 4.3. *Любая полупростая алгебра матриц может быть приведена к такому блочно-диагональному виду, что каждый из наборов диагональных блоков образует простую алгебру.* ◀

Теорема 4.4. *Простая алгебра матриц, содержащая единицу, неприводимая.* ◀

§ 4.5. Теоремы о единственности разложения модуля

Поскольку алгебра является кольцом, то можно рассматривать модули над алгебрами.

Пусть M — модуль над конечномерной алгеброй A.

Здесь мы рассматриваем A-модули, которые одновременно являются линейными пространствами над полем комплексных чисел. Примером такого модуля является множество n-мерных комплексных векторов-столбцов, в котором введены операции сложения столбцов, умножения их на числа и умножения слева на квадратные матрицы порядка n, принадлежащие некоторой алгебре A.

Одновременно с модулем будем рассматривать матричное представление алгебры A. Строится такое представление следующим образом. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис модуля (напоминаем, что рассматривается модуль, который одновременно является линейным пространством). Умножению $\mathbf{a}m$, где $m \in M$, $\mathbf{a} \in A$, в данном базисе соответствует матрица $\mathrm{T}(\mathbf{a})$. Таким образом, каждому элементу α алгебры A ставится в соответствие матрица $\mathrm{T}(\mathbf{a})$ так, что выполняются следующие условия:

$$\mathrm{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathrm{T}(\mathbf{a}) + \mathrm{T}(\mathbf{b}), \quad \mathrm{T}(\alpha\ \mathbf{a}) = \alpha\mathrm{T}(\mathbf{a}),$$

$$\mathrm{T}(\mathbf{a}\ \mathbf{b}) = \mathrm{T}(\mathbf{a})\,\mathrm{T}(\mathbf{b}), \quad \mathrm{T}(1) = E$$

для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in A$ и любого числа α. Множество матриц $\mathrm{T}(\mathbf{a})$ является алгеброй. Соответствие $\mathbf{a} \to \mathrm{T}(\mathbf{a})$ называется матричным *представлением алгебры* A.

Подмодуль A-модуля M — это подпространство $N \in M$ такое, что $\mathbf{a}n \in N$ для любых элементов $n \in N$, $\mathbf{a} \in A$.

Другими словами, подмодуль — это такое подпространство A-модуля, которое само является A-модулем. Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис подмодуля N, а $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — дополнение этого базиса до базиса всего модуля, то представление T, соответствующее модулю M, имеет вид

$$\mathrm{T}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_1(\mathbf{a}) & X(\mathbf{a}) \\ 0 & \mathrm{T}_2(\mathbf{a}) \end{bmatrix}.$$

Матрицы $\mathrm{T}_1(\mathbf{a})$ порядка k образуют представление алгебры A, соответствующее модулю N. Матрицы $\mathrm{T}_2(\mathbf{a})$ также образуют представление алгебры A. Модуль, которому оно соответствует, называется фактор-модулем модуля M по подмодулю N и обозначается так: M/N.

Во всяком ненулевом модуле M есть два тривиальных подмодуля: сам M и подпространство, состоящее из одного нуля. Если других подмодулей в M нет, то модуль M называется простым.

Пусть N_1 — такой нетривиальный подмодуль M, что фактор-модуль M/N_1 простой. Если N_1 не простой, то выберем в нем такой подмодуль N_2, чтобы фактор-модуль N_1/N_2 был прост. Продолжая этот процесс, получаем цепочку $M = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \ldots \supset N_s = 0$ такую, что все фактор-модули $L_j = N_j/N_{j+1}$ просты. Такая цепочка называется *композиционным рядом модуля* M, а фактор-модули L_j — *факторами* этого ряда.

Теорема 4.5 *(Жордан — Гельдер). Если $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s = 0$ и $M = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_t = 0$ — два композиционных ряда, то их длины равны и между факторами этих рядов можно установить взаимно-однозначное соответствие так, что соответствующие факторы будут изоморфны.* ◀

Теорема 4.6 *(Круль — Шмидт). Если $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n = N_1 \oplus \ldots \oplus N_m$ — два разложения модуля M в прямую сумму неразложимых подмодулей, то $m = n$ и при подходящей нумерации M_i изоморфно N_i для всех i.* ◀

Глава 5

МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ИНФОРМАЦИЮ О СИММЕТРИИ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ

В данной главе рассматриваются методы расщепления, использующие информацию о симметрии расчетной схемы с помощью представлений конечных групп.

Вопросы практического применения методов теории групп рассматриваются на примере расчетных схем рельсовых экипажей. Эти системы характерны высоким порядком матриц коэффициентов и наличием неконсервативных сил псевдоскольжения, благодаря которым матрицы коэффициентов становятся несимметрическими. Все это вызывает определенные трудности как при составлении групп симметрии, так и при выполнении вычислений.

§ 5.1. Группа симметрии динамической системы

Симметрия физической системы проявляется в том, что существуют преобразования g_i пространства, относительно которых система, а следовательно, и ее математическая модель, инвариантны (неизменны). К таким преобразованиям относятся отражения физической системы относительно плоскостей симметрии, повороты вокруг осей симметрии и т. п.

Если во множестве преобразований g_i ввести операцию последовательного применения преобразований $g_c = g_a g_b$, то это множество становится группой. Действительно, последовательное применение таких преобразований обладает свойством ассоциативности, роль единицы группы играет тождественное преобразование, при котором обобщенные координаты не изменяются, и для каждого из преобразований существует обратное. Каждое из преобразований обобщенных координат системы задается матрицей $\mathrm{T}(g_i)$. Эти матрицы образуют представление группы, т. е. такое отображение данной группы в группу матриц, что $\mathrm{T}(g_i g_j) = \mathrm{T}(g_i)\mathrm{T}(g_j)$. Свойство инвариантности системы относительно преобразований g_i выражается в том, что матрицы $\mathrm{T}(g_i)$ коммутируют с матрицами коэффициентов системы уравнений.

В литературе (см., например, [46]) подробно описаны все конечные группы, встречающиеся в приложениях. Приведены также их неприводимые представления $\tau_k(g_i)$ $(k = \overline{1,\ m}$, m — число различных неприводимых представлений данной группы). Разложение представлений $\{T(g_i)\}$ на неприводимые соответствует разделению системы уравнений на несколько подсистем.

Заметим, что при повороте или отражении пространства координаты твердого тела изменяются так, что матрица соответствующего преобразования является ортогональной. Этим же свойством, как правило, обладают любые матрицы преобразований симметрии в различных практических задачах. Поэтому далее считаем все матрицы $T(g_v)$ ортогональными.

Изложим минимум сведений, достаточных для применения методов расщепления уравнений с помощью представлений конечных групп.

Пусть рассматривается некоторая механическая система. Вектор ее исходных обобщенных координат обозначим через $\mathbf{q}$. Эта система инвариантна относительно группы преобразований координат $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n$. В матричном виде данные преобразования записывают так: $\tilde{\mathbf{q}} = T(g_i)\,\mathbf{q}$. Требуется найти такую замену обобщенных координат $\mathbf{q} = S\mathbf{x}$, чтобы уравнения, составленные в новых координатах, получились разделенными на подсистемы.

Существуют два пути решения этой задачи. Первый путь — использование образующих $T(g_1),\ \ldots,\ T(g_r)$ группы матриц. Здесь и далее образующие располагаются в начале списка элементов группы. Матрица $T(g_1)$ коммутирует с матрицами коэффициентов B_i уравнений движения исследуемой системы (§ 1.3). Поэтому можно применить «способ коммутирующей матрицы». Другими словами, преобразование $\mathbf{q} = S_1\mathbf{x}$, где $S_1 = v\,(T\,(g_1))$, уже дает более удачные обобщенные координаты $\mathbf{x}$. Такой путь, в частности, был использован в § 1.4 при повторном рассмотрении примера 1.1. Отметим, что сами матрицы B_i для этого расчета не нужны.

Если элементом g_1 не исчерпываются образующие группы симметрии, то далее используем элемент g_2. Поскольку вектор координат $\mathbf{x}$ уже разделен на несколько частей $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}},\ \ldots,\ \mathbf{x}_m^{\mathrm{T}}]$, соответствующих отдельным подсистемам, матрицы представления можно составить для каждой из частей вектора $\mathbf{x}$ в отдельности. Матрицы $\tilde{T}_k\,(g_2)$, $k = \overline{1,\ m}$, могут быть составлены непосредственно в новых координатах или вычислены по формуле $\tilde{T}\,(g_2) = S_1^{-1}\,T\,(g_2)\,S_1 = \mathrm{diag}\,(\tilde{T}_k\,(g_2))$. С помощью этих матриц делаем замены переменных для каждого из векторов $\mathbf{x}_k$ в отдельности. Далее используем следующие образующие.

Другой путь состоит в вычислении проекторов на инвариантные подпространства, соответствующие неприводимым представлениям. В случае одномерных неприводимых представлений формула для нахождения проекторов имеет вид

$$P_j = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} \overline{\tau_j(g_\nu)}\, \mathrm{T}(g_\nu), \quad j = \overline{1, m}, \tag{5.1.1}$$

где N — число элементов группы. Затем выбираются линейно независимые векторы-столбцы каждого из проекторов, которые служат строками матрицы преобразования S.

Рассмотрим применение описанной методики на примере 1.1. Здесь группа симметрии состоит из двух преобразований: g_1 — отражение относительно оси симметрии Oz и g_2 — тождественное преобразование. Матрица $\mathrm{T}(g_1)$ составлена в § 1.3: $\mathrm{T}(g_1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Тождественному преобразованию соответствует единичная матрица. Группа симметрии изоморфна $\mathbf{C}_{2v}$. Поэтому неприводимыми представлениями являются следующие (§ 4.3): $\tau_1(g_1) = 1$, $\tau_1(g_2) = 1$; $\tau_2(g_1) = -1$, $\tau_2(g_2) = 1$. Вычисляем проекторы по формуле (5.1.1)

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проделав аналогичные вычисления, находим

$$P_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

далее выделяем линейно независимые столбцы в каждой из матриц P_k. Транспонируем эти столбцы и составляем из них матрицу замены переменных S. В данном примере

$$S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{поэтому} \begin{cases} q_1 = \frac{1}{2}(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2), \\ q_2 = \frac{1}{2}(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2). \end{cases}$$

Получаем два отдельных уравнения движения:

$$\ddot{\tilde{q}}_1 = 0; \quad \ddot{\tilde{q}}_2 + \frac{2k}{m}\tilde{q}_2 = 0.$$

Если неприводимые представления имеют порядок выше первого, то надо вычислить следующие проекторы:

$$P_{jk} = \frac{s_j}{N} \sum_{i=1}^{N} \overline{\tau_{jk1}(g_i)}\, \mathrm{T}(g_i), \quad j = \overline{1, m}; \quad k = \overline{1, s_j}, \tag{5.1.2}$$

где $\tau_{jkl}(g_i)$ — элемент матрицы неприводимого представления $\tau_j(g_i)$; s_j — порядок этой матрицы; m — количество различных неприводимых представлений группы. При $s_j = 1$ формула (5.1.2) совпадает с формулой (5.1.1). Недостатком этих формул является то, что надо знать все матрицы $T(g_i)$. Если это матрицы высокого порядка и группа G содержит много элементов, то такое вычисление может оказаться громоздким. С другой стороны, практически все группы симметрии, встречающиеся в приложениях, содержат не более трех образующих элементов. Однако алгоритм, использующий только образующие группы $T(g_i)$, тоже довольно сложен. По-видимому, самым простым способом в случае большой группы является нахождение с помощью ЭВМ всех элементов группы $T(g_i)$ по образующим и вычисление проекторов. С этой целью была составлена программа. Вместо таблицы умножения группы в программе используется более простая вспомогательная таблица. Для ее составления строится такая последовательность перемножений, что каждый новый элемент группы является произведением двух, вычисленных ранее. Вспомогательную таблицу легко построить, пользуясь графом группы. Например, для группы $\mathbf{C}_4$, граф которой изображен на рис. 5.1, таблица перемножений следующая:

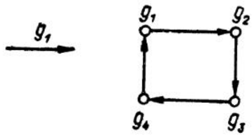


Рис. 5.1

Номер			
первого сомножителя	1	2	3
второго сомножителя	1	1	1
произведения	2	3	4

После составления всей группы $T(g_v)$ вычисляются проекторы по формуле (5.1.2).

После этого нетрудно осуществить разложение произвольного пространства, преобразующегося по приводимому представлению $T(g_v)$. Для этого следует.

1) найти с помощью проекторов P_{j1} (5.1.2) все подпространства E_{j1}, имеющие размерность m_j. Для нахождения каждого из подпространств можно взять произвольный базис $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ пространства C^n, подействовать на векторы базиса проектором P_{j1} и среди произведений $P_{j1}\mathbf{a}_k$ выбрать линейно независимые векторы $\mathbf{e}_{j11}, \mathbf{e}_{j21}, \ldots, \mathbf{e}_{jm_j1}$. Если в качестве векторов базиса выбраны единичные векторы, то, как следует из правил перемножения матриц, искомыми векторами являются линейно независимые столбцы матрицы P_{j1};

2) в каждом из подпространств E_{j1} $(m_j > 0)$ выбрать произвольным образом ортогональный базис (т. е. такой базис,

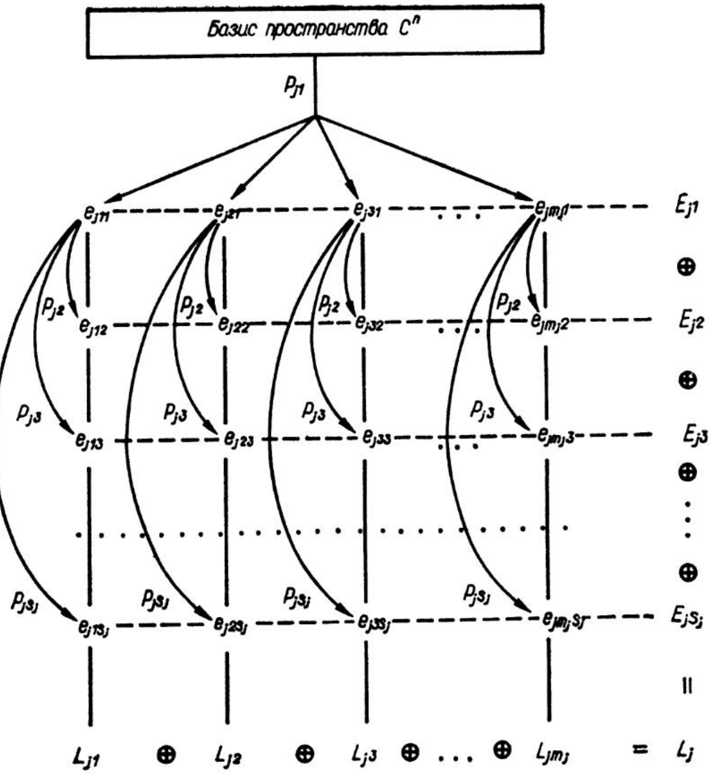


Рис. 5.2

что любые два его элемента взаимно ортогональны):

$$\mathbf{e}_{j11},\ \mathbf{e}_{j21},\ \ldots,\ \mathbf{e}_{jm_j1}; \tag{5.1.3}$$

для этого векторы, найденные в п. 1, следует ортогонализовать;

3) применяя проекторы (5.1.2) при $k = \overline{2,\ s_j}$ поочередно к каждому из векторов (5.1.3), построить неприводимые подпространства L_{jk}, соответствующие каждому из этих векторов; полученные таким образом подпространства взаимно ортогональны и преобразуются по представлению $\tau_j\,(g_\nu)$; в совокупности они дают полное разложение подпространства L_j.

Для одномерного представления выполняется только п. 1. Порядок вычислений удобно проиллюстрировать схемой, изображенной на рис. 5.2. Каждому неприводимому представлению $\tau_j\,(g_\nu)$ сопоставляются подпространства L_{jk},

$k = \overline{1,\ m_j}$, где m_j — кратность вхождения неприводимого представления $\tau_j(g_\nu)$ в приводимое представление $\mathrm{T}(g_\nu)$. Эти подпространства на схеме изображены вертикальными линиями. Подпространства, натянутые на векторы $\mathbf{e}_{jk\nu}$, $k = \overline{1,\ m_j}$, обозначим через $E_{j\nu}$. Они изображены на схеме горизонтальными линиями. Примером использования этой схемы является приведенный в § 5.3 расчет по декомпозиции уравнений движения восьмиосного вагона.

Матрицы коэффициентов уравнений движения симметричной системы коммутируют с матрицами представления группы симметрии (§ 1.3).

Матрицу преобразования S составим следующим образом. В качестве первых m_1 строк матрицы выбраны векторы базиса подпространства E_{11}. Если неприводимое подпространство имеет размерность больше единицы, то затем размещаем базисы подпространств E_{12}, E_{13} и т. д. Далее располагаются векторы, соответствующие следующим неприводимым представлениям.

Матрица A, коммутирующая с матрицами представления $\mathrm{T}(g_\nu)$, после преобразования S приобретает блочно-диагональный вид

$$\tilde{A} = S^{-1}AS = \mathrm{diag}\,(E_{s_j}\dot{x}A_j),$$

где A_j — блоки, имеющие порядки m_j, запись $E_{s_j}\dot{x}A_j$ означает блочно-диагональную матрицу, на главной диагонали которой s_j раз стоит блок A_j. Это утверждение — непосредственное следствие теоремы Вигнера [58, с. 69].

Итак, каждому подпространству E_{jk}, $j = \overline{1,\ m}$, $k = \overline{1,\ s_j}$, соответствует отдельная система уравнений, обобщенные координаты которой соответствуют векторам базиса E_{jk}.

§ 5.2. Нахождение инвариантных подпространств с помощью ЭВМ

Программа вычисления проекторов по формуле (5.1.2) составлена для БЭСМ-6 на языке ФОРТРАН. Блок-схема программы приведена на рис. 5.3.

Для работы программы вводятся лишь образующие группы $\mathrm{T}(g_\nu)$ $(\nu = \overline{1,\ N1})$ и неприводимых представлений $\tau_j(g_\nu)$ $(\nu = \overline{1,\ N1})$. Составление всей группы осуществляется с помощью таблицы перемножений MLT. Если матрицы $\mathrm{T}(g_\nu)$

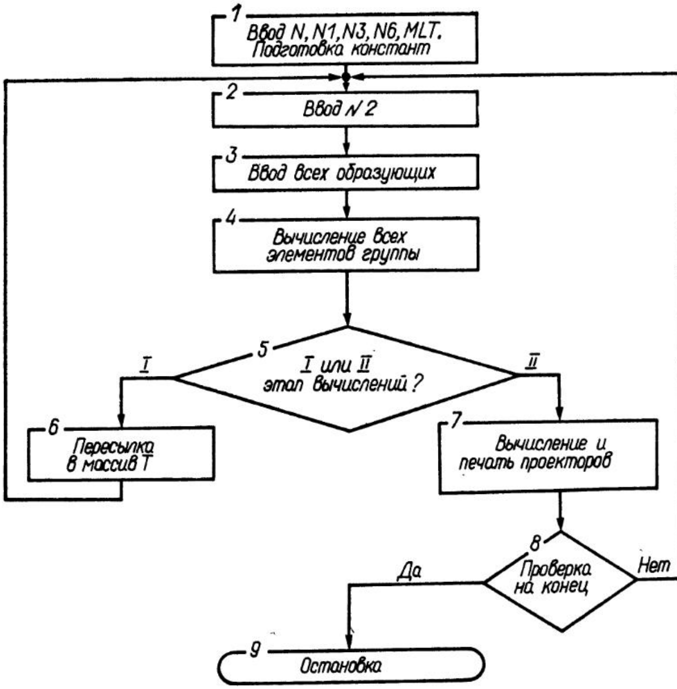


Рис. 5.3

представимы в виде

$$T(g_\nu) = \begin{bmatrix} T_1(g_\nu) & & & & 0 \\ & T_2(g_\nu) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & T_{N6}(g_\nu) \end{bmatrix}$$

для всех ν одновременно, то можно производить вычисления для каждого блока отдельно.

