

УДК 620.178.3

Ю. Н. Базилевич<sup>1</sup>, канд. физ.-мат. наук,  
Р. Б. Грановский<sup>2</sup>, канд. техн. наук, Н. Я. Гаркави<sup>2</sup>, Е. Ф. Фёдоров<sup>2</sup>,  
В. В. Карпенко<sup>2</sup>, О. Н. Литвиненко<sup>3</sup>

## ПРИБЛИЖЁННАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ КАК ПРИЁМ ОЦЕНКИ ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Показано, что приближённая декомпозиция является действенным приёмом для оценки демпфирования, как линейных, так и достаточно широкого круга нелинейных колебательных систем.

*Ключевые слова:* приближённая декомпозиция, моделирование колебательных систем, частотные характеристики, оценка демпфирования, методики проведения испытаний.

**Введение.** Статья посвящена обработке результатов механических испытаний приборов [8], подвижного состава железных дорог [1, 9 – 11, 13], аппаратов ракетно-космической [3 – 5] и авиационной [15] техники. Заказчиком испытаний может быть изготовитель испытуемого изделия, покупатель, эксплуатационник, конструктор, санитарные и пожарные службы, прочие.

Методики проведения испытаний и обработки результатов испытаний опираются на научные разработки, описанные в научной литературе. Одной из таких разработок является приближённая декомпозиция, идеи которой приведены ниже. В настоящей статье актуальность приближённой декомпозиции для обработки результатов испытаний подтверждена на семи примерах.

**Постановка проблемы в общем виде.** Пусть колебания механической системы описываются системой дифференциальных уравнений (в общем случае – нелинейных). Представим узел этой системы как механический преобразователь входного (для узла) сигнала  $y(t)$  в выходной (для узла) сигнал  $x(t)$ . Если  $y(t) = B \cdot \sin(\omega t)$ , то «амплитудой» установившегося сигнала  $x(t)$  назовём  $A(\omega) = \max_{t \rightarrow \infty} |x(t)|$  (здесь  $t \rightarrow \infty$  обозначает достаточно большой временной интервал вдали от переходного процесса). Для линейного дифференциального преобразователя  $A(\omega)$  является амплитудной частотной характеристикой (АЧХ) преобразователя при  $B = 1$ . Декомпозицией считается моделирование колебаний  $x(t)$  колебаниями линейных систем с одной степенью свободы при возбуждении на частотах, близких к резонансным. Если

© Ю. Н. Базилевич, Р. Б. Грановский, Н. Я. Гаркави,  
Е. Ф. Фёдоров, В. В. Карпенко, О. Н. Литвиненко, 2017

узел является линейным преобразователем, то потребуем, чтобы фактические координаты трёх точек в каждой околорезонансной области АЧХ узла были равны координатам трёх точек АЧХ соответствующей декомпозированной системы.

На рис. 1 приведена схема идеализированной механической системы. Координаты  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$  – вертикальные перемещения масс  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  относительно «земли»;  $y(t)$  – входной сигнал (вибровозбуждение). Декомпозиция здесь означает обрыв связей, после которого остаются три не зависящие друг от друга подсистемы. На рис. 2:  $A(\omega)$  – АЧХ массы  $m_1$  системы, изображённой на рис. 1;  $A_1(\omega)$ ,  $A_2(\omega)$  и  $A_3(\omega)$  – АЧХ соответственно трёх декомпозированных систем.

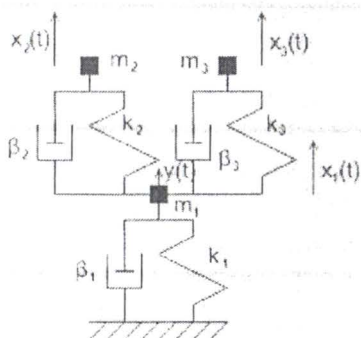


Рис. 1 – Схема исходной идеализированной линейной механической многомассовой системы