Инструкция к программе. Числовой материал для работы программы подготавливается в виде следующего набора данных.

Сначала числа целого типа — N, N1, N3, N6, где N — количество элементов группы; N1 — количество образующих; N3 — количество различных неприводимых представлений; N6 — количество блоков матриц $T(g_\nu)$.

Затем массив чисел целого типа — таблица MLT перемножений для данной группы — вводится по столбцам.

Для каждого неприводимого представления вводятся: N2 — порядок вводимых матриц (одно число на перфокарте); затем матрицы образующих неприводимых представлений, каждая в виде отдельного массива. Аналогично вводится каждый из блоков матриц приводимого представления $T(g_\nu)$. Сразу после ввода числа N2 и матриц образующих они выдаются на АЦПУ.

В результате решения печатаются по строкам проекторы $P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{1s_1}, P_{21}, P_{22}, \ldots, P_{2s_2}, \ldots, P_{N3s_{N3}}$.

Ограничения: $N \leqslant 33$; $N3 \leqslant 33$; $N2 \leqslant 12$ (для неприводимых представлений $N2 \leqslant 3$).

Тестовый пример. Группа $\mathbf{C_2}$. Образующий элемент представления $T(g_\nu)$:

$$T(g_1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таблица перемножения для группы C_2 следующая:

Номер	
первого сомножителя	1
второго сомножителя	1
произведения	2

Образующие неприводимых представлений $\tau_1(g_1) = 1$; $\tau_2(g_1) = -1$.

Текст программы ГРУППЫ следующий:

```
      PROGRAM ГРУППЫ
C-------------------------
C   НАХОЖД. ПРОЕКТОРОВ НА ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА
C   А В Т О Р Ы :   БАЗИЛЕВИЧ Ю.Н., КОРОТЕНКО Л.М.,
C                   КОРОТЕНКО Г.М. (ИТМ АН УССР)
      DIMENSION MLT(33,3),T(99,33),W(33,144),B(12,12),
     1         C (12,12),A(12,12),NTAU(99)
     2          ,C1(144),B1(144),A1(144)
      EQUIVALENCE (A,A1),(B,B1),(C,C1)
C---------------------------
      N2MAX=12
      READ 242,N,N1,N3,N6
C   N - К-ВО ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ,  N1 - К-ВО ОБРАЗУЮЩИХ,
C   N3 - К-ВО РАЗЛИЧН. НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ,
C   N6 - К-ВО БЛОКОВ МАТРИЦ ПРИВОДИМОГО ПРЕДСТАВЛ.
      N4=N-N1
      N7=N6+N3
      M=0
      MM=1
      READ 242,((MLT(I,J),J=1,3),I=1,N4)
```

```
C    MLT - ТАБЛ. ПЕРЕМНОЖЕНИЙ (ТРАНСПОНИРОВАННАЯ)
11     READ 242,N2
C    N2 - ПОРЯДОК ВВОДИМЫХ МАТРИЦ
       PRINT 22,N2
       N5=N2*N2MAX
C...ВВОД ОБРАЗУЮЩИХ
       DO 3 IM=1,N1
2      READ 21,((A(I,J),J=1,N2),I=1,N2)
C    A - ОЧЕРЕДНАЯ МАТРИЦА НЕПРИВОДИМОГО (НА
C        ВТОРОМ ЭТАПЕ - ПРИВОДИМОГО) ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
       DO 31 I=1,N2
31        PRINT 25,(A(I,J),J=1,N2)
       DO 3 JM=1,N5
3         W(IM,JM)=A1(JM)
C...СОСТАВЛЕНИЕ ВСЕЙ ГРУППЫ МАТРИЦ
       DO 4 I=1,N4
          DO 5 J=1,N5
             A1(J)=W(MLT(I,1),J)
5            B1(J)=W(MLT(I,2),J)
          DO 13 L=1,N2
             DO 13 J=1,N2
              C(L,J)=0.
              DO 13 K=1,N2
13             C(L,J)=C(L,J)+A(L,K)*B(K,J)
          DO 4 J=1,N5
4             W(MLT(I,3),J)=C1(J)
      M=M+1
      IF (M.LE.N3) GO TO 120
      MN=MM-1
      DO 88 JJ=1,MN
         AN=N
         ANT=NTAU(JJ)
         DO 9 K=1,N5
          A1(K)=0.
          DO 9 I=1,N
9            A1(K)=A1(K)+T(JJ,I)*W(I,K)*ANT/AN
      PRINT 23, JJ
      DO 32 IП=1,N2
32       PRINT 25,(A(IП,JП),JП=1,N2)
88    CONTINUE
      IF (M.LT.N7) GO TO 11
      STOP
C...ПЕРЕСЫЛКА ПЕРВЫХ СТОЛБЦОВ МАТРИЦ НЕПР.ПРЕДСТ.
C   В МАССИВ T
120   DO 12 L=1,N2
      NTAU(MM)=N2
      DO 14 J=1,N
14    T(MM,J)=W(J,L)
12    MM=MM+1
      GO TO 11
242   FORMAT (3I2)
22    FORMAT (3X,'N2=',I3)
```

```
21    FORMAT (4F5.1)
25    FORMAT (12F10.3)
23     FORMAT(I6,'-Й ПРОЕКТОР')
      END
```

Числовой материал для решения тестового примера:

```
+2+1+2
+1
+1+1+2
+1
+01.0
+1
—01.0
+2
000.0—01.0—01.0000.0
```

Результаты расчета:

```
N2 = 1
 1.000
N2 = 1
 —1.000
N2 = 2
 0.000  —1.000
—1.000   0.000
 1-Й ПРОЕКТОР
 0.500  —0.500
—0.500   0.500
 2-Й ПРОЕКТОР
 0.500   0.500
 0.500   0.500
```

§ 5.3. Определение обобщенных координат, соответствующих симметрии расчетной схемы сложной механической системы

Нередко сложные механические системы характерны наличием сил, линейно зависящих от координат и имеющих кососимметрическую матрицу коэффициентов. Такие силы называют существенно неконсервативными, или неконсервативными позиционными, циркуляционными, силами радиальной коррекции, собственно неконсервативными силами, псевдогироскопическими, силами ограниченного демпфирования и т. д.

Когда механическая система содержит такие силы, следует рассматривать уже не инвариантность соответствующих квадратичных форм, как это иногда делается, а инвариантность матриц коэффициентов системы. Естественно, что при этом группа симметрии, допускаемая консервативными силами, сужается. Исследование устойчивости движения рельсовых экипажей усложняется наличием сил псевдоскольжения (сил крипа), являющихся суммой диссипативных и существенно неконсервативных сил (см. Лазарян В. А. [38]). При качении колеса по рельсу возникает явление псевдоскольжения, вызываемое местными деформациями рельса и колеса вблизи их контакта. Это объясняется тем, что тележка рельсового экипажа, объединяющая две (иногда три) колесные пары с коническими колесами, не может двигаться без «про скальзывания», когда она смещена относительно положения равновесия. Возникающие при этом силы, согласно теории Картера, считают пропорциональными относительным «проскальзываниям» [78, 84].

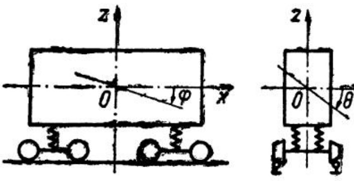


Рис. 5.4

Рассмотрим применение теории групп к расчетным схемам четырехосного и восьмиосного рельсовых экипажей с одинарным рессорным подвешиванием.

Расчетная схема четырехосного вагона изображена на рис. 5.4. Сначала исследуем расчетную схему без учета сил «псевдоскольжения», а затем отдельно проанализируем их влияние. Если не учитывать силы «псевдоскольжения», то преобразованиями симметрии будут отражения вагона относительно плоскостей Oxz и Oyz, поворот на 180° вокруг оси Oz, отражения тележек относительно их поперечных плоскостей симметрии, а также различные комбинации этих преобразований. Если вводится дополнительный упругий элемент, препятствующий поворотам тележки в горизонтальной плоскости относительно кузова, то отражения тележек уже не будут преобразованиями симметрии.

Исходные координаты четырехосного вагона следующие: z, φ, θ, y, ψ, y_1, y_2, ψ_1, ψ_2, x, где x, y, z, θ, φ, ψ — перемещения и углы поворота кузова, y_i и ψ_i — соответственно боковой относ и виляние i-й тележки ($i = 1, 2$). Силы псевдоскольжения имеют вид:

$$Q_{y_1} = f_1\psi_1 - h_1 v^{-1}\dot{y}_1, \quad Q_{y_2} = f_1\psi_2 - h_1 v^{-1}\dot{y}_2,$$
$$Q_{\psi_1} = -f_2 y_1 - h_2 v^{-1}\dot{\psi}_1, \quad Q_{\psi_2} = -f_2 y_2 - h_2 v^{-1}\dot{\psi}_2,$$

где v — скорость; f_i и h_i — некоторые коэффициенты. Нетрудно убедиться, что силы эти не инвариантны относительно тех преобразований, приведенных выше, при которых меняется ориентация тележек по направлению движения, но инвариантны относительно остальных преобразований. Например, при отражении первой тележки относительно ее поперечной плоскости симметрии координаты, входящие в выражения обобщенных сил, меняются так:

$$y_1 \to y_1, \quad \psi_1 \to -\psi_1;$$

соответствующее изменение обобщенных сил:

$$Q_{y_1} \to -f_1\psi_1 - h_1 v^{-1}\dot{y}_1 \neq Q_{y_1},$$

$$Q_{\psi_1} \to -f_2 y_1 + h_2 v^{-1}\dot{\psi}_1 \neq -Q_{\psi_1}.$$

Таким образом, в результате остаются лишь те преобразования, при которых не меняется ориентация тележек по направлению движения, а именно:
g_1 — зеркальное отражение всей системы относительно плоскости Oyz и одновременное отражение тележек относительно их поперечных плоскостей симметрии;

g_2 — зеркальное отражение относительно плоскости Oxz;

g_3 — поворот всей системы на 180° относительно оси Oz и одновременное отражение тележек относительно их поперечных плоскостей симметрии;

g_4 — тождественное преобразование.

При наличии дополнительного упругого элемента остаются только преобразования g_2 и g_4.

Полученная группа имеет следующую таблицу умножения:

	e	g_1	g_2	g_3
e	e	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	e	g_3	g_2
g_2	g_2	g_3	e	g_1
g_3	g_3	g_2	g_1	e

$(g_4 = e)$

При зеркальном отражении относительно плоскости Oyz и отражении тележек координаты меняются так:

$$z' = z,\ \varphi' = -\varphi,\ \theta' = \theta,\ y' = y,\ \psi' = -\psi,$$

$$y_1' = y_2,\ y_2' = y_1,\ \psi_1' = -\psi_2,\ \psi_2' = -\psi_1,\ x' = -x.$$

Здесь штрихом обозначены новые координаты. Таким образом, матрица $\mathrm{T}(g_1)$ имеет вид:

$$\mathrm{T}(g_1) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & 0 & \\ & -1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & -1 & \\ & & & & & & & -1 & 0 & \\ 0 & & & & & & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично составляем матрицы $T(g_2)$, $T(g_3)$, $T(g_4)$. Пользуясь формулой (5.1.1), находим проекторы P_{j1}. Линейно независимые столбцы проекторов являются базисами подпространств, в которых действует каждое из неприводимых представлений.

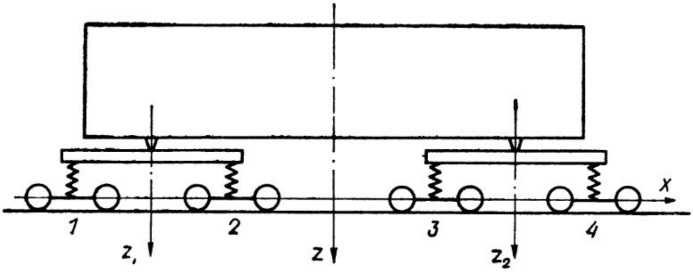


Рис. 5.5

Это соответствует следующим наборам обобщенных координат:

$$E_1 - z; \quad E_2 - \varphi, x; \quad E_3 - \theta, y, y_1 + y_2, \psi_1 + \psi_2;$$
$$E_4 - \psi, y_1 - y_2, \psi_1 - \psi_2.$$

Каждому из этих наборов соответствует отдельная система дифференциальных уравнений.

Колебания восьмиосного вагона (рис. 5.5) описываются с помощью следующих координат (см. [41]):

$$x, y, z, \varphi, \theta, \psi, y_1, y_2, y_3, y_4, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_{1c}, \psi_{2c},$$

где ψ_{jc} — угол влияния j-й соединительной балки; остальные обозначения такие же, как и для четырехосного вагона. Группа симметрии восьмиосного вагона состоит уже из 16 элементов. Группа имеет следующие образующие: g_1' — отражение первой соединительной балки относительно плоскости $O_1y_1z_1$ с одновременным отражением тележек *1* и *2* относительно их поперечных плоскостей симметрии; g_2 — отражение вагона относительно плоскости Oyz и отражение тележек относительно их поперечных плоскостей симметрии; g_3 — отражение относительно плоскости Oxz. Эту группу удобней задать не таблицей умножения, а с помощью графа группы (рис. 5.6).

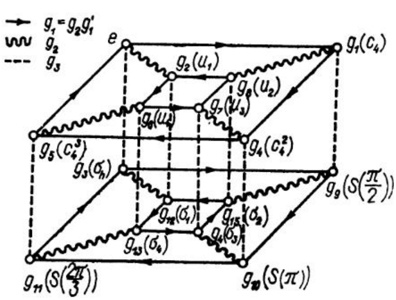


Рис. 5.6

Группа симметрий восьмиосного вагона изоморфна группе симметрии правильной четырехугольной призмы, т. е. мы имеем дело с группой $\mathbf{D}_{4h}$. Приведем следующую таблицу соответствия:

	Образующие		
группа 1	$g_1 = g_2 g_1'$	g_2	g_3
группа 2	C_4	u_1	σ_h

Здесь C_4 — поворот призмы на 90° вокруг вертикальной оси симметрии; u_1 — поворот вокруг одной из горизонтальных осей; σ_h — отражение относительно горизонтальной плоскости симметрии. На рис. 5.6 сплошная прямая соответствует $g_1 = g_2 g_1'$, курсивная — g_2, штриховая — g_3, в скобках указаны элементы группы симметрии правильной четырехугольной призмы. Обобщения те же, что и в книге Г. Я. Любарского [46].

Матрица $\mathrm{T}(g_1)$ имеет вид

$$\mathrm{T}(g_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\ &&& -1 &&&&&&&&&&&&&&&&&& \\ &&&& 1 &&&&&&&&&&&&&&&&& \\ &&&&& -1 &&&&&&&&&&&&&&&& \\ &&&&&& 0 & 0 & 1 & 0 &&&&&&&&&&&& \\ &&&&&& 0 & 0 & 0 & 1 &&&&&&&&&&&& \\ &&&&&& 0 & 1 & 0 & 0 &&&&&&&&&&&& \\ &&&&&& 1 & 0 & 0 & 0 &&&&&&&&&&&& \\ &&&&&&&&&& 0 & 0 & 1 & 0 &&&&&&&& \\ &&&&&&&&&& 0 & 0 & 0 & 1 &&&&&&&& \\ &&&&&&&&&& 0 & 1 & 0 & 0 &&&&&&&& \\ &&&&&&&&&& 1 & 0 & 0 & 0 &&&&&&&& \\ &&&&&&&&&&&&&& 0 & 1 \\ &&&&&&&&&&&&&& -1 & 0 \end{bmatrix},$$

или в более короткой записи

$$\mathrm{T}(g_1) =$$

$$= \operatorname{diag}\left(-1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ E_2 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Здесь выражение $E_2 \times A$ означает блочно-диагональную матрицу, у которой на главной диагонали два раза стоит блок A.

Аналогично запишем матрицы $T(g_2)$ и $T(g_3)$

$$T(g_2) =$$

$$= \operatorname{diag}\left(-1, 1, 1, -1, 1, -1, E_2 \dot{\times} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right);$$

$$T(g_3) = \operatorname{diag}\left(1, -1, 1, 1, -1, -1, E_2 \dot{\times}\right.$$

$$\left.\dot{\times} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right).$$

Неприводимые представления группы D_{4h} (см. [46]) имеют тот недостаток, что двумерные неприводимые представления комплексны. Если осуществить преобразование подобия $S^{-1}\tau_k(g_j)S$, где $S = \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}$, то от комплексных неприводимых представлений перейдем к вещественным. Окончательно получаем 10 различных неприводимых представлений $\tau_k(g_j)$ группы симметрии восьмиосного вагона (табл. 5.1). Можно воспользоваться также таблицами неприводимых представлений из книги [15, приложение 1]. Там принята другая нумерация элементов группы и неприводимых представлений.

Таблица 5.1

j	$\tau_j(q_\nu)$		
	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$
1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2	-1	1	1
3	-1	-1	1
4	1	1	1
5	1	-1	1
6	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
7	-1	1	-1
8	-1	-1	-1
9	1	1	-1
10	1	-1	-1

Перемножения для группы $\mathbf{D}_{4h}$ составлены аналогично предыдущей таблице перемножений:

Номер													
первого сомножителя	1	4	2	6	7	3	9	10	3	12	13	14	2
второго сомножителя	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2
произведения	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Расчеты выполняем с помощью ЭВМ. Используя блочно-диагональный вид матриц $\mathrm{T}(g_k)$, $k = \overline{1, 3}$, записываем их в виде последовательности блоков (шесть блоков первого порядка, два — четвертого и один — второго). С помощью программы ГРУППЫ получаем проекторы на инвариантные подпространства. Поскольку первое неприводимое представление двумерное, первый и второй проекторы — P_{11} и P_{12}. Второе представление одномерное. Поэтому третий проектор — P_{21} и т. д. Общие выражения для каждого из проекторов составляем из блоков, полученных для каждого из блоков матриц $\mathrm{T}(g_k)$. В результате имеем

$$P_{11} = 0, \quad P_{12} = 0, \quad P_{21} = 0,$$

$$P_{31} = \mathrm{diag}\,(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ E_2 \times 0,\ 0),$$

$$P_{41} = \mathrm{diag}\,(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ E_2 \times 0,\ 0),$$

$$P_{51} = 0,$$

$$P_{61} = \mathrm{diag}\left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ E_2 \dot{\times} \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right),$$

$$P_{62} = \mathrm{diag}\left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ E_2 \dot{\times} \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right),$$

$$P_{71} = 0,$$

$$P_{81} = \mathrm{diag}\left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\right.$$

$$E_2 \dot{\times} \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ 0 \Bigg),$$

$$P_{91} = \mathrm{diag}\left(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ E_2 \dot{\times} \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ 0\right),$$

$$P_{101} = 0.$$

Первый из ненулевых проекторов — P_{31}. Умножив этот проектор на единичные векторы, получаем два линейно независимых вектора $\mathbf{e}_{311} = (1\ 0\ 0\ \dots\ 0)^{\text{т}}$ и $\mathbf{e}_{321} = (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \dots\ 0)^{\text{т}}$. Этим векторам соответствуют первая и четвертая обобщенная координаты, т. е. координаты x и φ. Следовательно, первый из наборов обобщенных координат содержит две координаты x и φ. Рассмотрим теперь проекторы P_{61}, P_{62}. Умножив проектор P_{61} на единичные векторы, получаем следующий базис подпространства E_{61}:

$$\mathbf{e}_{611} = \frac{1}{4}(0\ \dots\ 0\ 1\ -1\ -1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^{\text{т}},$$

$$\mathbf{e}_{621} = \frac{1}{4}(0\ \dots\ 0\ 1\ -1\ -1\ 1\ 0\ 0)^{\text{т}},$$

$$\mathbf{e}_{631} = \frac{1}{2}(0\ \dots\ 0\ 1\ -1)^{\text{т}}.$$

Умножив P_{62} на каждый из этих векторов, получаем базис подпространства E_{62}:

$$\mathbf{e}_{612} = \frac{1}{2}(0\ \dots\ 0\ 1\ -1\ 1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^{\text{т}},$$

$$\mathbf{e}_{622} = \frac{1}{4}(0\ \dots\ 0\ 1\ -1\ 1\ -1\ 0\ 0)^{\text{т}},$$

$$\mathbf{e}_{632} = \frac{1}{2}(0\ \dots\ 0\ 1\ 1)^{\text{т}}.$$

Окончательно получаем следующие наборы обобщенных координат:

$E_{31}: x,\ \varphi;$

$E_{41}: z;$

$E_{61}: y_1 - y_2 - y_3 + y_4,\ \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4,\ \psi_{1c} - \psi_{2c};$

$E_{62}: y_1 - y_2 + y_3 - y_4,\ \psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4,\ \psi_{1c} + \psi_{2c};$

$$E_{81}: \psi,\ y_1 + y_2 - y_3 - y_4,\ \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4;$$
$$E_{91}: y,\ \theta,\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4,\ \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4.$$

Если проектор P_{61} умножить не на единичные векторы, а на другой базис пространства, то получаем другие наборы обобщенных координат, например, такие:

$$E'_{61}: y_1 - y_2,\ \psi_1 - \psi_2,\ \psi_{1c}$$
$$E'_{62}: y_3 - y_4,\ \psi_3 - \psi_4,\ \psi_{2c}.$$

Каждому набору обобщенных координат соответствует отдельная система уравнений, причем для координат, соответствующих подпространствам E_{61} и E_{62}, получаются одинаковые системы уравнений. Такой же вид, но с другими численными значениями коэффициентов приобретут уравнения, соответствующие подпространству E_{81}. Таким образом, система уравнений возмущенного движения восьмиосного вагона с одинарным рессорным подвешиванием, имеющая 32-й порядок, разбивается на шесть подсистем с порядками соответственно 2, 4, 6, 6, 6, 8, причем две подсистемы 6-го порядка идентичны.

Из сопоставления с наборами обобщенных координат, полученными для четырехосного вагона, делаем вывод, что независимые подсистемы уравнений движения восьмиосного вагона имеют такой же вид и порядок, как и соответствующие подсистемы четырехосного вагона, а количество этих подсистем больше. Уравнения движения шестнадцатиосного транспортера разбиваются на 10 подсистем, из них семь подсистем имеют одинаковый вид, аналогичный подсистеме, соответствующей E_4 четырехосного вагона, остальные аналогичны подсистемам, соответствующим E_1, E_2, E_3. При несимметричной загрузке вагона (центр тяжести смещен вдоль оси Ox) объединяются в одну систему уравнений подсистемы, соответствующие подпространствам E_3 и E_4 для четырехосного вагона, E_{81} и E_{91} — для восьмиосного и аналогичные две подсистемы шестнадцатиосного транспортера. Такие же результаты получены и для вагонов с двойным рессорным подвешиванием.

Рассмотрим расщепление уравнений движения экипажа высокоскоростного наземного транспорта (ВСНТ) с четырьмя тележками. При исследовании устойчивости движения этого экипажа принимаются во внимание следующие обобщенные координаты:

$$\psi,\ y,\ \theta,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,$$
$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4,\ y_{11},\ y_{12},\ \ldots,\ y_{44}.$$

Координаты без индекса обозначают смещения и углы поворота кузова, с одним индексом — смещения и углы поворота соответствующих тележек, y_{kj} — боковой относ j-го магнита, укрепленного на k-й тележке. Кроме того, в дифференциальные уравнения входят величины токов в электромагнитах i_{kj}. Система уравнений имеет 78-й порядок.

Симметрия экипажа ВСНТ проявляется в том, что его расчетная схема остается неизменной при следующих преобразованиях: g_1 — отражение всей системы относительно вертикальной поперечной плоскости Oyz; g_2 — отражение относительно продольной плоскости Oxz; g_3 — поворот на 180° вокруг оси Oz; g_4 — тождественное преобразование. Эти преобразования образуют группу G симметрии экипажа ВСНТ.

Матрицы преобразования обобщенных координат, соответствующие таким преобразованиям, имеют следующий вид:

$$\mathrm{T}(g_1) =$$

$$= \operatorname{diag}\left(-1,\ 1,\ 1,\ 1 - M,\ M,\ M,\ M \dot{\times} \begin{bmatrix} & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & 0 \end{bmatrix}\right),$$

$$\mathrm{T}(g_2) = \operatorname{diag}\left(-1,\ -1,\ -1,\ -E_4,\ -E_4,\ -E_4 - \right.$$

$$\left. - E_4 \dot{\times} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right),$$

$$\mathrm{T}(g_3) = \operatorname{diag}(1,\ -1,\ -1,\ M,\ -M,\ -M,\ -M, \dot{\times}\, M) -$$

$$\mathrm{T}(g_4) = E_{31},$$

где $M = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$, $\times$ — знак прямого произведения матриц; E_m — единичная матрица порядка m.

Токи i_{kj} преобразуются так же, как и боковые перемещения магнитов y_{kj}.

Группа G совпадает с группой симметрии прямоугольника C_{2v}.

В результате расчетов получаем, что система уравнений 78-го порядка распадается на четыре подсистемы, имеющие порядки 12, 12, 28 и 26. Новыми переменными этих подсистем являются следующие величины:

а) $q_1 = \frac{1}{4}(y_{11} - y_{12} + y_{43} - y_{44}),\ q_2 = \frac{1}{4}(y_{13} - y_{14} + y_{41} - y_{42}),$

$q_3 = \frac{1}{4}(y_{21} - y_{22} + y_{33} - y_{34}),\ q_4 = \frac{1}{4}(y_{23} - y_{24} + y_{31} - y_{32}),$

$s_1 = \frac{1}{4}(i_{11} - i_{12} + i_{43} - i_{44}),\quad s_2 = \frac{1}{4}(i_{13} - i_{14} + i_{41} - i_{42}),$

$s_3 = \frac{1}{4}(i_{21} - i_{22} + i_{33} - i_{34}),\quad s_4 = \frac{1}{4}(i_{23} - i_{24} + i_{31} - i_{32}),$

б) $q_5 = \frac{1}{4}(y_{11} - y_{12} - y_{43} + y_{44}),\ q_6 = \frac{1}{4}(y_{13} - y_{14} - y_{41} + y_{42}),$

$q_7 = \frac{1}{4}(y_{21} - y_{22} - y_{33} + y_{34}),\ q_8 = \frac{1}{4}(y_{23} - y_{24} - y_{31} + y_{32}),$

$s_5 = \frac{1}{4}(i_{11} - i_{12} - i_{43} + i_{44}),\quad s_6 = \frac{1}{4}(i_{13} - i_{14} - i_{41} + i_{42}),$

$s_7 = \frac{1}{4}(i_{21} - i_{22} - i_{33} + i_{34}),\quad s_8 = \frac{1}{4}(i_{23} - i_{24} - i_{31} + i_{32}),$

в) $q_9 = y,\ q_{10} = \theta,\ q_{11} = \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_4),\ \ q_{12} = \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_3),$

$q_{13} = \frac{1}{2}(y_1 + y_4),\ \ q_{14} = \frac{1}{2}(y_2 + y_3),\ \ q_{15} = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_4),$

$q_{16} = (\theta_2 + \theta_3),\ \ q_{17} = \frac{1}{4}(y_{11} + y_{12} + y_{43} + y_{44}),$

$q_{18} = \frac{1}{4}(y_{13} + y_{14} + y_{41} + y_{42}),\ q_{19} = \frac{1}{4}(y_{21} + y_{22} + y_{33} + y_{34}),$

$q_{20} = \frac{1}{4}(y_{23} + y_{24} + y_{31} + y_{32}),$

$s_9 = \frac{1}{4}(i_{11} + i_{12} + i_{43} + i_{44}),\quad s_{10} = \frac{1}{4}(i_{13} + i_{14} + i_{41} + i_{42}),$

$s_{11} = \frac{1}{4}(i_{21} + i_{22} + i_{33} + i_{34}),\quad s_{12} = \frac{1}{4}(i_{23} + i_{24} + i_{31} + i_{32}),$

г) $q_{21} = \psi,\ q_{22} = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_4),\ q_{23} = \frac{1}{2}(\psi_2 + \psi_3),$

$q_{24} = \frac{1}{2}(y_1 - y_4),\ q_{25} = \frac{1}{2}(y_2 - y_3),\ \ q_{26} = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_4),$

$$q_{27} = \frac{1}{4}(\theta_2 - \theta_3), \quad q_{28} = \frac{1}{4}(y_{11} + y_{12} - y_{43} - y_{44}),$$

$$q_{29} = \frac{1}{4}(y_{13} + y_{14} - y_{41} - y_{42}),$$

$$q_{30} = \frac{1}{4}(y_{21} + y_{22} - y_{33} - y_{44}),$$

$$q_{31} = \frac{1}{4}(y_{23} + y_{24} - y_{31} - y_{32}),$$

$$s_{13} = \frac{1}{4}(i_{11} + i_{12} - i_{43} - i_{44}), \quad s_{14} = \frac{1}{4}(i_{13} + i_{14} - i_{41} - i_{42}),$$

$$s_{15} = \frac{1}{4}(i_{21} + i_{22} - i_{33} - i_{44}), \quad s_{16} = \frac{1}{4}(i_{23} + i_{24} - i_{31} - i_{32}).$$

Глава 6

ПРИВЕДЕНИЕ К ПОДСИСТЕМАМ МИНИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА

Изложенные в предыдущей главе методы не гарантируют возможности приведения уравнений к максимальному количеству независимых подсистем, поскольку в большинстве случаев нет уверенности в том, что информация о группе симметрии системы уравнений, найденная априорно, является исчерпывающей. «Способ коммутирующей матрицы» предназначен для анализа системы уравнений непосредственно. Однако и он все же не дает ответа на вопрос: как получить максимально возможное количество подсистем. В этой главе дан ответ на вопрос, т. е. указаны операции, с помощью которых уравнения можно разделить на подсистемы, и доказано, что конечная последовательность этих операций позволяет получить максимальное для выбранного класса преобразований число подсистем.

Разделение на подсистемы во многих случаях позволяет сократить время вычисления и повысить точность при расчетах на ЭВМ либо упростить выкладки при получении решения в замкнутой форме. Особенно полезно приведение к подсистемам с помощью преобразования, не зависящего от некоторых параметров системы. Например, для оптимизации параметров системы уравнений с помощью поисковых методов необходимо производить многократные вычисления при различных значениях этих параметров. Выполненное один раз расщепление системы уравнений позволяет упростить расчеты на каждом шаге оптимизации, что приводит к значительному сокращению общих затрат машинного времени.

§ 6.1. Основные теоремы

Рассмотрим систему уравнений

$$B_1(\mu)\ddot{\mathbf{q}} + B_2(\mu)\dot{\mathbf{q}} + B_3(\mu)\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t), \qquad (6.1.1)$$

где $\mathbf{q}$, $\mathbf{Q}(t) \in C^n \ \forall t$, а $B_i(\mu)$ — комплексные матрицы размером $m \times n$, линейно зависящие от параметров $\{\mu_1, \mu_2, \ldots$

$\ldots, \mu_p\}$:

$$B_i(\mu) = \sum_{k=1}^{p} \mu_k B_i^{(k)};$$

$B_i^{(k)}$ — постоянные матрицы. Случай вещественных переменных и некоторые другие системы уравнений будут рассмотрены далее.

В настоящее время исследователи вынуждены изучать системы уравнений, отличающиеся от традиционных для теории колебаний. Уже не редкость уравнения с несимметрическими матрицами коэффициентов. Есть работы, где после составления уравнений пытаются пренебречь некоторыми массами, не изменяя общий вид системы уравнений. При этом матрица инерционных коэффициентов становится особенной. В связи с тенденцией к постоянному расширению круга решаемых задач в данной главе рассматриваются уравнения, имеющие совершенно произвольные (в том числе и прямоугольные) матрицы коэффициентов. Вопросы существования и единственности решения дифференциальных уравнений с прямоугольными матрицами коэффициентов здесь не исследуются.

Рассмотрим некоторые частные случаи постановки задачи о расщеплении системы (6.1.1).

1. $n = m$, $B_2 \equiv 0$, B_1 и B_2 — симметрические постоянные матрицы, причем одна из них положительно определена. Это известная решенная задача теории колебаний о приведении к главным координатам.

2. $n = m$, B_1, B_2, B_3 — постоянные матрицы (не обязательно симметрические) и $B_i \neq 0 \; \forall \, i$. Такие системы уравнений встречаются в механике при наличии неконсервативных и «существенно неконсервативных» сил (таких, как силы демпфирования, псевдоскольжения, гироскопические и т. п.). Эти уравнения, как правило, не приводятся к обычным главным координатам. Расщепление таких уравнений обычно возможно при наличии некоторой симметрии (явной или скрытой) исследуемой физической системы, и поэтому полученное преобразование координат не меняется при изменении параметров системы (жесткостей пружин, геометрических размеров и т. п.), не нарушающих эту симметрию. В этом случае решение такой задачи одновременно является решением более громоздкой задачи, где зависимость матриц B_i от параметров заранее оговорена.

3. $B_i = B_i(t)$, где матрицы $B_i(t)$ представимы в виде

$$B_i(t) = \sum_{k=1}^{p} \mu_k(t) B_i^{(k)}, \; 3p < nm, \; (B_i^{(k)} \text{ — постоянные матрицы}).$$

Получаем задачу о приведении уравнений к максимальному количеству подсистем при использовании только постоянных матриц преобразования.

Далее матрицы $B_i^{(k)}$ обозначаем так: $B_1, B_2, \ldots, B_g$, где $g = 3k$. Невырожденные линейные преобразования системы (6.1.1) — это: а) замена переменных $\mathbf{q} = S\mathbf{y}$, где S — неособенная матрица, б) умножение системы слева на неособенную матрицу H. При этом матрицы преобразуются так:

$$\hat{B}_i = HB_iS, \quad i = \overline{1, g}. \tag{6.1.2}$$

Обозначим размерности матриц B_{ik} коэффициентов, полученных в результате преобразования подсистем через $m_k \times \times n_k$, при этом $\sum\limits_{k=1}^{l} m_k \leqslant m, \sum\limits_{k=1}^{l} n_k \leqslant n$. При данных матрицах B_i число блоков l и размерности $m_k \times n_k$ зависят от H и S. Обозначим $N(HS)$ — максимальное из произведений $m_k \times \times n_k$. Ставятся задачи найти H и S, при которых достигается

1) $\min\limits_{\Omega} N(H, S)$, $\Omega = (H, S : \det H \neq 0, \det S \neq 0)$;

2) $\max\limits_{\Omega} l$.

Ниже будут указаны правила вычисления матриц H и S, а также доказано, что решение второй задачи одновременно является решением первой.

Решение задач 1 и 2 состоит в следующем: сначала составляются вспомогательные квадратные матрицы, для которых нужно решить такую же задачу, но используя лишь преобразование подобия (теоремы 6.3, 6.4); далее с помощью множества матриц, коммутирующих с данными, (способы А и Б) последовательно приводятся к блочно-диагональному виду сначала исходные вспомогательные матрицы, затем полученные на предыдущем этапе блоки; признаком невозможности дальнейшего приведения данных блоков является отсутствие матрицы, имеющей хотя бы два различных собственных числа во множестве матриц, коммутирующих с данными блоками (замечание 6.2); теорема 6.5 утверждает, что указанные действия позволяют найти требуемое преобразование для вспомогательных матриц, а следовательно, и решить задачи 1 и 2.

Введем обозначения. Пусть $v(D)$ — матрица, столбцами которой являются векторы канонического базиса матрицы D, т. е. такая матрица, что $v^{-1}(D)\ D\ v(D) = \mathrm{Gr}\,(D)$, где $\mathrm{Gr}\,(D)$ — жорданова форма матрицы D.

Далее нам понадобится система матричных уравнений

$$T_1B_i = B_iT_2, \quad i = \overline{1, g}, \tag{6.1.3}$$

где T_1 и T_2 — квадратные матрицы порядков m и n соответственно. Множество линейно независимых решений этой системы может быть получено с помощью соответствующей системы линейных однородных алгебраических уравнений, неизвестными которой являются элементы матриц T_1 и T_2.

Отметим, что матрицы T_1 и T_2 имеют общие собственные числа, иначе равенства (6.1.3) означали бы, что все матрицы B_i равны нулю (теорема 2.1). Пронумеруем собственные числа матриц T_1 и T_2 следующим образом: сначала совпадающие собственные числа, затем все остальные. Среди решений уравнений (6.1.3) всегда присутствует множество $T_1 = \alpha E_m$, $T_2 = \alpha E_n$, где E_k — единичная матрица порядка k; α — произвольное число.

Пусть $\sigma(T_i)$ — множество всех различных собственных чисел матрицы T_i и $\sigma_0(T_1, T_2) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$.

Теорема 6.1. *Пусть T_1, T_2 — решение уравнений* (6.1.3) *и $H = v^{-1}(T_1)$, $S = v(T_2)$. Тогда если множество $\sigma_0(T_1, T_2)$ имеет более одного элемента, то преобразование (6.1.2) матриц B_i приводит уравнения* (6.1.1) *к подсистемам меньшего порядка.*

Доказательство. Для матриц $\tilde{T}_1 = HT_1H^{-1}$, $\tilde{T}_2 = S^{-1}T_2S$ и B_i выполняются равенства

$$\tilde{T}_1\hat{B}_i = \hat{B}_i\tilde{T}_2, \quad i = \overline{1, g}, \tag{6.1.4}$$

аналогичные (6.1.3). Матрицы $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ приведены к жордановой форме. Запишем их в следующем виде: $\tilde{T} = \operatorname{diag} T_{jk}$, $j = \overline{1, 2}$, $k = \overline{1, d}$. Здесь каждая пара блоков T_{jk} при $k < d$ состоит из жордановых клеток, соответствующих k-му собственному числу (общему для матриц T_1 и T_2). Блок T_{1d} объединяет все жордановы блоки матрицы T_1, соответствующие ее собственным числам, не совпадающим с собственными числами T_2. Аналогичный вид имеет блок T_{2d}. Поскольку $\sigma_0(T_1, T_2)$ имеет более одного элемента, $d \geqslant 2$.

Разобьем матрицы $\hat{B}_i$ на блоки в соответствии с видом матриц $\tilde{T}_i$:

$$\hat{B}_i = \begin{bmatrix} B_{i11} & B_{i12} & \dots & B_{i1d} \\ B_{i21} & B_{i22} & \dots & B_{i2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{id1} & B_{id2} & \dots & B_{idd} \end{bmatrix}.$$

Равенство (6.1.4) эквивалентно следующим:

$$T_{ik}B_{ik\mu} = B_{ik\mu}T_{2\mu}, \quad i = \overline{1, g}; \quad k = \overline{1, d}, \quad \mu = \overline{1, d}.$$

Из последних равенств при $k \neq \mu$ и при $k = \mu = d$ вытекает: $B_{ik\mu} = 0$, поскольку спектры матрицы T_{1k} и $T_{2\mu}$ не пересекаются. Таким образом, получаем, что матрицы $\hat{B}_i$ имеют блочно-диагональный вид или имеют, по крайней мере, либо нулевые столбцы справа, либо нулевые строки снизу:

$$\hat{B}_i = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} B_{i1} & & 0 & & 0 \\ & B_{i2} & & & 0 \\ & & \ddots & & \cdots \\ 0 & & & B_{id-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} m_1 \\ m_2 \\ \\ m_{d-1} \\ \\ m_d. \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} n_1 & n_2 & \ldots & n_{d-1} & n_d \end{array} \end{array} \quad . \qquad (6.1.5)$$

Любое из чисел n_d или m_d может равняться нулю, но выполняется условие: либо число блоков B_{ij} не менее двух, либо присутствуют нулевые строки или столбцы. ◀

Отметим, что в общем случае упрощение системы (6.1.1) может быть достигнуто вследствие не только разделения уравнений на подсистемы, но и исключения некоторых уравнений или переменных. Любое из таких упрощений будем далее называть расщеплением системы (6.1.1).