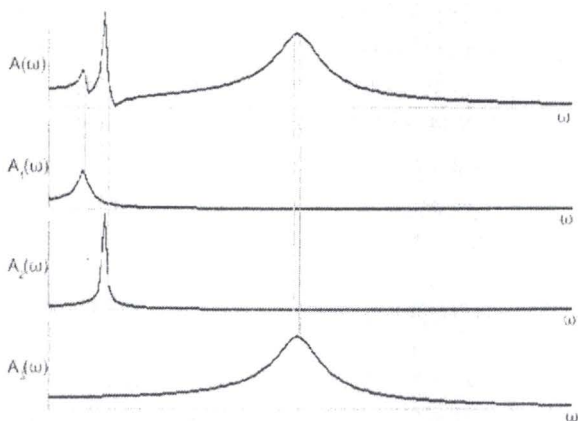


Рис. 2 – Амплитудные частотные характеристики исходной и декомпозированных систем

**Выделение части общей проблемы.** Очевидно, что передаточная функция декомпозированной системы равна

$$\frac{1}{(v^2 - \omega^2) + 2jh\omega} = \frac{(v^2 - \omega^2) - 2jh\omega}{(v^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2},$$

где  $v$  – собственная частота системы без демпфирования;  $(-h \pm j\sqrt{v^2 - h^2})$  – собственные значения системы с учётом демпфирования,  $j = \sqrt{-1}$ .

АЧХ декомпозированной системы: 
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(v^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}.$$

Мнимая частотная характеристика (МЧХ) декомпозированной системы:

$$\text{Im}(\omega) = \frac{-2h\omega}{(v^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}.$$

По трём точкам АЧХ линейной системы первого порядка (декомпозированной)  $A(\omega_1)$ ,  $A(\omega_2)$  и  $A(\omega_3)$  при  $(\omega_1 \leq \omega_2 < \omega_3)$  или  $(\omega_1 < \omega_2 \leq \omega_3)$  из системы уравнений

$$\frac{A(\omega_2)}{A(\omega_1)} = \frac{\sqrt{(v^2 - \omega_1^2)^2 + 4h^2\omega_1^2}}{\sqrt{(v^2 - \omega_2^2)^2 + 4h^2\omega_2^2}}; \quad \frac{A(\omega_2)}{A(\omega_3)} = \frac{\sqrt{(v^2 - \omega_3^2)^2 + 4h^2\omega_3^2}}{\sqrt{(v^2 - \omega_2^2)^2 + 4h^2\omega_2^2}} \quad (1)$$

можно идентифицировать собственные значения этой системы [5]:

$$\begin{aligned} \alpha &= A(\omega_2)/A(\omega_1); \quad \beta = A(\omega_2)/A(\omega_3); \\ h &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{((v^2 - \omega_2^2)\alpha)^2 - (v^2 - \omega_1^2)^2}{(\omega_1^2 - (\omega_2\alpha)^2)}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{((v^2 - \omega_2^2)\beta)^2 - (v^2 - \omega_3^2)^2}{(\omega_3^2 - (\omega_2\beta)^2)}}; \quad (2) \\ R &= (\omega_1^2 - (\omega_2\alpha)^2); \quad Q = (\omega_3^2 - (\omega_2\beta)^2); \\ v^2 &= \sqrt{\frac{(\omega_2^4\alpha^2 - \omega_1^4) \cdot Q - (\omega_2^4\beta^2 - \omega_3^4) \cdot R}{(\beta^2 - 1) \cdot R - (\alpha^2 - 1) \cdot Q}}. \end{aligned}$$

Эти же собственные значения можно идентифицировать из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{Im}(\omega_2)}{\operatorname{Im}(\omega_1)} = \frac{-2h\omega_2 \left( (v^2 - \omega_1^2)^2 + 4h^2\omega_1^2 \right)}{-2h\omega_1 \left( (v^2 - \omega_2^2)^2 + 4h^2\omega_2^2 \right)}; \\ \frac{\operatorname{Im}(\omega_2)}{\operatorname{Im}(\omega_3)} = \frac{-2h\omega_2 \left( (v^2 - \omega_3^2)^2 + 4h^2\omega_3^2 \right)}{-2h\omega_3 \left( (v^2 - \omega_2^2)^2 + 4h^2\omega_2^2 \right)} \end{cases} \quad (3)$$

по трём точкам МЧХ:  $\operatorname{Im}(\omega_1)$ ,  $\operatorname{Im}(\omega_2)$  и  $\operatorname{Im}(\omega_3)$ , – декомпозированной системы [4].