Теорема 6.2. *Если существуют невырожденные линейные преобразования, приводящие систему (6.1.1) к подсистемам меньшего порядка, то существует такое решение T_1, T_2 уравнений (6.1.3), что множество $\sigma_0(T_1, T_2)$ имеет более одного элемента.*

Доказательство. Как было указано выше, все невырожденные линейные преобразования уравнений (6.1.1) сводятся к преобразованию (6.1.2) матриц коэффициентов. Пусть H_1 и S_1 — матрицы, при которых получается расщепление. Составим матрицы

$$\begin{cases} \tilde{T}_1 = \mathrm{diag}(1E_{m_1}, 2E_{m_2}, \ldots, (d-1)E_{m_{d-1}}, d, \ldots, d+m_d-1), \\ \tilde{T}_2 = \mathrm{diag}(1E_{n_1}, 2E_{n_2}, \ldots, (d-1)E_{n_{d-1}}, -d, \ldots \\ \qquad\qquad \ldots, -d-n_d+1). \end{cases} \qquad (6.1.6)$$

Для этих матриц и матриц $\hat{B}_i$ выполняются равенства (6.1.4). Поэтому матрицы $T_1 = H\tilde{T}_1H^{-1}$, $T_2 = S\tilde{T}_2S^{-1}$ являются решением уравнений (6.1.3) и их собственные числа равны $1, 2, \ldots, d, \ldots$ ◀

§ 6.2. Переход к задаче нахождения преобразования подобия

Теорема 6.3. *Уравнения* (6.1.1) *расщепляются тогда и только тогда, когда приводятся одновременно к блочно-диагональному виду следующие* $\nu = g + 1$ *матрицы:*

$$C_1 = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 2E_n \end{bmatrix}, \quad C_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.2.1}$$

с помощью преобразования подобия

$$\tilde{C}_j = R^{-1} C_j R = \operatorname{diag}(C_{jk}). \tag{6.2.2}$$

Доказательство. а. Необходимость. Пусть уравнения (6.1.1) расщепляются. Это значит, что матрицы B_i преобразованием (6.1.2) приводятся к виду (6.1.5). Составим матрицу $\tilde{Z} = \operatorname{diag}(\tilde{T}_1 \tilde{T}_2)$, где матрицы $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ имеют вид (6.1.6). Матрица $\tilde{Z}$ коммутирует с матрицами

$$\tilde{C}_1 = C_1, \ \tilde{C}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{B}_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, g}.$$

С другой стороны, как нетрудно проверить, $C_j = Q^{-1} \tilde{C}_j Q$, $j = \overline{1, \nu}$, где $Q = \operatorname{diag}(H^{-1}, S)$. Поэтому равенство $\tilde{Z}\tilde{C}_j = \tilde{C}_j \tilde{Z}$ можно записать в виде $\tilde{Z} Q C_j Q^{-1} = Q C_j Q^{-1} \tilde{Z}$ или, иначе, $(Q^{-1}\tilde{Z}Q)\, C_j = C_j\, (Q^{-1}\tilde{Z}Q)$. Следовательно, существует матрица $Z = Q^{-1}\tilde{Z}Q$, коммутирующая с матрицами (6.2.1) и имеющая не менее двух различных собственных чисел. На основании теоремы 2.3 получаем, что матрицы C_j приводятся к блочно-диагональному виду.

б. Достаточность. Пусть матрицы C_j приводятся к блочно-диагональному виду. Тогда матрица $Z = R\,(\operatorname{diag} kE_{n_k})\, R^{-1}$ коммутирует с ними и имеет хотя бы два различных собственных числа. С другой стороны, матрица Z имеет вид $Z = \operatorname{diag}(Z_1, Z_2)$, поскольку она коммутирует с матрицей C_1, имеющей блочно-диагональный вид с блоками, собственные числа которых различны. Подстановкой матрицы Z в равенство $C_i Z = Z C_i$ убеждаемся в выполнении равенств (6.1.3). Далее из теоремы 6.1 следует, что уравнения (6.1.1) расщепляются ◄

Замечание 6.1. Матрицы преобразования (6.1.2) могут быть составлены по известному преобразованию (6.2.2) с помощью соотношения

$$\operatorname{diag}(H, S) = Rv(\hat{C}_1).$$

При этом матрицы B_i приводятся к виду (6.1.5) так, что число $d-1$ блоков B_{ik} равно количеству блоков C_{ik} таких, что $C_{i2}, \ldots, C_{i\nu}$ не равны нулю одновременно; число m_d нулевых строк равно количеству блоков C_{jk} первого порядка таких, что $C_{j1}=1$, $C_{j2}=\ldots=C_{j\nu}=0$; число n_d нулевых столбцов равно количеству блоков C_{rk} первого порядка таких, что $C_{r1}=2$, $C_{r2}=\ldots=C_{r\nu}=0$.

Таким образом, задача о нахождении преобразования (6.1.2) для расщепления уравнений (6.1.1) сводится к задаче одновременного приведения вспомогательных матриц к блочно-диагональному виду преобразованием подобия.

В случае, когда матрицы B_i квадратные и хотя бы одна из них (например, B_1) неособенная, расщепление может быть достигнуто только разделением уравнений на независимые подсистемы с квадратными матрицами коэффициентов. В этом случае задачу о нахождении преобразования (6.1.2) можно сформулировать иначе: найти неособенные матрицы N и S такие, чтобы умножение системы (6.1.1) на матрицу N слева и дальнейшее преобразование подобия $S^{-1}(NB_iS)$ позволили получить максимальное число подсистем. Необходимость такой постановки задачи подтверждает следующий пример. Матрицы

$$B_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix},\quad B_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

невозможно привести одновременно к диагональному виду преобразованием подобия. Однако такое приведение становится возможным после умножения этих матриц слева на матрицу $N=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0{,}5\end{bmatrix}$. При этом матрица преобразования $S=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$. Теорема 6.4 позволяет свести задачу к нахождению преобразования подобия при условии, что $\det(B_1)\neq 0$.

Введем обозначения. Пусть $l'(B_i, S)$ — количество блоков на главной диагонали матриц $\tilde{B}_i=S^{-1}B_iS$, приведенных к блочно-диагональному виду, а $l(B_i)=\max\limits_{S:\det(S)\neq 0} l'(B_i, S)$.

Теорема 6.4. *Даны матрицы* B_i, $i=\overline{1, g}$, *причем* $B_1=E$, *тогда* $l(NB_i)\leqslant l(B_i)$, $i=\overline{1, g}$, *где* N — *любая неособенная матрица.*

Доказательство. Пусть N_0 и S_0 — матрицы, при которых количество l_0 блоков, получаемых преобразованием

$$\hat{B}_i=S_0^{-1}N_0B_iS_0=\operatorname{diag}(B_{ik}),\quad k=\overline{1, l_0},$$

будет максимальным. При этом матрица $\hat{B}_1 = S_0^{-1} N_0 S_0$ неособенная. Значит, матрицы $\tilde{D}_i = (\hat{B}_1)^{-1} \hat{B}_i$, $i = \overline{1, \nu}$, существуют и имеют блочно-диагональный вид с тем же количеством блоков l_0. Тогда матрица $Z = \operatorname{diag}(kE_k)$ (где $k = \overline{1, l_0}$, а E_k — единичная матрица такого же порядка, что и B_{ik}) коммутирует с матрицами $\tilde{D}_i$, $i = \overline{1, \nu}$. Сделаем преобразование подобия $D_i = S_0 \tilde{D}_i S_0^{-1}$, $Z = S_0 \tilde{Z} S_0^{-1}$, сохраняющее свойство коммутирования. Осталось доказать, что $D_i = B_i$. Действительно, $D_i = S_0 (\hat{B}_1)^{-1} \hat{B}_i S_0^{-1} = S_0 (S_0^{-1} N_0 B_1 S_0)^{-1} S_0^{-1} N_0 B_i S_0 S_0^{-1} = B_1^{-1} B_i = B_i$. Таким образом, матрица Z, имеющая l_0 различных собственных чисел, коммутирует с матрицами B_i. Тогда согласно теореме 6.1 матрицы B_i приводятся к l_0 блокам преобразованием подобия.◀

Следствие. Если в системе (6.1.1) матрица $B_1 = B_1^{(1)}$ неособенная, то для решения задач 1 и 2 надо составить вспомогательные матрицы $C_i = B_1^{-1} B_i$, $i = \overline{2, \nu}$, и для них решить аналогичные задачи, используя лишь преобразования подобия.

В задачах механики это означает, что прежде чем искать централизатор, соответствующий системе (6.1.1), надо в этой системе избавиться от динамических связей и разделить каждое уравнение на инерционный коэффициент.

Может возникнуть предположение, что при $\det(B_1) = 0$ задача о нахождении преобразования (6.1.2) сводится к задаче о нахождении преобразования подобия путем предварительного приведения матрицы B_1 к виду $\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Это не так. Например, матрицы

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

не приводятся одновременно к блочно-диагональному виду преобразованием подобия, но приобретают таковой при умножении слева на матрицу $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

§ 6.3. Алгоритм решения задачи

В предыдущем параграфе было показано, как задача о нахождении преобразования (6.1.2) сводится к задаче нахождения преобразования подобия для матриц C_j порядка n_0:

$$\tilde{C}_j = R^{-1} C_j R = \operatorname{diag} C_{jk}, \quad k = \overline{1, l}; \quad j = \overline{1, g}.$$

К этой же задаче приходим и при упрощении некоторых других типов уравнений.

Рассмотрим алгебру $\Lambda(C_j)$ всех матриц, коммутирующих с матрицами C_j, т. е. множество решений системы матричных уравнений

$$C_jZ = ZC_j, \quad j = \overline{1, g}. \tag{6.3.1}$$

Эта алгебра является централизатором множества $\{C_j\}$ в алгебре всех матриц порядка n_0. Общее решение системы (6.3.1) имеет вид:

$$Z = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k W_k,$$

где α_k — свободные переменные; W_k — матрицы, являющиеся базисом алгебры $\Lambda(C_j)$. Множество решений системы (6.3.1), а именно матрицы W_k можно найти, решая систему линейных однородных алгебраических уравнений; алгоритм, позволяющий осуществить это при высоком порядке матриц C_j, описан в гл. 3.

Существуют следующие способы нахождения матрицы R преобразования подобия.

Способ А (способ коммутирующей матрицы). Из множества $\Lambda(C_j)$ выбираем матрицу Z, имеющую хотя бы два различных собственных числа. Векторы ее канонического базиса являются столбцами искомой матрицы R.

Способ Б. Составляем и решаем систему уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \gamma_{\nu j}^{(\mu)} \rho_\nu \rho_j = \rho_\mu, \quad \mu = \overline{1, r}, \tag{6.3.2}$$

где $\gamma_{\nu j}^{(\mu)}$ — структурные константы алгебры $\Lambda(C_k)$; r — ранг этой алгебры; ρ_ν — координаты проектора P в базисе W_μ. Если матрицы C_k приводятся к блочно-диагональному виду, то приведенная выше система уравнений имеет решение, соответствующее нетривиальному проектору P_1. Из линейно независимых столбцов матрицы P_1 и $P_2 = E - P_1$ составляем матрицу R.

Обоснованием способа А является теорема 2.3.◀

Обоснование способа Б. Если существует преобразование такое, что $\tilde{C}_j = R^{-1}C_jR = \operatorname{diag}(C_{j1}, C_{j2})$, то существует матрица $P_1 = R \operatorname{diag}(E_1, 0) R^{-1}$, которая принадлежит алгебре $\Lambda(C_j)$ и является проектором. Здесь E_1 обозначает единичную матрицу того же порядка m_1, что и матрицы C_{j1}, при этом $0 < m_1 < n_0$. Поэтому проектор P_1 нетривиальный, т. е. $P_1 \neq 0$ и $P_1 \neq E$.

Разложим P_1 в базисе W_ν алгебры $\Lambda(C_j)$: $P_1 = \sum_{\nu=1}^{r} \rho_k W_\nu$.

Подставим это выражение в формулу $P_1^2 = P_1$, являющуюся определением проектора, и, учитывая (4.4.1), имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \rho_\nu \rho_j \gamma_{\nu j}^{(i)} W_i = \sum_{i=1}^{r} \rho_i W_i.$$

Отсюда в силу линейной независимости матриц W_i получаем уравнения (6.3.2).

Матрица P_1 имеет два различных собственных числа $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$. Собственными векторами, соответствующими λ_1, являются столбцы матрицы P_1, а соответствующими λ_2 — матрицы $P_2 = E - P_1$. Действительно, пусть $\mathbf{p}_1$ — столбец P_1, а $\mathbf{p}_2$ — столбец P_2. Тогда из равенства $P_1 P_1 = P_1$ получаем $P_1 \mathbf{p}_1 = 1 \mathbf{p}_1$, а из равенства $P_1 P_2 = P_1 (E - P_1) \equiv \equiv P_1 - P_1^2 = 0$ получаем $P_1 \mathbf{p}_2 = 0 \mathbf{p}_2$. Количество линейно независимых из всех векторов-столбцов матрицы P_1 и P_2 равно n_0, поскольку любой из столбцов матрицы P_2 можно представить в виде $\mathbf{e}_k - \mathbf{p}_k$, где $\mathbf{e}_k$ — единичный вектор, а $\mathbf{p}_k$ — столбец матрицы P_1.◀

Приведение к блокам минимального порядка осуществляется путем последовательного применения способа А или Б сначала к исходным матрицам C_k, затем к получающимся блокам до нахождения нерасщепляющихся блоков (на первом шаге желательно применение методов, использующих априорную информацию о симметрии соответствующей физической системы).

Остается убедиться в том, что после приведения к блокам, не расщепляющимся дальше, уже невозможно увеличить их количество, т. е. если бы мы проводили расщепление в другом порядке, то все равно не получили бы большего количества блоков. Об этом свидетельствует теорема 6.5.

Теорема 6.5. *Пусть матрицы C_j, $j = \overline{1, g}$, некоторым преобразованием подобия приводятся к блочно-диагональному виду*

$$\tilde{C}_j = R_1^{-1} C_j R_1 = \operatorname{diag} C_{jk}, \quad k = \overline{1, l_1}; \quad j = \overline{1, g},$$

причем каждый набор блоков C_{jk}, $j = \overline{1, g}$, не приводится к нескольким блокам одновременно. Если существует другое такое преобразование, что полученные блоки не расщепляются дальше,

$$\tilde{C}_j' = R_2^{-1} C_j R_2 = \operatorname{diag} C_{j\mu}', \quad \mu = \overline{1, l_2}; \quad j = \overline{1, g},$$

то $l_1 = l_2$ и может быть установлено соответственно между номерами k и μ такое, что блоки C_{jk} подобны блокам $C'_{j\mu(k)}$: $C_{jk} = r_k^{-1} C'_{j\mu(k)} r_k$.

Доказательство. Составим алгебру φ, порожденную матрицами $E, C_1, \ldots, C_g$ (см. § 4.4). Составим далее левый φ-модуль M, элементами которого являются n_0-мерные векторы. Очевидно, что одновременному приведению матриц C_j преобразованием подобия к блочно-диагональному виду с блоками, не приводящимися дальше, соответствует разложение модуля M в прямую сумму неразложимых подмодулей.

Согласно теореме Крулля — Шмидта другое такое разложение модуля содержит столько же подмодулей и соответствующие подмодули изоморфны. Следовательно, другое приведение матриц C_j к блокам, не приводящимся дальше, дает столько же блоков, и блоки соответствующих разложений подобны. ◀

Теоремы 6.3—6.5 устанавливают единственность приведения уравнений к нерасщепляющимся подсистемам.

Следует рассмотреть особо случай, когда все элементы W_k базиса алгебры $\Lambda(C_j)$ не имеют различных собственных чисел. Если при этом алгебра имеет ранг $r = 1$, то очевидно, что $W_1 = \alpha E$ $(\alpha \in C)$ и исходные матрицы C_j не приводятся к блочно-диагональному виду. Рассмотрим этот вопрос при $r > 1$.

Теорема 6.6. *Если алгебра $\Lambda(C_j)$ имеет ранг $r \leqslant 3$ и все элементы ее базиса не имеют различных собственных чисел, то не существует преобразования подобия, приводящего матрицы C_j к блочно-диагональному виду одновременно. При $r = 4$ аналогичное утверждение несправедливо.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $r = 3$. Пусть W_1, W_2, W_3 — базис алгебры $\Lambda(C_j)$, а $\lambda(W_1)$, $\lambda(W_2)$, $\lambda(W_3)$ — соответствующие собственные числа. Единичная матрица E всегда принадлежит централизатору. Элементы E, $W_j - \lambda(W_j)E$, $j = 1, 2, 3$, линейно зависимы. Можно исключить один из них, не равный E, так, чтобы оставшиеся были линейно независимы. Обозначим их через U_1, U_2, U_3, причем $U_1 = E$, тогда очевидно, что матрицы U_2 и U_3 нильпотентны, и поэтому $\exists\, k_\mu : U_\mu^{k_\mu+1} = 0$, $U_\mu^{k_\mu} \neq 0$, $\mu = 2, 3$. Докажем, что линейная оболочка Λ_1 матриц U_2 и U_3 является подалгеброй, т. е. что структурные константы $\gamma_{j\mu}^{(1)}$, $j, \mu = 2, 3$, равны нулю. Для этого умножим равенство

$$U_2 U_3 = \gamma_{23}^{(1)} E + \gamma_{23}^{(2)} U_2 + \gamma_{23}^{(3)} U_3$$

справа на $U_3^{k_3}$:

$$0 = \gamma_{23}^{(1)} U_3^{k_3} + \gamma_{23}^{(2)} U_2 U_3^{k_3}.$$

При $\gamma_{23}^{(2)} = 0$ сразу получаем $\gamma_{23}^{(1)} = 0$. Если $\gamma_{23}^{(2)} \neq 0$, то

$$\left(U_2 + \frac{\gamma_{23}^{(1)}}{\gamma_{23}^{(2)}} E\right) U_3^{k_3} = 0.$$

Поскольку $U_3^{k_3} \neq 0$, число $-\gamma_{23}^{(1)}/\gamma_{23}^{(2)}$ является собственным числом матрицы U_2. Собственные числа нильпотентной матрицы нулевые, поэтому $\gamma_{23}^{(1)} = 0$. Аналогичные рассуждения проводим и для других $\gamma_{j\mu}^{(1)}$.

Поскольку подалгебра Λ_1 имеет нильпотентный базис, то согласно теореме Веддерберна она нильпотентна. Следовательно, любой элемент алгебры $\Lambda(C_j)$ представим в виде $Z = \alpha E + L$, где $\alpha \in C$; L — нильпотентный элемент. Тогда любая матрица $Z \in \Lambda(C_j)$ имеет единственное собственное число α. Если бы исходные матрицы приводились к блочно-диагональному виду $R^{-1} C_j R = \operatorname{diag}(C_{jk})$, то существовала бы матрица $Z_1 = R \operatorname{diag}(kE_k) R^{-1} \in \Lambda(C_j)$, имеющая несколько различных собственных чисел.

При $r < 3$ доказательство аналогичное.

Рассмотрим пример: $C_1 = C_2 = C_3 = E_2$; централизатор представляет собой множество всех матриц порядка 2; ранг алгебры $r = 4$; один из базисов

$$W_1 = E_2,\ W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ W_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

этой алгебры содержит матрицы, не имеющие различных собственных чисел. ◀

Таким образом, если при $r > 3$ не удалось найти матрицу $Z \in \Lambda(C_j)$, содержащую несколько различных собственных чисел, то выяснить возможность одновременного приведения матриц C_j к нескольким блокам можно только с помощью уравнений (6.3.2). Решение такой системы нелинейных уравнений обычно сложнее, чем применение способа А.

Замечание 6.2. При доказательстве теоремы 6.6 одновременно доказано утверждение: «Если в централизаторе $\Lambda(C_j)$ нет ни одной матрицы, имеющей хотя бы два различных собственных числа, то не существует преобразования подобия, приводящего матрицы C_j одновременно к блочно-диагональному виду».

§ 6.4. Вещественные матрицы коэффициентов

Рассмотрим уравнения (6.1.1) в случае, когда матрицы B_j и вектор $\mathbf{x}$ вещественные. Часто возникает задача расщепления этих уравнений при использовании только вещественных преобразований.

Для вещественной матрицы D введем матрицу $U(D)$ такую, что вещественные столбцы матриц $v(D)$ и $U(D)$ совпадают, а на месте каждой пары комплексно сопряженных векторов-столбцов $\mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$ матрицы $v(D)$, соответствующих комплексно сопряженным собственным числам $\alpha \pm i\beta$ матрицы D, в матрице $U(D)$, расположены вещественные столбцы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Таким образом, $U(D)$ — вещественные матрицы, причем $U^{-1}(D)DU(D) = \Phi(D)$, где $\Phi(D)$ — такая блочно-диагональная матрица, что каждому вещественному собственному числу матрицы D или каждой паре комплексно сопряженных собственных чисел соответствует отдельный блок.

Заметим, что многие программы вычисления на ЭВМ собственных векторов выдают результат в виде матрицы $U(D)$.

Для случая вещественных переменных выполняются теоремы, аналогичные теоремам 6.1—6.6, но вместо матрицы $v(D)$ используется матрица $U(D)$, вместо условия: «хотя бы два различных собственных числа»— ставится условие: «хотя бы два различных собственных числа, имеющих неотрицательные мнимые части». Количество подсистем, получающихся только с помощью вещественных преобразований, может быть меньше, чем в общем случае. Например, матрицы $C_1 = C_2 = C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ не приводятся к диагональному виду вещественными преобразованиями, но приводятся комплексными.

§ 6.5. Составление группы симметрии

Рассмотрим уравнения (6.1.1) при $m = n$ и $\det B_1^{(1)} \neq 0$.

Замечание 6.3. Зная матрицу R преобразования подобия, можно найти группу симметрии исследуемой физической системы. Образующими соответствующей группы матриц будут $T_\mu = RL_\mu R^{-1}$, где

$$L_\mu = \mathrm{diag}(E_1,\ E_2,\ \ldots,\ -E_\mu,\ \ldots,\ E_l). \qquad (6.5.1)$$

Действительно, элементы полученного множества образуют конечную абелеву группу, поскольку $L_j L_\mu = L_\mu L_j$ и $L_\mu^2 = E$. Элементы группы коммутируют с матрицами C_ι, а разложение их на неприводимые представления соответствует приведению образующих группы к виду (6.2.2) с точностью до порядка расположения блоков, т. е. преобразованию подобия с матрицей преобразования R. ◀

Такая группа не единственная. Это видно из того, что данная группа абелева, в то время как группа симметрии физической системы может быть неабелевой. Понятно, что матрицы любой группы симметрии принадлежат множеству $\Lambda(C_i)$.

Приведем пример матриц, для которых централизатор не является полупростой алгеброй и существует группа симметрии, не обладающая функционалом усреднения:

$$B_1 = E_3, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Образующими алгебры $\Lambda(B_j)$ являются матрицы $W_1 = E_3$,

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эта алгебра не является полупростой, поскольку $\det(\mathrm{Sp}\, W_j W_u) = 0$. Для группы G с образующими W_2 и W_3 не существует функционала усреднения. Это видно из того, что инвариантное относительно группы подпространство $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(\alpha \in C)$ не имеет прямого дополнения (до всего пространства C^3), инвариантного относительно группы G. В то же время матрица W_3 имеет два различных собственных значения. В соответствии со способом A получаем:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = E_3, \quad B_2 = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$B_3 = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Дальнейшее расщепление полученных блоков уже невозможно, поскольку вторые блоки имеют первый порядок, а среди первых блоков есть матрица $B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, которая представляет собой жорданов блок второго порядка. На основании теоремы 6.5 делаем вывод, что выполнено преобразование подобия с максимально возможным для данных матриц числом блоков на главной диагонали.

Глава 7

УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПУТЕМ ПРИВЕДЕНИЯ МАТРИЦ КОЭФФИЦИЕНТОВ К БЛОЧНО-ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ (АГРЕГИРОВАНИЕ)

Приведение матриц коэффициентов к блочно-треугольному виду позволяет привести исходную систему уравнений к вспомогательным подсистемам меньшего порядка, которые эквивалентны исходной системе уравнений с точки зрения устойчивости движения. Если матрицы коэффициентов несимметрические, то число таких вспомогательных подсистем может быть больше, чем максимально возможное число независимых подсистем, к которым приводится данная система уравнений. Несимметричность матриц коэффициентов обусловлена наличием неконсервативных позиционных либо гироскопических сил.

Читатели, интересующиеся только прикладной стороной вопроса, могут обратиться к § 7.3. В § 7.1 и 7.2 содержится теоретическое обоснование метода. При этом используются довольно глубокие результаты общей алгебры.

Все теоретические рассуждения в данной главе проведены для случая комплексных матриц, однако при вычислениях в ряде случаев удается не выходить за пределы «вещественной» арифметики.

§ 7.1. Основные теоремы

В некоторых случаях может оказаться, что матрицы коэффициентов системы (3.6.1) никаким преобразованием $\tilde{B}_\nu = HB_\nu S$ не приводятся к блочно-диагональному виду, зато приводятся к блочно-треугольному, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример 7.1. Матрицы

$$B_1 = E, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

не приводятся одновременно к блочно-диагональному виду, в чем легко убедиться, вычислив соответствующий централизатор. В то же время эти матрицы имеют треугольный вид. Следовательно, представляет интерес задача одновременного приведения матриц к блочно-треугольному виду.

Пусть S и H — матрицы преобразования координат, при которых преобразованная система имеет вид:

$$\tilde{B}_1\ddot{\mathbf{y}} + \tilde{B}_2\dot{\mathbf{y}} + \tilde{B}_3\mathbf{y} = 0, \qquad (7.1.1)$$

где

$$\tilde{B}_\nu = HB_\nu S = \begin{bmatrix} B_{\nu 11} & B_{\nu 12} & \dots & B_{\nu 1p} \\ 0 & B_{\nu 22} & \dots & B_{\nu 2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{\nu pp} \end{bmatrix}.$$

Вспомогательные системы уравнений составим из блоков матриц $\tilde{B}_{\nu jj}$, стоящих на главной диагонали,

$$B_{1jj}\ddot{\mathbf{z}}_j + B_{2jj}\dot{\mathbf{z}}_j + B_{3jj}\mathbf{z}_j = 0, \quad j = \overline{1, p}. \qquad (7.1.2)$$

Теорема 7.1. *Решения исходной системы уравнений асимптотически устойчивы тогда и только тогда, когда асимптотически устойчивы решения вспомогательных систем (7.1.2).*

Доказательство. Характеристический определитель

$$\det (D(\lambda)) = \det (\lambda^2\tilde{B}_1 + \lambda\tilde{B}_2 + \tilde{B}_3)$$

преобразованной системы (7.1.1) равен произведению определителей системы (7.1.2). Следовательно, множество собственных чисел системы (3.6.1) равно объединению множеств собственных чисел систем (7.1.2), поскольку условия равенства нулю определителей $\det (D(\lambda))$ и $\det (HD(\lambda) S)$ совпадают при неособенных H и S. ◀

Отметим, что в случае приведения матриц к блочно-диагональному виду множество вспомогательных подсистем эквивалентно исходной системе уравнений как с точки зрения асимптотической устойчивости, так и с точки зрения устойчивости.

Операцию приведения системы уравнений (3.6.1) к вспомогательным подсистемам (7.1.2) в отличие от расщепления будем называть агрегированием. Для этого существуют также термины «вертикальная декомпозиция», «последовательная декомпозиция», «приводимость».

Далее рассматриваем преобразование не трех, а произвольного числа матриц. Как указано в гл. 6, это может понадобиться в случае, когда матрицы зависят от параметров.

Агрегирование может дать дополнительное (по отношению к декомпозиции на независимые подсистемы) упрощение только в случае несимметрических матриц. Об этом свидетельствует следующая теорема.

Теорема 7.2. *Если матрицы* B_ν, $\nu=\overline{1,\ d}$, *симметрические и приводятся одновременно к блочно-треугольному виду преобразованием подобия, то они приводятся и к блочно-диагональному виду с тем же количеством блоков на главной диагонали.*

Доказательство. Пусть матрицы $\tilde{B}_\nu = S^{-1}B_\nu S$ имеют верхний блочно-треугольный вид. Проведем ортонормировку столбцов матрицы S. Это можно сделать, умножив справа матрицу S на верхнюю треугольную матрицу T. Полученная матрица $U=ST$ будет ортогональной. Преобразование $U^{-1}B_\nu U$ также приводит матрицу B_ν к блочно-треугольному виду. Действительно, $\hat{B}_\nu = U^{-1}B_\nu U = T^{-1}S^{-1}B_\nu ST = T^{-1}\tilde{B}_\nu T$; в последнем произведении все три матрицы имеют одинаковый блочно-треугольный вид, поэтому $\hat{B}_\nu$ — тоже блочно-треугольные матрицы. При ортогональном преобразовании подобия симметричность матриц сохраняется. Следовательно, блочно-треугольные матрицы $\hat{B}_\nu$ симметрические, а значит, и блочно-диагональные. ◀

Рассмотрим сначала вопрос о приведении матриц к виду (7.1.1) преобразованием подобия, т. е. в случае, когда $H=S^{-1}$.

Теорема 7.3. *Для того чтобы матрицы* B_ν *можно было привести к блочно-треугольному виду* $\tilde{B}_\nu = \begin{bmatrix} B_{\nu1} B_{\nu2} \\ 0 \quad B_{\nu3}\end{bmatrix}$ *преобразованием подобия, необходимо и достаточно существование подпространства* $V\subset C^n$ *инвариантного относительно* B_ν.

Доказательство. а. Необходимость. Пусть

$$\tilde{B}_\nu = S^{-1}B_\nu S = \begin{bmatrix} B_{\nu1} & B_{\nu2} \\ 0 & B_{\nu3}\end{bmatrix},$$

где $B_{\nu1}$ — матрицы порядка m. Тогда множество векторов $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$, где $\mathbf{x}\in C^m$, инвариантно относительно матриц $\tilde{B}_\nu$, т. е., если $\tilde{V}=\left\{\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ 0\end{bmatrix},\ \mathbf{x}\in C^m\right\}$, то $\mathbf{y}\in\hat{V}\Rightarrow\tilde{B}_\nu\mathbf{y}\in\tilde{V}$. Пусть V состоит из векторов $\mathbf{z}=S\mathbf{y}$, $\mathbf{y}\in V$. Тогда $\mathbf{z}\in V\Rightarrow B_\nu\mathbf{z} = S\tilde{B}_\nu S^{-1}S\mathbf{y} = S\tilde{B}_\nu\mathbf{y} = Sy_1\in\tilde{V}$.

б. Достаточность. Существует нетривиальное подпространство V, инвариантное относительно матриц B_ν. Введем обозначения: $\{\mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2,\ \dots,\ \mathbf{s}_r\}$ — базис подпространства V, а $\{\mathbf{s}_{r+1},\ \dots,\ \mathbf{s}_n\}$ — его дополнение до базиса всего C^n. Преобразование подобия для матриц B_ν с матрицей преобразования

S, столбцами которой являются векторы $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n\}$, соответствует переходу к другому базису. Элементы преобразованной матрицы равны коэффициентам в следующем выражении (см. (4.2.5)):

$$\tilde{B}_\nu \mathbf{s}_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{\nu jk} \mathbf{s}_j. \tag{7.1.3}$$

Условие инвариантности подпространства V означает, что любой из элементов базиса $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_r\}$ после умножения на какую-либо из матриц B_ν остается в подпространстве V и поэтому является линейной комбинацией элементов $\{\mathbf{s}_1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{s}_r\}$:

$$B_\nu \mathbf{s}_k = \sum_{j=1}^{r} \beta_{\nu jk} \mathbf{s}_j. \tag{7.1.4}$$

Сравнивая (7.1.3) и (7.1.4) с учетом линейной независимости векторов $\mathbf{s}_j$, получаем $\beta_{\nu jk} = 0$, $j = \overline{r+1, n}$, эти равенства выполняются при всех $k = \overline{1, r}$. Следовательно, соответствующие элементы матриц B_ν равны нулю, т. е. эти матрицы имеют блочно-треугольный вид. ◀

Следствие. Для возможности приведения матриц B_ν к блочно-треугольному виду (7.1.1) преобразованием подобия необходимо и достаточно существование цепочки подпространств $\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_p = C^n$, инвариантных относительно матриц B_ν, причем каждое подпространство L_{j+1} имеет размерность, большую размерности подпространства L_j на число, равное порядку блока $B_{\nu jj}$. ◀

Теорема 7.4 *(А. К. Лопатин). Для существования преобразования подобия, приводящего матрицы* $B_\nu, \nu = \overline{1, d}$, *к блочно-треугольному виду с количеством блоков* l, *необходимо и достаточно существование семейства матриц* $G(\boldsymbol{\tau})$, $(\boldsymbol{\tau} \in$ $\in C^p)$, *таких, что*

$$G^j(\boldsymbol{\tau}) B_\nu L_j = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau}\ \forall\, \nu, \tag{7.1.5}$$

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_l \equiv C^n, \ \dim L_{j+1} > \dim L_j,$$

где $L_j = \{\xi : G^j(\mathbf{t})\, \xi = 0\ \forall\, \mathbf{t} \in C^p\}$.

Доказательство. а. Необходимость. Пусть матрицы $\tilde{B}_\nu = S^{-1} B_\nu S$ блочно-треугольные, блоки $B_{\nu kk}$, стоящие на главной диагонали, имеют порядок m_k, при этом $\sum_{k=1}^{d} m_k = n$. Выберем семейство матрицы $G(\boldsymbol{\tau})$ в виде $G(\boldsymbol{\tau}) =$ $= S\tilde{G}(\boldsymbol{\tau}) S^{-1}$, где матрицы $\tilde{G}(\boldsymbol{\tau})$ имеют такой же блочный вид, как и $\tilde{B}_\nu$, причем все блоки переменной матрицы $G(\boldsymbol{\tau})$, стоящие выше главной диагонали заполнены параметрами τ_1, τ_2, ..., τ_p, а остальные элементы этой матрицы равны нулю. Тогда

$$L_j = \{\tilde{\xi} = [\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}, \ \ldots \ \mathbf{x}_j^{\mathrm{T}}, \ 0, \ \ldots, \ 0]^{\mathrm{T}}\},$$

где $\mathbf{x}_k \in C^{m_k}$.

Нетрудно убедиться, что $\tilde{C}^j(\boldsymbol{\tau})\, \tilde{B}_\nu \tilde{\xi} = \mathbf{0}\ \forall \xi \subset L_j$; после ряда преобразований $G(\boldsymbol{\tau}) = S\tilde{G}(\boldsymbol{\tau})\ S^{-1}$, $B_\nu = S\tilde{B}_\nu S^{-1}$, $\xi = S\tilde{\xi}$ это соотношение остается в силе.

б. Достаточность. Пусть $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_{m_1}$ — базис подпространства L_1, а $\mathbf{S}_{m_1+1}, \ldots, \mathbf{S}_{m_1+m_2}$ — векторы, дополняющие этот базис до базиса подпространства L_2; аналогично определяем и остальные векторы $\mathbf{S}_k$ ($k = m_1 + m_2 + 1, \ldots, n$). Условие $G^j(\boldsymbol{\tau})\, B_\nu L_j = G^j(\boldsymbol{\tau})\, (B_\nu L_j) = \mathbf{0}$ означает, что $B_\nu L_j \subset L_j$, т. е. подпространство L_j инвариантно относительно матриц B_ν. ◀

Замечания к теореме 7.4.

1). Любая из матриц $G(\boldsymbol{\tau})$ нильпотентна. Это следует из того, что $L_m \equiv C^n$, т. е. уравнение $G^m(\boldsymbol{\tau})\, \xi = \mathbf{0}$ имеет n линейно независимых решений, что возможно только в случае, когда $G^m(\boldsymbol{\tau}) = 0$.

2). Достаточное условие теоремы выполняется и в случае, когда существует одна матрица, для которой выполняются условия (7.1.5). Необходимое же условие может не выполняться, т. е. существует пример матриц, имеющих блочно-треугольный вид, для которых не существует матрицы G, удовлетворяющей условиям (7.1.5).

3). Матрицы $G(\boldsymbol{\tau})$, используемые при доказательстве необходимости, таковы, что все произведения $G(\boldsymbol{\tau})\, B_\nu$ нильпотентны.

Теоремы 7.3 и 7.4 пока еще не дают вычислительных алгоритмов для решения задачи агрегирования. Теорема 7.5 дает такой алгоритм в частном случае.

Теорема 7.5. *Если ранг централизатора $\Lambda(B_\nu)$ матриц B_ν больше единицы: $r > 1$, то матрицы B_ν приводятся к блочно-треугольному виду.*

Доказательство. Выберем базис $W_1, \ldots, W_r$ алгебры $\Lambda(B_\nu)$, в котором $W_1 = E$. Если матрица W_2 имеет хотя бы два различных собственных числа, то матрицы B_ν приводятся к блочно-диагональному (а следовательно, и к блочно-треугольному) виду с блоками, соответствующими различным собственным числам матрицы W_2. Если же матрица W_2 имеет единственное собственное число λ, то матрица $G = W_2 - \lambda E$ нильпотентна и удовлетворяет условиям теоремы 7.4. Действительно, подпространство $L = \{\xi : G\xi = 0\}$ не тривиальное, поскольку матрица G нильпотентная и ненулевая. Кроме того, $GB_\nu\xi = B_\nu G\xi = B_\nu 0 = 0\ \forall\xi$. Поэтому существует преобразование, приводящее матрицы B_ν к блочно-треугольному виду. ◀

Условие $r > 1$ не является необходимым для приведения матриц к блочно-треугольному виду. Например, базис централизатора матриц из примера 7.1 состоит из одной матрицы E. Необходимые и достаточные условия, пригодные для построения вычислительных алгоритмов, приведены в § 7.2.

Преобразование $HB_\nu S$ является более общим, чем преобразование подобия. Введем обозначения. Пусть $l'(B_\nu, S)$ — количество блоков на главной диагонали матриц $\tilde{B}_\nu = S^{-1}B_\nu S$, приведенных к блочно-диагональному виду, а

$$l(B_\nu) = \max_{S:\det S\neq 0} l'(B_\nu, S).$$

Теорема 7.6. *Даны матрицы* B_ν, $\nu = \overline{1, d}$, *причем* $B_1 = E$, *тогда* $l(NB_\nu) \leqslant l(B_\nu)$, где N — *любая неособенная матрица.*

Доказательство. Пусть N_1 и S_1 — матрицы, с помощью которых данные матрицы B_ν приводятся к блочно-треугольному виду по формуле $\hat{B}_\nu = S_1^{-1}N_1B_\nu S_1$ и имеют при этом максимально возможное количество l_1 блоков на главной диагонали. Очевидно, что в этом случае матрицы $\tilde{D}_\nu = (\hat{B}_1)^{-1}\hat{B}_\nu$ тоже блочно-треугольные с блоками той же размерности. Согласно теореме 7.4 должны существовать матрицы $G(\tau)$ $(\tau \in C^p)$ такие, что

$$\tilde{G}^j(\tau)\tilde{D}_\nu\tilde{L}_j = 0 \quad \forall\tau \quad \forall\nu, \tag{7.1.6}$$

$$\{0\} \equiv \tilde{L}_0 \subset \tilde{L}_1 \subset \tilde{L}_2 \subset \cdots \subset \tilde{L}_{q_1} \equiv C^n,\ \dim\tilde{L}_{j+1} > \dim\tilde{L}_j,$$

где $\tilde{L}_j = \{\tilde{\xi} : \tilde{G}^j(\tau)\tilde{\xi} = 0\}$.