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega_1 \operatorname{Im}(\omega_2)}{\omega_2 \operatorname{Im}(\omega_1)}; \quad \beta = \frac{\omega_3 \operatorname{Im}(\omega_2)}{\omega_2 \operatorname{Im}(\omega_3)}; \\ h &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v^4(1-\alpha) - 2v^2(\omega_1^2 - \omega_2^2\alpha) + (\omega_1^4 - \omega_2^4\alpha)}{\omega_2^2\alpha - \omega_1^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v^4(1-\beta) - 2v^2(\omega_3^2 - \omega_2^2\beta) + (\omega_3^4 - \omega_2^4\beta)}{\omega_2^2\beta - \omega_3^2}}; \quad (4) \\ R &= \omega_2^2\alpha - \omega_1^2; \quad Q = \omega_2^2\beta - \omega_3^2; \\ v^2 &= \sqrt{\frac{(\omega_3^4 - \omega_2^4\beta) \cdot R - (\omega_1^4 - \omega_2^4\alpha) \cdot Q}{(1-\alpha) \cdot Q - (1-\beta) \cdot R}}. \end{aligned}$$

Нормируемые характеристики декомпозированной системы – это декремент колебаний  $\delta = \pi h / \sqrt{v^2 - h^2}$  [9–11] и добротность

$$Q = \sqrt{v^2 - h^2} / (2h) \quad [14].$$

Сравнивая идентифицированные значения этих характеристик с нормативными, можно оценить: механическая система недодемпфирована, передемпфирована или задемпфирована в достаточной степени.

С целью получения АЧХ стендовые испытания ведут при сканируемом возбуждении  $y(t) = B \cdot \sin(2^{1/t} \omega_0 t)$ , где  $V$  может быть  $\pm 0,5$ ,  $\pm 1$  или  $\pm 2$  октав/мин. [5]. Одним из видов натуральных испытаний для получения АЧХ является «сброс с клиньев» подвижного состава [1].

**Изложение основного материала.** Если цель испытаний – определение декрементов колебаний, то по результатам испытаний механической системы определяются характеристики демпфирования, соответствующие только определённым формам колебаний. Остальные резонансы ради оценки демпфирования заказчиков не интересуют. Формы колебаний определяются разностями фаз резонансных колебаний наперёд заданных точек исходной механической системы [4]. При этом синфазными считаются колебания при  $|\varphi_i(\omega) - \varphi_k(\omega)| < 90^\circ$ , а колебаниями в противофазе считаются колебания при  $90^\circ < |\varphi_i(\omega) - \varphi_k(\omega)| < 270^\circ$ . Здесь  $\varphi_i(\omega)$  – фазовая частотная характеристика (ФЧХ) точки  $i$  механической системы. Формы строятся для частоты, резонансной согласно рис. 2, но не собственной частоты декомпозированной системы.

Для идеализированной линейной механической системы, изображённой на рис. 1, характерны три формы колебаний (рис. 3). При этом на 1-й резонансной частоте все массы колеблются в фазе, на 2-й резонансной частоте масса  $m_3$  колеблется в противофазе массам  $m_1$  и  $m_2$ , на 3-й резонансной частоте масса  $m_1$  колеблется в противофазе массам  $m_2$  и  $m_3$ .



Рис. 3 – Формы колебаний системы, изображённой на рис. 1

**Пример 1.** Пусть в сложной линейной системе точка  $m_1$  имеет АЧХ, описанную дробно-рациональной функцией без кратных корней в знаменателе (согласно [12] реальная, а не идеализированная система кратных корней не имеет). Тогда вблизи каждой резонансной частоты исходная система может быть смоделирована отдельной декомпозированной системой. В каждой декомпозированной системе нас интересует коэффициент затухания  $h$  (действительная часть собственного значения декомпозированной системы). Отметим, что, если полученные с помощью выражений (2) и (4) значения декрементов (добротностей) не близки, то декомпозицию можно считать не правомерной.