Сделаем преобразование подобия $D_\nu = S_1\tilde{D}_\nu S_1^{-1}$, $G(\tau) = S_1\tilde{G}(\tau)S_1^{-1}$ и замену векторов $\tilde{\xi}$ на $\xi = S_1\tilde{\xi}$. Соотношения (7.1.6) при этом сохраняются. Кроме того, $D_\nu = B_\nu$:

$$D_\nu = S_1\tilde{D}_\nu S_1^{-1} = S_1(S_1^{-1}N_1S_1)^{-1}(S_1^{-1}N_1B_\nu S_1)S_1^{-1} =$$
$$= S_1S_1^{-1}N_1^{-1}S_1S_1^{-1}N_1B_\nu S_1S_1^{-1} = B_\nu.$$

Далее используя теорему 7.4, получаем $l(B_\nu) \geqslant l_1$. ◀

Итак, для нахождения преобразования (7.1.1) с максимально возможным количеством блоков на главной диагонали достаточно решить такую задачу с помощью преобразования подобия для вспомогательных матриц $C_\nu = B_1^{-1} B_{\nu+1}$, $\nu = \overline{1,\ \mu}$, $\mu = d - 1$. Рассматривается случай, когда матрица B_1 неособенная.

Для задачи агрегирования, так же как и для расщепления, выполняется теорема единственности.

Теорема 7.7. *Пусть матрицы C_i, $i = \overline{1,\ \mu}$, некоторым преобразованием подобия приводятся к блочно-треугольному виду*

$$\tilde{C}_i = R_1^{-1} C_i R_1 = \operatorname{diag} C_{ik}, \quad k = \overline{1,\ l_1}; \quad i = \overline{1,\ \mu},$$

причем для каждого набора блоков C_{ik}, $i = \overline{1,\ \mu}$, невозможно дальнейшее агрегирование. Если существует другое преобразование подобия такое, что для полученных блоков уже невозможно дальнейшее агрегирование

$$\tilde{C}'_i = R_2^{-1} C_i R_2 = \operatorname{diag} C'_{ij}, \quad j = \overline{1,\ l_2}; \quad i = \overline{1,\ \mu},$$

то $l_1 = l_2$ и может быть установлено соответствие между номерами k и j такое, что блоки C_{ik} подобны блокам $C'_{ij(k)}$: $C_{ik} = r_k^{-1} C_{ij(k)} r_k$.

Эта теорема является следствием теоремы Жордана — Гельдера. ◀

Рассмотрим следующий пример.

Пример 7.2. Матрицы

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.1.7}$$

имеют блочно-треугольный вид, и для них не существует нильпотентной матрицы G, для которой выполняются условия (7.1.5).

Заметим, что матрицы имеют вид

$$B_i = \left[\begin{array}{c|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \hline 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{i11} & B_{i12} \\ 0 & B_{i22} \end{bmatrix},$$

причем блоки $\mathring{B}_{i22}$ не приводятся к треугольному виду одновременно. Это следует из того, что матрицы $B_{422}, \ldots, B_{722}$ образуют базис полной матричной алгебры порядка 2. Отсюда по теореме 7.7 следует, что для матриц (7.1.7) невозможно получить больше двух блоков на главной диагонали.

Предположим, что существует соответствующая матрица G такая, что $G^{k-1} \neq 0$, $G^k = 0$, $3 \geqslant k > 1$, и выполняются равенства (7.1.5). Если $k = 3$, то по достаточному условию теоремы 7.4 для матриц (7.1.7) можно было бы получить три блока на главной диагонали. Поэтому $k = 2$ и равенство (7.1.5) приобретает вид $GB_iL_1 = 0$, $0 \equiv L_0 \subset L_1 \subset L_2 \equiv C^n$. Пусть $\mathbf{0} \neq \xi \subset L_1$, где из равенства $GB_k\xi = \mathbf{0}$ при $k = 1, 2, 3$ получаем $g_{k1}\xi_i = 0$, $i = \overline{1, 3}$, $k = \overline{1, 3}$, где ξ_i — компоненты вектора ξ.

Отсюда, учитывая то, что ξ_i, $i = \overline{1, 3}$, не равны нулю, одновременно получаем

$$g_{k1} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \tag{7.1.8}$$

т. е. первый столбец матрицы G нулевой. Допустим rang $G = 2$. Тогда из условия $GG = 0$ получим $g_{ij} = 0$, $i = 2, 3$; $j = 2, 3$, а в этом случае матрица имеет две нулевые строки. Поэтому rang $G < 2$. Для любого вектора $\xi \in L_1$ выполняется равенство $G\xi = \mathbf{0}$, или в скалярной записи

$$g_{i2}\xi_2 + g_{i3}\xi_3 = 0, \quad i = \overline{1, 3}. \tag{7 1.9}$$

Поскольку rang $G < 2$, система уравнений (9) имеет ненулевое решение $[\xi_2, \xi_3]$, т. е. $\exists \xi \in L_1 : \xi_k \neq 0$, $k = 2 \vee k = 3$. Для вектора ξ выполняются равенства $GB_i\xi = \mathbf{0}$, $i = \overline{1, 7}$. Из этих равенств с номерами $i = 2 + 2k$, $3 + 2k$ получаем: $g_{j2}\xi_k = 0$, $g_{j3}\xi_k = 0$, $j = \overline{1, 3}$. Поскольку $\exists k$: $\xi_k \neq 0$, то с учетом (7.1.8) находим, что все элементы матрицы G нулевые. Это противоречит первоначальному предположению. ◀

§ 7.2. Нахождение общего инвариантного подпространства нескольких матриц

Для приведения матриц B_ν к блочно-треугольному виду необходимо найти их общее нетривиальное инвариантное подпространство, т. е. подпространство, инвариантное относительно всех матриц одновременно.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится алгебра, порожденная матрицами E, B_ν, $\nu = \overline{1, \mu}$. Обозначим ее $\varphi(B_\nu)$.

Теорема 7.8. *Для возможности приведения матриц B_ν к блочно-треугольному виду необходимо и достаточно, чтобы ранг r алгебры $\varphi(B_\nu)$ был меньше, чем n^2.*

Лемма. *Возможность приведения матриц B_ν к блочно-треугольному виду эквивалентна приводимости алгебры $\varphi(B_\nu)$.*

Доказательство. Если матрицы B_ν в некотором базисе имеют блочно-треугольный вид, то их сумма, произведение и результат произведения матрицы на число имеют такой же блочно-треугольный вид. Поэтому все матрицы алгебры имеют в этом базисе блочно-треугольный вид и, следовательно, имеют общее нетривиальное инвариантное подпространство (теорема 7.3). И наоборот, если алгебра $\varphi(B_\nu)$ приводима, то все матрицы B_ν приводятся к блочно-треугольному виду.◀

Доказательство теоремы 7.8. а. Необходимость. Пусть матриц B_ν приводятся к блочно-треугольному виду $\tilde{B}_\nu$. Алгебра $\varphi(\tilde{B}_\nu)$ является подалгеброй множества всех матриц порядка n. Это множество имеет базис, состоящий из матриц e_{jk}, у которых элемент с номером jk равен единице, а остальные элементы равны нулю. Таких матриц ровно n^2. Алгебра $\varphi(B_\nu)$ также имеет базис, состоящий из матриц e_{jk}, не во всех, а за исключением соответствующих нулевым блокам, расположенным ниже главной диагонали. Поэтому $r < n^2$.

б. Достаточность. Пусть $r < n^2$. Тогда алгебра $\varphi(B_\nu)$ приводима. Если бы она была неприводима, то из теоремы Бернсайда вытекало бы, что $r = n^2$.

Приводимая алгебра имеет нетривиальное инвариантное подпространство. Следовательно, существует преобразование, приводящее все ее матрицы (в том числе и $\{B_\nu\}$) к блочно-треугольному виду (теорема 7.3).◀

Пусть $r < n^2$. Если при этом дискриминант алгебры $\varphi(B_\nu)$ не равен нулю, то она полупроста. Эта алгебра не является простой, поскольку она приводима (теорема 4.4). Следовательно, в этом случае матрицы B_ν могут быть приведены к блочно-диагональному виду. Методы для такого приведения изложены в гл. 6.

Если же при $r < n^2$ дискриминант алгебры $\varphi(B_\nu)$ равен нулю, то общее решение уравнения (4.4.2) позволяет найти радикал алгебры. Пусть матрицы $\{W_k\}$ — это базис алгебры $\varphi(B_\nu)$, а векторы $\mathbf{y}^{(j)} = [y_1^{(j)}, y_2^{(j)} \ldots y_r^{(j)}]^\mathrm{T}$, $j = \overline{1, p}$, — базис в пространстве решений уравнения (4.4.2). Тогда базис радикала состоит из матриц вида $D_l = \sum_{k=1}^{r} y_k^{(j)} W_k$.

Ненулевой радикал матричной алгебры представляет собой семейство матриц $G(\tau)$. Для него выполняется достаточное условие теоремы 7.4. Действительно, уравнение $G(\tau)\xi = 0$ имеет ненулевые решения. Это видно из того, что $\exists k \geqslant 1$!

$G^k(\tau) \neq 0$, $G^{k+1}(\tau) = 0$. Пусть G_1 — ненулевая матрица из множества $G^k(\tau)$, а ξ_1 — ее ненулевой столбец. Тогда $G(\tau)\zeta_1 = 0$, поскольку $G(\tau)(G^k(\tau)) = 0$.

Матрицы B_ν принадлежат алгебре $\varphi(B_\nu)$. Поэтому $\exists \tau_1 : G(\tau_1)\ B_\nu \in \{G(\tau)\}$. Отсюда получаем $G(\tau_1)\ B_\nu\xi = G(\tau_2)\ \xi = 0\ \ \forall\tau_1$, где $\xi \in L = \{\xi : G(\tau)\ \xi = 0,\ \forall\tau\}$, т. е. выполняются условия (7.1.5).

Таким образом, с помощью радикала алгебры $\varphi(B_\nu)$ можно найти инвариантное относительно матрицы B_ν подпространство. В следующем параграфе рассмотрены вычислительные аспекты этого нахождения.

Зная инвариантное относительно обеих матриц подпространство L_1, можно построить матрицу преобразования S. Пусть $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_m$ — базис подпространства L_1. Найдем векторы $\mathbf{s}_{m+1}, \mathbf{s}_{m+2}, \mathbf{s}_{m+3}, \ldots, \mathbf{s}_n$ как дополнение первых до базиса всего n-мерного пространства. Это можно сделать, например, так: составить множество векторов $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_m$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, где $\{\mathbf{e}_k\}$ — единичные векторы; затем из этого множества последовательно исключить линейно зависимые векторы.

Другой способ построения подпространства, дополнительного к L_1, связан с построением соответствующего ортопроектора (проекционного оператора).

Проведем ортонормировку векторов $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_m$: $\mathbf{s}_j^*\mathbf{s}_k = \delta_{jk}$, где δ_{jk} — символ Кронекера. Докажем, что оператор $P = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{s}_j\mathbf{s}_j^*$ является ортопроектором, переводящим любой вектор в подпространство L_1. Очевидно, что $P^* = P$,

$$P^2 = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{s}_j\mathbf{s}_j^* \sum_{k=1}^{m} \mathbf{s}_k\mathbf{s}_k^* = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \mathbf{s}_j(\mathbf{s}_j^*\mathbf{s}_k)\,\mathbf{s}_k^* = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{s}_j\mathbf{s}_j^* = P.$$

Итак, P — ортопроектор. Теперь докажем, что он проектирует в подпространство L_1, натянутое на векторы $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_m$. Пусть $\mathbf{z}$ — произвольный вектор, тогда

$$P\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{s}_j(\mathbf{s}_j^*\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\mathbf{s}_j,$$

где $\alpha_j = \mathbf{s}_j^*\mathbf{z}$ — некоторые числа. Следовательно, $P\mathbf{z} \in L_1$.

Оператор $Q = E - P$ тоже является ортопроектором Он проектирует на подпространство L_2, ортогональное к L_1. Действительно: $Q^2 = E - P + P - P^2 = Q$; $Q^* = E - P^* = Q$; $(Q\mathbf{z}, P\mathbf{z}) = (\mathbf{z}, P\mathbf{z}) - (P\mathbf{z}, P\mathbf{z}) = (\mathbf{z}, P\mathbf{z}) - (\mathbf{z}, P^*P\mathbf{z}) = 0$. Чтобы получить базис в подпространстве L_2, возьмем единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и применим к ним оператор Q

Среди векторов Qe_1, Qe_2, ..., Qe_n можно выбрать $(n - m)$ линейно независимых, которые и будут базисом в L_2.

Матрица S, столбцами которой являются векторы s_1, ..., s_n, приводит матрицы B_ν к блочно-треугольному виду (теорема 7 3)

Применяя изложенный прием сначала к исходным матрицам, затем к полученным диагональным блокам, получаем максимально возможное количество блоков на главной диагонали. Единственность такого приведения утверждает теорема 7.7.

§ 7.3. Подробное описание алгоритма

В данном параграфе изложены конкретные вычислительные алгоритмы для приведения матриц B_ν, $\nu = \overline{1, \mu}$, к блочно-треугольному виду. Рассматривается случай, когда приведение этих матриц к блочно-диагональному виду невозможно. В противном случае целесообразно сначала выполнить такое приведение (см. гл. 1, 3, 6), а затем уже приводить полученные блоки к блочно-треугольному виду. Предполагается также, что хотя бы одна из матриц B_ν является несимметрической. Если все матрицы симметрические, то после приведения к блочно-диагональному виду с максимально возможным числом блоков дальнейшее их преобразование бесполезно.

7.3.1. Первый шаг — составление алгебры матриц $\varphi(B_\nu)$, порожденной матрицами E, B_1, B_2, ..., B_μ. Это можно сделать следующим образом.

а. Вводим $B_0 = E$.

б. Выбираем базис во множестве матриц $\{B_{k-1}\}$, $k = \overline{1, \mu + 1}$. Для этого можно обратиться к программе SLAU5. Новые матрицы базиса обозначим W_1, ..., W_μ.

в. Вычисляем произведения $W_j W_k$, проверяем их линейную зависимость и линейно независимые произведения объявляем новыми элементами множества $\{W_k\}$. Для этого

(i) полагаем $r = \mu$;

(ii) $j = 1$;

(iii) $k = 1$;

(iv) вычисляем $Z = W_j W_k$, проверяем линейную зависимость матриц W_1, W_2, ..., W_r, Z (с помощью программы SLAU5). Если они линейно независимы, полагаем $r := r + 1$, $W_r = Z$ и возвращаемся к п. (ii);

(v) $k = k + 1$, если $k \leqslant r$ переходим в п. (iv);

(vi) $j = j + 1$, если $j \leqslant r$ переходим к п. (iii).

Для экономии машинного времени можно запоминать такие сочетания j и k, для которых п. (iv) выполнялся, и, в случае увеличения числа r, повторно не производить вычисления п. (iv) для этих сочетаний. В результате расчетов получим базис $W_1, W_2, \ldots, W_r$. Понятно, что $r \leqslant n^2$.

7.3.2. Если $r = n^2$, то, как было указано выше, приведение матрицы B_ν к блочно-треугольному виду невозможно Если же $r < n^2$, то приведение возможно с помощью радикала алгебры, поскольку рассматривается случай, когда приведение к блочно-диагональному виду (если таковое возможно для исходных матриц) уже выполнено.

Общий алгоритм составления матрицы преобразования S следующий.

(i) строим алгебру $\varphi(B_\nu)$ (см. выше);

(ii) составляем матрицу D:

$$D = \begin{bmatrix} \mathrm{Sp}(W_1 W_1) & \ldots & \mathrm{Sp}(W_1 W_r) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{Sp}(W_r W_1) & \ldots & \mathrm{Sp}(W_r W_r) \end{bmatrix}$$

и решаем с помощью программы SLAU5 систему уравнений $D\mathbf{y} = 0$. Пусть $\mathbf{y}^{(1)}, \ldots, \mathbf{y}^{(p)}$ — линейно независимые решения этой системы;

(iii) полагаем $g = 0$. Для всех значений j от 1 до p выполним п. (iv);

(iv) к g строкам, оставшимся после предыдущего шага, добавим n строк матрицы

$$G = \sum_{k=1}^{r} y_k^{(j)} W_k,$$

где $y_k^{(j)}$ — элементы вектора $\mathbf{y}^{(j)}$. Далее исключаем линейно зависимые строки (программа SLAU5). Новое число линейно независимых строк обозначим через g;

(v) по программе SLAU5 находим общее решение системы линейных однородных алгебраических уравнений. Матрица коэффициентов этой системы уравнений состоит из линейно независимых строк, вычисленных в п. (iii), (iv). Найденные векторы базиса во множестве решений обозначим: $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots$ $\ldots, \mathbf{b}_r$;

(vi) из векторов $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ выбираем такой набор n линейно независимых векторов, в который входят все $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$. Для этого к множеству векторов $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ последовательно добавляем по одному из векторов $\mathbf{e}_k$ и проверяем с помощью программы SLAU5 линейную зависимость полученной совокупности. Если векторы линейно независимы, то новый вектор оставляем в рассматриваемом множестве, если зависимы, то — отбрасываем Из полученных векторов-столбцов составляем матрицу S.

Комментарии.

1. Пп. (iii), (iv) и (v) соответствуют решению системы уравнений:

$$\begin{cases} G^{(1)}\xi = 0, \\ G^{(2)}\xi = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ G^{(k)}\xi = 0. \end{cases}$$

2. П. (vi) соответствует дополнению базиса $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r\}$ подпространства L до базиса всего пространства C^n.

3. П. (vi) описан так, что его выполнение требует многократного обращения к программе SLAU5. Этого можно избежать, если составить программу, отличающуюся от SLAU5 тем, что не производится перестановка строк и запоминаются номера отброшенных строк. По этим номерам можно определить, какие из векторов $\mathbf{e}_k$ следует сохранить, а какие — отбросить.

Пример 7.3.

$$B_1 = E; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что соответствующий централизатор состоит только из матриц вида αE. Следовательно, приведение к диагональному виду матриц B_ν невозможно.

Составим алгебру $\varphi(B_\nu)$. Матрицы B_ν линейно независимы. Рассмотрим все возможные произведения матриц $B_k B_j$ и проверим, являются ли полученные матрицы линейной комбинацией исходных? Поскольку умножение на $B_1 = E$ не меняет матриц, остается рассмотреть произведения $B_k B_j$ для $k,\ j = 2,\ 3$. Вычисляем $B_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Проверим, является ли эта матрица линейной комбинацией первых двух $B_2^2 = \alpha B_1 + \beta B_2$? Это равенство соответствует системе уравнений:

$$\begin{cases} 1 = \alpha\ 1 + \beta\ 1, \\ 0 = \alpha\ 0 + \beta\ 0, \\ 3 = \alpha\ 0 + \beta\ 1, \\ 4 = \alpha\ 1 + \beta\ 2. \end{cases}$$

Из последних двух уравнений получаем $\beta = 3$, $\alpha = -2$, затем убеждаемся, что эти значения удовлетворяют и первым двум уравнениям. Следовательно, матрица B_2^2 является линейной комбинацией матриц B_1 и B_2. Далее получаем $B_2 B_3 =$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -7 & -4 \end{bmatrix} = B_3; \; B_3B_2 = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ -11 & -8 \end{bmatrix} = -6E + 3B_2 + 2B_3;$$

$$B_3^2 = \begin{bmatrix} 21 & 12 \\ -21 & -12 \end{bmatrix} = 3B_3.$$

Мы получили, что все произведения принадлежат линейной оболочке матриц B_1, B_2, B_3. Следовательно, эти матрицы образуют базис алгебры $\varphi(B_\nu)$, порожденной матрицами B_ν. Число элементов базиса $r = 3$, т. е. $r < n^2 = 2^2$. Это означает, что приведение к треугольному виду возможно.

Составим матрицу $D = \{\mathrm{Sp}\,(B_jB_k)\}$. Все произведения B_jB_k уже вычислены. Получаем

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Можно убедиться, что $\det D = 0$. Составим систему уравнений $D\mathbf{y} = \mathbf{0}$:

1) $2y_1 + 3y_2 + 3y_3 = 0,$

2) $3y_1 + 5y_2 + 3y_3 = 0,$

3) $3y_1 + 3y_2 + 9y_3 = 0.$

Таблица 7.1

Уравнение системы (3.2.2)	Коэффициент при неизвестных		
	y_1	y_2	y_3
1)	2	3	3
2)	3	5	3
3)	3	3	9
1)′ = 1)/2	1	1,5	1,5
2)′ = 2) − 3·1)′	0	0,5	−1,5
3)′ = 3) − 3·1)′	0	−1,5	4,5
1)″ = 1)′ − 1,5·2)″	1	0	6
2)″ = 2)′/0,5	0	1	−3
3)″ = 3)′ − (1,5) × ×2)″	0	0	0

Для решения этой системы удобно воспользоваться методом, описанным в § 3.2. Ход вычислений приведен в табл. 7.1. В результате получаем:

$$\begin{cases} y_1 + 6y_3 = 0, \\ y_2 - 3y_3 = 0, \end{cases}$$

или, в иной записи, $y_1 = -6y_3$, $y_2 = 3y_3$, где y_3 — свободная переменная. Положив $y_3 = 1$, получаем $\mathbf{y} = [-6\ 3\ 1]^{\mathrm{T}}$. Вычисляем матрицу G:

$$G = -6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Уравнения $G\xi = 0$ имеют вид:

$$\begin{cases} 4\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ -4\xi_1 - 4\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\xi_1 = -\xi_2$. Положив $\xi_2 = 1$, получим, что базис во множестве решений этой системы состоит из вектора $\mathbf{s}_1 =$

$= \xi = [-1 \ 1]^{\dagger}$. Этот вектор и вектор $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0]^{\dagger}$ линейно независимы. Поэтому $S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Далее получаем $S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

$$\tilde{B}_1 = S^{-1}ES = E; \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

В данной главе рассматривается общая методика разделения уравнений движения системы автоматического управления путем приведения вспомогательных квадратных матриц к блочно-диагональному виду. Доказано, что задачи расщепления уравнений движения различных систем автоматического управления можно формально свести к решенной в предыдущих главах вычислительной задаче одновременного приведения нескольких квадратных матриц к блочно-диагональному виду.

Доказательства теорем, приведенных в первых параграфах главы, вынесены в § 8.3.

§ 8.1. Способ разделения уравнений на подсистемы

Рассмотрим сначала уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x}, \tag{8.1.1}$$

где $\mathbf{x} \in C^n$; $\mathbf{u} \in C^m$; $\mathbf{y} \in C^p$; A, B и C — матрицы соответствующих размерностей. Требуется найти замену переменных

$$\mathbf{x} = S_1\mathbf{x}', \quad \mathbf{u} = S_2\mathbf{u}', \quad \mathbf{y} = S_3\mathbf{y}', \tag{8.1.2}$$

после которой система (8.1.1) будет приведена к подсистемам меньшего порядка. Для этого будем использовать множество решений системы матричных уравнений

$$H_1A = AH_1, \quad H_1B = BH_2, \quad H_3C = CH_1. \tag{8.1.3}$$

Отметим, что при ненулевой матрице B матрица H_2 имеет собственные числа, совпадающие с некоторыми собственными числами H_1, иначе из того, что спектры матриц не пересекаются, следовало бы, что $B = 0$ (см. гл. 2). Аналогичным свойством обладает матрица H_3. Считаем, что собственные числа матриц H_2 и H_3 пронумерованы следующим образом: сначала те из них, которые совпадают с собственными числами матрицы H_1, в том же порядке, затем — остальные собственные числа.

Как и прежде, через $v(\bar{D})$ обозначаем матрицу, приводящую данную матрицу D к жордановой форме.

Теорема 8.1. *Пусть* $\{H_i\}$ — *решение уравнений (8.1.3);* $S_i = v(H_i)$. *Тогда после замены переменных (8.1.2) матрицы коэффициентов уравнений* (8.1.1) *приобретут вид:*

$$\tilde{A} = S_1^{-1} A S_1 = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_q),$$

$$\hat{B} = S_1^{-1} B S_2 = \left[\begin{array}{cccc|c} B_1 & & & 0 & 0 \\ & B_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & B_q & 0 \end{array}\right], \tag{8.1.4}$$

$$\hat{C} = S_3^{-1} C S_1 = \left[\begin{array}{cccc} C_1 & & & 0 \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_q \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right].$$

Здесь q — количество различных собственных чисел матрицы H_1; порядки n_k блоков A_k равны кратностям этих собственных чисел; размерности блоков B_k (соответственно C_k) равны $n_k \times m_k$ ($p_k \times n_k$), где m_k (p_k) — кратность собственного числа матрицы H_2 (H_3), совпадающего с собственным числом матрицы H_1, имеющей номер k; если это собственное число отсутствует, то в преобразованной матрице отсутствует соответствующий блок; число нулевых столбцов матрицы $\hat{B}$ (строк матрицы $\hat{C}$) равно количеству всех собственных чисел матрицы H_2 (соответственно H_3), не совпадающих ни с одним из собственных чисел матрицы H_1.

Следствие. Если хотя бы одна из матриц H_k имеет не менее двух различных собственных чисел, то замена переменных (8.1.2) при $S_k = v(H_k)$ приводит уравнение (8.1.1) к подсистемам меньших размерностей:

$$\dot{\mathbf{x}}_k = A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{y}_k = C_k \mathbf{x}_k, \quad k = \overline{1, q},$$
$$\mathbf{y}_{q+1} = 0.$$

При этом сумма порядков n_k векторов $\mathbf{x}_k$ равна n, сумма порядков m_k векторов $\mathbf{u}_k$ не превышает m и сумма порядков p_k векторов $\mathbf{y}_k$ с учетом вектора $\mathbf{y}_{q+1}$ равна p.

Таким образом, уменьшение размерностей уравнений (8.1.1) может быть достигнуто не только за счет разделения на подсистемы, аналогичные (8.1.1), но и за счет уменьшения размерностей вектора $\mathbf{u}$ или за счет выделения подсистемы вида $\mathbf{y}_{q+1} = 0$.

Замечание 8. 1. Вектор $\mathbf{u}_{q+1}$ в преобразованные уравнения не входит. Наличие такого вектора означает, что система уравнений не зависит от управлений $\mathbf{u}_{q+1}$.

Замечание 8.2. Как видно из выражений (8.1.4), матрицы $\hat{B}$ и $\hat{C}$ не всегда являются блочно-диагональными (см. § 1.2).

Замечание 8.3. Если некоторые из чисел m_k (или p_k) равны нулю, то соответствующая подсистема, а следовательно, и вся система неуправляемы (ненаблюдаемы).

§ 8.2. Составление вспомогательных матриц

Рассмотрим следующие квадратные матрицы порядка $l = n + m + p$:

$$C_1 = \mathrm{diag}\,(E_n,\ 2E_m,\ 3E_p), \quad C_2 = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (8.2.1)$$

где E_k — единичная матрица порядка k.

Теорема 8.2. *Любая матрица Z, коммутирующая с матрицами* (8.2.1), *имеет вид* $Z = \mathrm{diag}\,(H_1,\ H_2,\ H_3)$, *где* $\{H_1, H_2, H_3\}$ — *решение уравнений* (8.1.3).

Таким образом, для нахождения общего решения уравнений (8.1.3) можно воспользоваться программой нахождения множества матриц, коммутирующих с данными (см. гл. 3).

Теорема 8.3. *Система* (8.1.1) *приводится к подсистемам меньшего порядка с помощью преобразования* (8.1.2) *тогда и только тогда, когда матрицы* (8.2.1) *приводятся одновременно к блочно-диагональному виду преобразованием подобия.*

Вспомогательные матрицы подобраны и для других систем уравнений. При этом справедливы утверждения, аналогичные теоремам 8.2 и 8.3, а матрицы замены переменных составляются из собственных векторов блоков, стоящих на главной диагонали матрицы, коммутирующей со вспомогательными.

Для системы уравнений $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$ вспомогательные матрицы следующие:

$$C_1 = \mathrm{diag}\,(E_n,\ 2E_m,\ 3E_p), \quad C_2 = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C & D & 0 \end{bmatrix}.$$

Для решения уравнений $H_1A = AH_1$, $H_1B = BH_2$, $H_1C = CH_1$, $H_2D = DH_2$ из работы Г. В. Можаева [52] составлены следующие вспомогательные матрицы

$$C_1 = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 2E_m \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

В [76] рассмотрены уравнения

$$\mathbf{y} = A(p)\,\mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - B(p)\,\mathbf{y},$$

где $\mathbf{y}$ и $\mathbf{f}$ — векторы порядка n, а $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ — векторы порядка k. В случае, когда матрицы $A(p)$ и $B(p)$ могут быть представлены в виде

$$A(p) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(p)\,A_j, \quad B(p) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(p)\,B_j, \quad m < nk$$

(здесь $\varphi_j(p)$ — линейно независимые скалярные функции), задачу о расщеплении уравнений можно заменить задачей приведения к блочно-диагональному виду матриц

$$C_1 = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 2E_k \end{bmatrix}, \quad C_{j+1} = \begin{bmatrix} 0 & A_j \\ B_j & 0 \end{bmatrix} \quad j = \overline{1, m}.$$

Проиллюстрируем изложенное на примере.

Пример 8.1.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 + u, \\ x_2 = x_1 + 3x_2 + u, \\ y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = 2x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Общий вид матриц, удовлетворяющих уравнениям (8.1.3), в этом случае следующий:

$$H_1 = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}, \quad H_2 = [x + y], \quad H_3 = \begin{bmatrix} x + y - 2b & b \\ 2(x + y - f) & f \end{bmatrix},$$

где x, y, b, f — свободные переменные.

Положим $x = b = f = 0$, $y = 1$. Тогда $H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $H_2 = 1$, $H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Далее получаем матрицы преобразования: $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $S_2 = 1$, $S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

После замены переменных получаем три отдельные подсистемы:

$$\dot{x}_1' = 4x_1' + u', \quad y_1' = 2x_1',$$
$$\dot{x}_2' = 2x_2', \qquad y_3' = 0.$$

Общее решение уравнений (8.1.3) найдено непосредственно по уравнениям, а другой путь — использование вспомогательных матриц

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ 0 & & & & 3 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Установленное выше соответствие между задачами расщепления уравнений и приведения квадратных матриц к блочно-диагональному виду полезно не только с вычислительной точки зрения. Вследствие этого на задачи расщепления рассмотренных выше систем уравнений распространяются результаты, изложенные в гл. 6. Из этого следует, что последовательное применение указанного метода сначала к исходной системе уравнений, а затем к получающимся подсистемам позволяет получить максимально возможное количество независимых подсистем и при этом получить подсистемы минимального порядка. Отсюда вытекает также единственность разложения уравнений на подсистемы и возможность составления группы симметрии, соответствующей найденному разложению.

§ 8.3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 8.1. Уравнения (8.1.3) эквивалентны следующим:

$$\tilde{H}_1\breve{A} = \breve{A}\tilde{H}_1, \quad \tilde{H}_1\hat{B} = \hat{B}\tilde{H}_2, \quad \tilde{H}_3\hat{C} = \hat{C}\tilde{H}_1,$$

где $\hat{A} = S_1^{-1}AS_1$, $\hat{B} = S_1^{-1}BS_2$, $\hat{C} = S_3^{-1}CS_1$, матрицы $\tilde{H}_i = S_i^{-1}H_iS_i$ приведены к своей жордановой форме. Таким образом, получается, что матрица $\breve{A}$ коммутирует с матрицей $\tilde{H}_1 = \operatorname{diag}\{H_{11}, \ldots, H_{1q}\}$ и при $i \neq j$ спектры блоков H_{1i}, H_{1j} не пересекаются. Поэтому $\hat{A} = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_q)$ и порядок блоков A_k равен порядкам H_{1k}. Матрицу $\tilde{H}_2$ представим в виде $\tilde{H}_2 = \operatorname{diag}(H_{21}, \ldots, H_{2q}, H_{2q+1})$, где блок H_{2q+1} объединяет все жордановы клетки H_2, соответствующие собственным числам, не принадлежащим спектру H_1. Разобьем матрицу $\hat{B}$ на блоки в соответствии с видом матриц $\tilde{H}_2$ и $\tilde{H}_1$. Тогда равенство $\tilde{H}_1\hat{B} = \hat{B}\tilde{H}_2$ эквивалентно следующим

$H_{1j}\hat{B}_{ij} = \hat{B}_{ij}H_{2i}$, $i = \overline{1,\ q+1}$, $j = \overline{1,\ q}$. Из последних равенств при $i \neq j$ вытекает: $\hat{B}_{ij} = 0$, поскольку спектры матриц H_{1i} и H_{2i} не пересекаются. Аналогичное доказательство для матрицы $\hat{C}$. ◀

Доказательство теоремы 8.2. Матрица Z имеет блочно-диагональный вид, поскольку она коммутирует с C_1, имеющей такой вид с блоками, собственные числа которых различны. Выполнение равенства (8.1.3) проверяется подстановкой выражения $Z = \mathrm{diag}\,(H_1,\ H_2,\ H_3)$ в равенство $C_2Z = ZC_2$. ◀

Доказательство теоремы 8.3. 1) Необходимость. Если C_1 и C_2 приводятся к блочно-диагональному виду, то существует коммутирующая с ними матрица Z, имеющая хотя бы два различных собственных числа. Но $Z = \mathrm{diag}\,(H_1,\ H_2,\ H_3)$, поэтому, если матрица H_1 не имеет различных собственных чисел, то хотя бы одна из матриц H_2, H_3 имеет собственное число, не принадлежащее спектру матрицы H_1. В любом из этих случаев система (8.1.1) приводится к подсистемам меньших размерностей (теорема 8.1).

2) Достаточность. Пусть уравнения (8.1.1) заменой переменных (8.1.2) приводятся к подсистемам меньших размерностей, т. е. матрицы их коэффициентов приводятся к виду (8.1.4). Для преобразованных матриц и матриц

$$\tilde{H}_1 = \mathrm{diag}\,(E_{n_1},\ 2E_{n_2},\ \ldots,\ qE_{n_q}),$$

$$\tilde{H}_2 = \mathrm{diag}\,(E_{m_1},\ 2E_{m_2},\ \ldots,\ (q+1)\,E_{m_{q+1}}),$$

$$\tilde{H}_3 = \mathrm{diag}\,(E_{p_1},\ 2E_{p_2},\ \ldots,\ (q+1)\,E_{p_{q+1}})$$

выполняются равенства, аналогичные (8.1.3). В этом можно убедиться непосредственной проверкой. При обратном преобразовании эти равенства сохраняются. Поэтому с матрицами (8.2.1) коммутирует матрица $Z = \mathrm{diag}\,(H_1,\ H_2,\ H_3)$ (где $H_i = S_i\tilde{H}_iS_i^{-1}$), имеющая не менее двух различных собственных чисел. Следовательно, матрицы (8.2.1) приводятся к блочно-диагональному виду. ◀

Замечание 8.4. Можно установить непосредственную связь между матрицей S преобразования, приводящего матрицы (8.2.1) к блочно-диагональному виду, и матрицами замены переменных (8.1.2), а именно выполняется равенство: $Sv\,(\tilde{C}_1) = \mathrm{diag}\,(S_1,\ S_2,\ S_3)$, где $\tilde{C}_1 = S^{-1}C_1S$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ

К главе 1. Элементарные приемы расщепления систем уравнений широко применяются в строительной механике. Этим вопросам посвящена целая глава в книге И. М. Рабиновича [59]. Аналогичные приемы рассматриваются также в книгах по механике (учебник В. Л. Бидермана [10, § 13 и 32]), электротехнике и теории колебаний (см. лекции Л. И. Мандельштама [48, двадцать девятая лекция]). Ряд работ, использующих элементарные приемы расщепления уравнений для задач теории управления, упоминается в статье Е. Д. Якубович [76]. В этой же работе содержатся результаты, следствием которых является «способ коммутирующей матрицы» (см. комментарий к гл. 6).

Особое место занимают методы Крона [33, 34], позволяющие свести решение большой системы линейных алгебраических уравнений к последовательному решению вспомогательных систем меньшего порядка. Для этого исходная система разделяется на несколько зависимых подсистем и дополнительно составляется система уравнений, соответствующая связям между подсистемами. Исследованию устойчивости разделенных таким образом дифференциальных уравнений посвящена статья [83]. Подробное освещение этого круга вопросов содержится в книге Груйича, А. А. Мартынюка, Риббенс-Павеллы [23].

К главе 2. Краткое изложение теоремы о приведении к жордановой форме матрицы опубликовано в статье А. Ф. Филиппова [70] и учебнике В. А. Ильина и Э. Г. Позняка [29]. Теоремы о коммутирующих матрицах являются частным случаем теорем, изложенных в монографии Ф. Р. Гантмахера [20].

К главе 3. Алгоритм нахождения общего решения системы линейных однородных алгебраических уравнений, построенный на видоизмененном методе Жордана — Гаусса, кратко изложен в работе Ю. Н. Базилевича и В. И. Черняховского [8]. В этой же работе указаны алгоритмы нахождения централизатора и способ выбора ведущего элемента с учетом разреженности матрицы. Другой способ выбора ведущего элемента при вычислениях с разреженными матрицами предложен в работе [35]. Несколько алгоритмов нахождения общего решения систем линейных однородных уравнений приведены в книге Уилкинсона и Райнша [67, с. 130].

Результаты расщепления уравнений движения рельсовых экипажей приведены в статьях Ю. Н. Базилевича [2, 4, 5].

Главные фазовые координаты рассмотрены в учебнике С. П. Стрелкова [63]. Приведение к таким координатам в частном случае рассмотрел еще в 1929 г. П. Ф. Папкович [57]. Один из вариантов вещественных главных фазовых координат изложен в книге Б. В. Булгакова [14]. В работах В. А. Лазаряна [39, 42] и книге [25] главные фазовые координаты используются в задачах исследования устойчивости движения многомассовых систем. В работе Ю. Н. Базилевича [3] рассмотрены вопросы исключения быстрозатухающих форм колебаний.

К главе 4. Сравнительно краткое изложение основных понятий общей алгебры содержится в справочниках А. П. Мишиной и И. В. Проскурякова [51], Корна и Корн [31]. В 1985 г. вышла книга Э. Б. Винберга [17] по теории представлений. Автор этой книги стремится дать по возможности простое и доступное изложение рассматриваемых вопросов. Графы группы рассмотрены в книгах Гроссмана, Магнуса [22] и Коксетера и Мозера [30]. Теория групп, элементы теории представлений и некоторые вопросы теории алгебр излагаются в университетских учебниках (см., например, А. И. Кострикин [32]). Теоремы о неполупростых алгебрах изложены в книгах, изучение которых непосильно для «непосвященного» читателя. Это книги Фейса [68], Кэртиса, Райнера [37], Ю. А. Дрозда, В. В. Кириченко [26]. Исключение из этого правила — ставшая библиографической редкостью книга Н. Г. Чеботарева [72].

К главе 5. Аппарат теории конечных групп уже давно применяется в квантовой механике (см. Л. Д. Ландау и Е. М. Лившиц [44], а также Г. Я. Любарский [46, 47], М. И. Петрашень и Е. Д. Трифонов [58], Вигнер [16] и списки литературы в этих книгах). Впоследствии этот аппарат стал широко использоваться также и в теории атома, теории твердого тела, устройствах сверхвысоких частот, спектроскопии, квантовой химии и других разделах физики и химии (см., например, А. Б. Ройцин [60], Серр [62], Кохен, Кан [80], Н. К. Морозова и В. П. Морозов [53]).