**Пример 2.** В связи с идеализацией исходной системы (например, с неучтёнными нарушениями симметрии исходной системы) одной форме колебаний может соответствовать несколько резонансов [2]. Кроме того, повторяемость собственных значений декомпозированных

систем от изделия к изделию может быть не высокой [2]. В этих случаях можно считать, что одной декомпозированной системе соответствует множество собственных частот и множество декрементов (добротностей). Для конструктора появляется возможность выбора наибольшего или наименьшего декремента (добротности) с целью модернизации изделия.

*Пример 3.* Пусть в испытаниях имел место удар в упругий или не упругий ограничитель колебаний. Для оценки демпфирования принципиальны только малые колебания, при которых ограничитель не «работал». Поэтому в стендовых испытаниях [4, 5] целесообразно уменьшить вибровозбуждение; после «сброса с клиньев» [1] переходной функцией [13] иногда приходится считать только тот участок затухающих колебаний, где ограничитель не «работал» (напомним, что АЧХ является Фурье-преобразованием переходной функции). Таким образом, в данном случае декомпозируется только линейная система (рис. 4). Точка « $t_x$ » на рисунке – начало участка, где ограничитель не «работал».

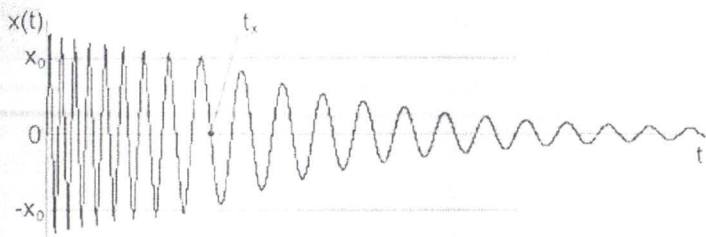


Рис.4 – Построение переходной функции для системы с упругим ограничителем колебаний.

Уравнение движения при наличии упругого ограничителя следующее

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + v^2 \cdot \begin{cases} x & \text{если } |x| \leq x_0 \\ (x_0 + \gamma \cdot (|x| - x_0)) \cdot \text{sign}(x) & \text{если } |x| > x_0 \end{cases} = 0.$$

*Пример 4.* Билинейные пружины грузовых железнодорожных вагонов имеют одну жёсткость для порожнего состояния вагона и другую жёсткость для гружёного состояния. Поэтому испытания должны проводиться отдельно для порожних вагонов и отдельно для гружёных вагонов, а декомпозируются в обоих случаях линейные (или линеаризованные) системы.

*Пример 5.* В подвижном составе железных дорог активно используются фрикционные гасители колебаний. Собственные колебания линейной системы и системы с фрикционным гасителем существенно отличаются (рис. 5) [6, 16]. К тому же, для фрикционных

гасителей характерны заклинивания и «прощёлкивания». Между тем, конструкторы традиционно оценивают демпфирование фрикционных гасителей по характеристикам приведенной линейной декомпозируемой системы [9 – 11]. Оправдать это можно тем, что нормативные значения этих «приведенных» характеристик были получены таким же самым способом.

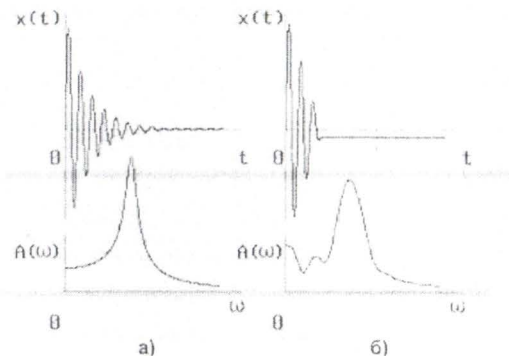


Рис. 5 – Переходные функции и «АЧХ» одномассовых механических систем: а) линейной; б) с сухим трением.