С 1969 г. появляются работы о применении методов теории конечных групп в технических задачах: А. И. Кухтенко [36], В. В. Удилов [64], М. Е. Шайкин [73], Ю. И. Самойленко [61], Ю. Н. Базилевич [2]. Эти методы применяются не только к объектам, описываемым системами обыкновенных дифференциальных уравнений, а и к стержневым системам, для которых задача статики описывается алгебраическими уравнениями, а динамики — уравнениями в частных производных (В. В. Удилов, Г. Т. Ковбаса [66], В. М. Фомин [71]). Предпринимаются также попытки применить теорию конечных групп к нелинейным задачам (С. А. Владимиров [18]). Системы автоматического управления описываются уравнениями, содержащими квадратные и прямоугольные матрицы, поэтому в работе Г. В. Можаева [52] дается обобщение теоремы Вигнера на случай прямоугольных матриц. В работе А. А. Дышлиса и др. [27] указано на возможность составления группы матриц представления и вычисления проекторов на инвариантные подпространства с помощью ЭВМ. Ряд методов и программных комплексов для расчета на ЭВМ симметричных конструкций описан в книге М. Л. Бурышкина и В. Н. Гордеева [15] (см. также Злокович [28]).

Существует ряд обзоров работ по применению дискретных и непрерывных групп в теории управления и в механике (Ю. Н. Андреев [1], А. А. Богоявленский и др. [11], В. Г. Павлов [55], Ю. Н. Павловский [56]).

В настоящее время имеется большой объем литературы по применению представлений дискретных групп в задачах физики. Некоторые из наиболее известных книг на эту тему указаны в списке литературы к первой главе книги Р. А. Эварестова [74]. Следует отметить также двухтомник Эллиота и Добера [75].

К главе 6. Здесь излагается обобщение результатов работы Ю. Н. Базилевича [6].

Способ А (способ коммутирующей матрицы) — это следствие теорем из работы Е. Д. Якубович [76]. Аналогичный способ одновременно предложен А. К. Лопатиным [45]. Идея способа Б взята из работы В. В. Удилова [65]. Еще несколько способов декомпозиции предложено в работе Ю. А. Митропольского и А. К. Лопатина [50]. Следует отметить, что возможность применения коммутирующей матрицы для расщепления давно известна в квантовой механике (см. книгу Ферми [69]).

Вопрос о приведении системы уравнений к максимально возможному количеству подсистем вызывает определенные трудности, потому что задача одновременного приведения нескольких матриц к некоторой канонической форме преобразованиями подобия — это классическая нерешенная задача линейной алгебры, в настоящее время считающаяся безнадежной (И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев [21], В. М. Бондаренко [12], Л. А. Назарова [54]). В работе В. В. Удилова [65] доказана единственность разложения уравнений на подсистемы в частном случае, когда соответствующий централизатор является полупростой алгеброй.

Доказательство теоремы 6.5 сообщил автору А. В. Ройтер. Прежний вариант доказательства (Ю. Н. Базилевич [4]), не использующий теорему Крулля — Шмидта, являлся более громоздким, а сам результат — менее общим.

К главе 7. Работ о приведении матриц коэффициентов к блочно-треугольному виду сравнительно мало. В статье А. К. Лопатина [45] этот вопрос, по-видимому, рассматривается впервые. Некоторые результаты в этом направлении содержатся в книге П. С. Казимирского [77].

Вычислительный алгоритм одновременного приведения матриц к блочно-треугольному виду публикуется впервые.

К главе 8. В комментариях к гл. 5 и 6 среди прочих упоминаются работы о расщеплении уравнений движения систем автоматического управления. Существует ряд работ ([81, 85, 86]) о расщеплении уравнений с помощью преобразования типа «обратной связи», т. е. преобразования, при котором вводится вспомогательный вектор управления.

Решение задачи о приведении уравнений (8.1.1) к максимальному количеству подсистем сообщено в статье Ю. Н. Базилевича [6] (полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ в 1979 г. № 1973—79 Деп.). Независимо от этой работы И. Ф. Борецкий и В. Г. Павлов [13] доказали единственность решения задачи декомпозиции уравнений (8.1.1) для некоторых частных случаев. В работе В. Е. Белозерова и Г. В. Можаева [9] сообщено о доказательстве единственности решения задачи агрегирования.

Способы составления вспомогательных матриц для широкого круга задач публикуются впервые.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев Ю. Н.* Дифференциально-геометрические методы в теории управления // Автоматика и телемеханика.— 1982.— № 10.— С. 5—46.
2. *Базилевич Ю. Н.* Расщепление уравнений неконсервативной колебательной системы, обладающей симметрией, с помощью теории групп // Некоторые задачи механики скоростного наземного транспорта.— Киев : Наук. думка, 1974.— С. 53—56.
3. *Базилевич Ю. Н.* Выделение собственных чисел с наибольшей вещественной частью и соответствующих им собственных векторов // Науч. конф. «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе».— Киев : ИК АН УССР, 1974.— С. 56—63.
4. *Базилевич Ю. Н.* Некоторые способы расщепления систем линейных автономных дифференциальных уравнений // Сложные системы управления.— Киев : ИК АН УССР, 1975.— С. 75—85.
5. *Базилевич Ю. Н.* Разделение на подсистемы уравнений возмущенного движения восьмиосного вагона с несимметричной загрузкой // Динамика и прочность сложных механических систем.— Киев : Наук. думка, 1977.— С. 24—27.
6. *Базилевич Ю. Н.* Приведение системы линейных дифференциальных уравнений к максимально возможному количеству независимых подсистем // Дифференц. уравнения.— 1980.— **16**, № 2.— С. 360—361.
7. *Базилевич Ю. Н , Дмитрусенко Н. С.* О приведении неконсервативных колебательных систем к главным координатам // Тр. Днепропетр. ин-та инж. ж.-д. трансп.— 1973.— Вып. 134.— С. 50—56.
8. *Базилевич Ю. Н., Черняховский В. И.* Упрощение систем линейных дифференциальных уравнений точечными преобразованиями координат // Там же.— 1975.— Вып. 169/21.— С. 34—39.
9. *Белозеров В. Е., Можаев Г. В.* О единственности решения задач декомпозиции и агрегирования линейных систем автоматического управления // Теория сложных систем и методы их моделирования.— М. : ВНИИСИ, 1982.— С. 4—13.
10. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний.— М. : Высш. шк., 1980.— 408 с.
11. *Богоявленский А. А., Емельянова И. С., Мархашов Л. М. и др.* Методы теории групп непрерывных преобразований в механике систем с конечным числом степеней свободы // Устойчивость движения, аналитическая механика, управление движением.— М. : Наука, 1981.— С. 69—93.
12. *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб.— 1975.— **96**, № 1.— С. 63—74.
13. *Борецкий И. Ф., Павлов В. Г.* О единственности декомпозиции в линейной задаче оптимального управления с квадратичным критерием качества // Автоматика и телемеханика.— 1979.— № 11.— С. 10—15.

14. *Булгаков Б. В.* Колебания.— М. : Гостехтеориздат, 1954.— 891 с.
15. *Бурышкин М. Л., Гордеев В. Н.* Эффективные методы и программы расчета на ЭВМ симметричных конструкций.— Киев : Будівельник, 1984.— 120 с.
16. *Вигнер Е.* Теория групп и ее приложение к квантово-механической теории атомных спектров.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 443 с.
17. *Винберг Э. Б.* Линейные представления групп.— М. : Наука, 1985.— 144 с.
18. *Владимиров С. А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с дискретной группой симметрии // Дифференц. уравнения.— 1975.— **11**, № 7.— С. 1180—1189.
19. *Воеводин В. В.* Развитие методов решения задач алгебры в вычислительном центре Университета // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика и механика.— 1970.— № 2.— С. 69—82.
20. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 576 с.
21. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве // Функцион. анализ.— 1969.— 3, Вып. 4.— С. 81—82.
248 с.
22. *Гроссман И., Магнус В.* Группы и их графы.— М. : Мир, 1971.—248 с.
23. *Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях.— Киев : Наук. думка, 1984.— 308 с.
24. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 536 с.
25. *Демин Ю. В., Длугач Л. А., Коротенко М. Л., Маркова О. М.* Автоколебания и устойчивость движения рельсовых экипажей.— Киев : Наук. думка, 1984.— 160 с.
26. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры.— Киев : Вища шк., 1980.— 192 с.
27. *Дышлис А. А., Морозова Н. К., Гайсина Н. Б. и др.* Определение на ЭВМ координат симметрии молекул методом операторов проектирования // Науч. конф. «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе».— Киев : ИК АН УССР, 1974.— С. 212—216.
28. *Злокович Дж.* Теория групп и *G*-векторных пространств в колебаниях, устойчивости и статике конструкций.— М. : Стройиздат, 1977.— 164 с.
29. *Ильин В. А., Поздняк Э. Г.* Линейная алгебра.— М. : Наука, 1974.— 296 с.
30. *Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп.— М. : Наука, 1980.— 240 с.
31. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М. : Наука, 1984.— 832 с.
32. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М. : Наука, 1977.— 496 с.
33. *Крон Г.* Исследование сложных систем по частям — диакоптика.— М. : Наука, 1972.— 544 с.
34. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей.— М. : Сов. радио, 1978.— 720 с.
35. *Кублановская В. Н., Савина Г. В., Смирнова Т. Н.* К решению задач с разреженными матрицами // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. математического ин-та АН СССР.— 1973.— Вып. 35.— С. 75—94.
36. *Кухтенко А. И.* Проблема многомерности в теории сложных систем // Кибернетика и вычисл. техника.— 1969.— Вып. 1.— С. 6—35.

37. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.— М. : Наука, 1969.— 668 с.
38. *Лазарян В. А.* Динамика вагонов.— М. : Транспорт, 1964.— 256 с.
39. *Лазарян В. А.* Динамика транспортных средств : Избр. тр. —Киев : Наук. думка, 1985.— 528 с.
40. *Лазарян В. А., Демин Ю. В., Осадчий Г. Ф.* К вопросу исследования стационарных режимов колебаний пассажирского вагона // Тр. Днепропетр. ин-та инж. ж.-д. трансп.— 1975.— Вып. 169/21.— С. 3—7.
41. *Лазарян В. А., Длугач Л. А., Коротенко М. Л.* Устойчивость движения рельсовых экипажей.— Киев : Наук. думка, 1972.— 199 с.
42. *Лазарян В. А., Длугач Л. А., Зильберман И. А., Коротенко М. Л.* Понижение порядка систем нелинейных дифференциальных уравнений путем исключения быстрозатухающих решений //Прикл. механика.— 1975.— **11**, № 8.— С. 81—88.
43. *Лазарян В. А., Длугач Л. А., Зильберман И. А., Коротенко М. Л.* Определение собственных значений матриц высоких порядков при помощи *QR*-алгоритма // Некоторые задачи механики скоростного рельсового транспорта.— Киев : Наук. думка, 1973.— С. 43—55.
44. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория.— М.; Л. : Гостехтеориздат, 1948.— 568 с.
45. *Лопатин А. К.* Об алгебраической приводимости систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1968.— **4**, № 3.— С. 439—445.
46. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применение в физике.— М. : Гостехиздат, 1957.— 354 с.
47. *Любарский Г. Я.* Теория групп и физика.— М. : Наука, 1986.— 224 с.
48. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний.— М. : Наука, 1972.— 470 с.
49. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения.— М. : Наука, 1971.— 312 с.
50. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Понижение порядка линейных систем на основе алгебраического приведения и некоторые приложения к задачам механики и электротехники // Метод интегральных многообразий в нелинейных дифференциальных уравнениях.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1973.— С. 32—59.
51. *Мишина А. П., Проскуряков И. В.* Высшая алгебра.— М. : Наука, 1965.— 300 с.
52. *Можаев Г. В.* Об использовании симметрии в линейных задачах оптимального управления с квадратичным критерием качества // Автоматика и телемеханика.— 1975.— № 6.— С. 22—30; № 7.— С. 23—31.
53. *Морозова Н. К., Морозов В. П.* О приведении по симметрии операторов энергии в теории колебаний молекул // Докл. АН СССР.— 1968.— **182**, № 3.— С. 538—541.
54. *Назарова Л. А.* Представление колчанов бесконечного типа // Изв. АН СССР. Сер. Математика.— 1973.— 37, № 4.— С. 752—791.
55. *Павлов В. Г.* Системы, инвариантные относительно групп преобразований // Кибернетика и вычисл. техника.— 1983.— Вып. 58.— С. 17—21.
56. *Павловский Ю. Н.* Управление декомпозиционными структурами // Там же.— С. 11—16.
57. *Папкович П. Ф.* Об одной форме основных дифференциальных уравнений малых колебаний системы, не имеющей гироскопических членов // Изв. Ленингр. политехн. ин-та. Отд. техники, естествознания и математики.— 1929.— Вып. 32.— С. 1—14.
58. *Петрашень М. И., Трифонов Е. Д.* Применение теории групп в квантовой механике.— М. : Наука, 1967.— 308 с.

59. *Рабинович И. М.* Курс строительной механики.— М. : Госстройиздат, 1954.— Ч. 2.— 544 с.
60. *Ройцин А. Б.* Некоторые применения теории симметрии в задачах радиоспектроскопии.— Киев : Наук. думка, 1973.— 100 с.
61. *Самойленко Ю. И.* Методы теории линейных представлений групп симметрии и применение этих методов для исследования дискретных систем // Кибернетика и вычисл. техника.— 1969.— Вып. 2.— С. 37—66.
62. *Серр Ж.-П.* Линейные представления конечных групп.— М. : Мир, 1970.— 132 с.
63. *Стрелков С. П.* Введение в теорию колебаний.— М. : Наука, 1964.— 440 с.
64. *Удилов В. В.* Об аналитическом конструировании многомерных систем с известной группой симметрии // Кибернетика и вычисл. техника.— 1970.— Вып. 5.— С. 13—18.
65. *Удилов В. В.* Применение методов абстрактной алгебры при исследовании многомерных систем автоматического управления // Там же.— 1974.— Вып. 23.— С. 20—27.
66. *Удилов В. В., Ковбаса Г. Т.* Исследование собственных колебаний стержневых систем с групповой симметрией // Там же.— 1969.— Вып. 1.— С. 82—92.
67. *Уилкинсон, Райнш.* Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра.— М. : Машиностроение, 1976.— 389 с.
68. *Фейс К.* Алгебра : Кольца, модули и категории : В 2 т.— М. : Мир, 1977—1979.— Т. 1—2.
69. *Ферми Э.* Квантовая механика.— М. : Мир, 1968.— 367 с.
70. *Филиппов А. Ф.* Краткое доказательство теоремы о приведении матрицы к жордановой форме // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика и механика.— 1971.— № 2.— С. 18—19.
71. *Фомин В. М.* Применение теории представлений групп к определению частот и форм свободных колебаний стержневых систем с данной группой симметрии // Распределенное управление процессами в сплошной среде.— Киев : ИК АН УССР, 1969.— Вып. 1 — С. 58—71.
72. *Чеботарев Н. Г.* Введение в теорию алгебр.— М. ; Л. : Гостехтеориздат, 1949.— 88 с.
73. *Шайкин М. Е.* Теоретико-групповые методы декомпозиции симметрических многосвязных динамических систем // Автоматика и телемеханика.— 1973.— № 9.— С. 22—32.
74. *Эварестов Р. А.* Квантовохимические методы в теории твердых тел.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1982.— 280 с.
75. *Эллиот Дж., Добер П.* Симметрия в физике : В 2 т.— М. : Мир, 1983.— Т. 1—2.
76. *Якубович Е. Д.* Построение систем замещения для некоторого класса многомерных линейных систем автоматического управления // Изв. вузов. Радиофизика.— 1969.— **12**, № 3.— С. 362—377.
77. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники.— К. : Наук. думка, 1981.— 224 с.
78. *Carter F. W.* The running of locomotives with reference to their tendency to derail // Selec. Eng. Pap./ Inst. Civil Eng.— 1930.— N 91.— P. 3—25.
79. *Chang E. H., Garg V. K., Goodspeed C. H. et al.* Comparative study of the linear and non-linear locomotive response // Trans. ASME, Dyn. Syst. Meas. and Contr.— 1979.— **101**, Sept.— P. 263—271.
80. *Cohen M., Kahn W. K.* Analytical asymmetrical warequide junctions // IRE Trans. Micr. Theory and Techn.— 1960.— Oct.— P. 430—441.
81. *Falb P. L., Wolovich W. A.* Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems // IEEE Trans. Automat. Contr.— 1967.— **12**, N 6.— P. 651—659.

82. *Garivaltis D. S., Garg V. K., D'Souza A. F.* Fatigue damage of the locomotive suspension elements under random loading // Trans. ASME, J. Mech. Design.— 1981.— **103**, Oct.— P. 871—880.
83. *Grujić L. T., Šiljak D. D.* Asymptotic stability and instability of large — scale systems // IEEE Trans. Automat. Contr.— 1973.— **18**, N 6.— P. 636—645.
84. *Kalker J. J.* Simplified theory of rolling contact // Delft Progr. Rep. C.— 1973.— **1**.— P. 1—10.
85. *Majumdar A. K., Choudhury A. K.* On the decoupling of non-linear systems // Int. J. Contr.— 1972.— **16**, N 4.— P. 705—718.
86. *Wonham W. M., Morse A. S.* Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: a geometric approach // SIAM J. Contr.— 1970.— **8**, N 1.— P. 1—18.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Монография

ЮРИЙ НИКОЛАЕВИЧ БАЗИЛЕВИЧ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

Утверждено к печати ученым советом Института технической механики АН УССР

Редактор М. К. Пунина

Художественный редактор И. П. Антонюк

Технический редактор И. А. Ратнер

Корректоры Е. А. Михалец, Т. В. Пантелеймонова

ИБ № 8338

Сдано в набор 21.10.86. Подп. в печ. 03.04.8.: БФ 25562. Формат 84×108/32. Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л: 8,19. Усл. кр.-отт 8.51 Уч.-изд. л. 8,09. Тираж 1770 экз. Заказ 6—3141. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Наукова думка». 252601 Киев 4, ул. Репина, 3.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига». 252057, Киев 57, ул. Довженко, 3 в Нестеровской городской типографии. 292310, Нестеров, Львовской обл., ул. Горького, 8. Зак. 2395.

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКОВА ДУМКА» В 1988 г.
ВЫПУСТИТ В СВЕТ КНИГУ:**

Молчанов И. Н. **Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения.**— 20 л.— 3 р. 30 к.

В монографии рассматриваются численные методы решения задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, краевых задач для уравнений и систем уравнений эллиптического типа, начально-краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов, задач на собственные значения для операторов эллиптического типа. Основное внимание уделяется современным численным методам. Для ряда задач рассмотрены наиболее часто применяемые методы дискретизации — метод конечных разностей и метод конечных элементов. Предложены средства контроля достоверности получаемых решений.

Для специалистов в области численных методов решения научно-технических задач, численного программного обеспечения, а также студентов вузов.

Предварительные заказы на эту книгу принимают все магазины книготоргов, магазины «Книга — почтой» и «Академкнига». Просим пользоваться услугами магазинов — опорных пунктов издательства: Дома книги — магазина № 200 (340048 Донецк 48, ул. Артема, 147 а), магазина «Книжковий світ» (310003 Харьков 3, пл. Советской Украины, 2/2), магазина научно-технической книги № 19 (290006 Львов 6, пл. Рынок, 10), магазина «Техническая книга» (270001 Одесса 1, ул. Ленина, 17) и магазина издательства «Наукова думка» (252001 Киев 1, ул. Кирова, 4). Магазины во Львове и Киеве высылают книги иногородним заказчикам наложенным платежом.