*Пример 6.* Понятие «АЧХ» для систем с нелинейными пружинами (например, систем с резино-металлическими амортизаторами или амортизаторами из литой резины), описываемых, например, уравнением Дуффинга  $\ddot{x} + 2h\dot{x} + v^2(1 + \gamma x^2)x = y(t)$  [7], в общем случае не корректно. В стендовых испытаниях сканируемым возбуждением можно получить зависимость  $A(\omega)$  при различных значениях амплитуды  $B$  вибровозбуждения  $y(t)$ . Иногда удаётся синтезировать нелинейную декомпозируемую систему, в околорезонансной области имеющую такие же зависимости  $A(\omega)$  при тех же уровнях  $B$ . Однако, при достаточно малых уровнях  $B$ , при которых в околорезонансной области значения  $A(\omega)$  далеки от области многозначности (рис. 6), можно построить линеаризованную декомпозируемую систему. Если  $B_2 \ll B_1$ , то при таком  $B_2$  нелинейность не оказывает решающего влияния на точность определения коэффициента затухания по трём точкам АЧХ. Если величины  $h$ , полученные по АЧХ и МЧХ этой линеаризованной системы, более или менее близки, по идентифицированным декрементам, с достаточной для конструктора точностью, можно оценить уровень демпфирования исходной системы. Линеаризованную декомпозируемую систему можно построить и по результатам «сброса с клиньев».

Пример 7. В [3] описан эффект, иногда возникающий в сосудах, частично заполненных жидкостью, когда при интенсивных колебаниях оболочки над поверхностью жидкости появляются фонтанчики, вызывающие стоячие волны на поверхности жидкости, которые, в свою очередь, провоцируют низкочастотные колебания всей конструкции в пространстве. В целях недопущения этого эффекта в эксплуатации конструкторов интересуют оценки демпфирования колебаний оболочки и подвижности жидкости. Но испытатель может определить эти характеристики при малом уровне вибровозбуждения на частотах, например, характерных для 1-й, 2-й и 3-й форм колебаний образующей оболочки, а также на частоте соответствующей формы колебаний поверхности жидкости. В этом случае декомпозировать придётся вместо сложной нелинейной системы достаточно простые линейные колебательные системы.

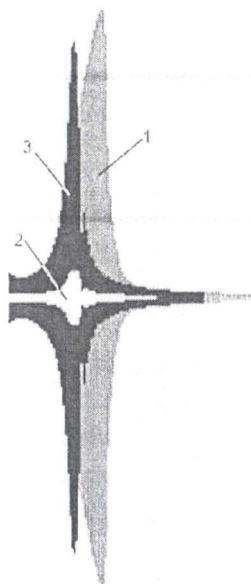


Рис. 6 – Оциллограммы решения уравнения Дуффинга с возмущением

$y(t) = B \sin(\omega_0 2^{1/2} t)$  при  $i$ -х вариантах значений параметров  $B_i$  и  $\gamma_i$ :

линия 1 –  $i = 1, \gamma_1 \neq 0, B_1 \neq 0$ ;

линия 2 –  $i = 2, \gamma_2 = \gamma_1, B_2 \ll B_1$ ;

линия 3 –  $i = 3, \gamma_3 = 0, B_3 = B_1$  (линейное уравнение)

**Выводы.** Если заказчиком испытаний является конструктор, то его интересует ответ на вопрос: механическая система недодемпфирована, передемпфирована или задемпфирована в достаточной степени. Такой точности результатов идентификации



декрементов (добротностей) в декомпозированных системах конструктору достаточно.

Приближённая декомпозиция является действенным приёмом [8] для оценки демпфирования, как линейных, так и широкого круга нелинейных механических систем. Но необходимость декомпозиции во время обработки результатов испытаний нелинейных систем должна быть учтена и во время проведения экспериментов.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Блохин Е. П.* Прогнозирование наиболее опасных режимов ходовых испытаний подвижного состава / Е. П. Блохин, М. Л. Коротенко, С. В. Мямлин и др. // Вестник машиностроения. – М.: Машиностроение, США: Аллертон Пресс, 2003. – №7. – С. 20–23.

2. *Гаркави Н. Я.* К вопросу о решении задач механики с помощью моделирования / Н. Я. Гаркави, И. Е. Ковалёв, В. Л. Горобец и др. // Научная дискуссия: Вопросы технических наук / Сб. статей по матер. XVII междунар. заочной научно-практ. конф. (декабрь 2013г.). – М.: Междунар. центр науки и образования [intermaka.org](http://intermaka.org). – 2013. – №12(14). 130–138 с.

3. *Гаркави Н. Я.* О способах имитации вибрационного состояния объектов / Н. Я. Гаркави, И. В. Добров // Вест. машиностроения. – М.: Машиностроение, США: Аллертон Пресс. – 1999. – №4. – С. 52–54.

4. *Гаркави Н. Я.* Система измерений динамических характеристик механических конструкций при виброиспытаниях / Н. Я. Гаркави, И. В. Добров // Вест. Машиностроения. – М.: Машиностроение, США: Аллертон Пресс. – 2002. – №3. – С. 10–14.

5. *Гаркави Н. Я.* Система измерения и автоматической обработки виброиспытаний механических конструкций с целью определения их динамических характеристик / Н. Я. Гаркави, И. Е. Ковалёв // Динамические измерения. Тезисы докладов 2-го всесоюзного симпозиума. – Л.: ЛОП НТО Приборпром, НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева». – 1978. – С. 87–89.

6. *Добров И. В.* К вопросу об исследовании моделей-ассоциаций / И. В. Добров, Н. Я. Гаркави, Е. Ф. Фёдоров и др. // Системні технології. Регіональний міжвузівський зб. наук. праць. – Д. – 2014. – №5(94). – С. 84–90.

7. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. – 778 с.

8. *Ленк А.* Механические испытания приборов и аппаратов. / А. Ленк, Ю. Ренитц. – М.: Мир, 1976. – 272 с.

9. Нормы для расчёта и оценки прочности несущих элементов, динамических качеств и воздействия на путь экипажной части локомотивов железных дорог МПС колеи 1520 мм. – М.: ВНИИЖТ, 1998. – 145 с.

10. Нормы для расчёта и оценки прочности несущих элементов и динамических качеств экипажной части моторвагонного подвижного состава железных дорог МПС колеи 1520 мм. – М.: ВНИИВ-ВНИИЖТ, 1997. – 147 с.

11. Нормы для расчёта и проектирования вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных). – М.: ГосНИИВ-ВНИИЖТ, 1996. – 352 с.

12. *Пановко Я. Г.* Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 6-е изд. / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М.: КомКнига, 2007. – 352 с.

13. *Приходько В. И.* Использование преобразования Фурье при обработке результатов натуральных испытаний подвижного состава / В. И. Приходько, С. В. Мямлин, Е. Ф. Фёдоров, Н. Я. Гаркави // XVI международная конференция. Математика. Экономика. Образование. V международный симпозиум. Ряды Фурье и их приложения. Тезисы докладов. – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2008. – С.43–44.

14. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов / Б. И. Рабинович. – М.: Машиностроение, 1975. – 416 с.
15. Смыслов В.И. Об экспериментальных способах исследования колебаний летательных аппаратов / В.И. Смыслов // Труды ЦАГИ. – 1970. – Вып. 1217. – С. 3–63.
16. Справочник по технической механике / Под общей редакцией акад. А. Н. Динника. – М.-Л.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1949. – 734 с.

УДК 620.178.3

Ю.М. Базилевич, канд.физ.-мат.наук,  
Р.Б. Грановський канд.физ.-мат.наук., Н.Я. Гаркаві,  
Є.Ф. Федоров, В.В. Карпенко, О.Н. Литвиненко

### НАБЛИЖЕНА ДЕКОМПОЗИЦІЯ ЯК ЗАСІБ ОЦІНКИ ДЕМПФУВАННЯ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ

Показано, що наближена декомпозиція є дієвим прийомом для оцінки демпфування, як лінійних, так і досить широкого кола нелінійних коливальних систем.

*Ключові слова:* наближена декомпозиція, моделювання коливальних систем, частотні характеристики, оцінка демпфування, методика проведення випробувань.

UDC 620.178.3

Yu. N. Bazilevich, PhD (Phiz.-Math.), R. B. Granovskiy, PhD (Tech.),  
N. Ya. Garkavie, Ye. F. Fedorov, V. V. Karpenko, O. N. Litvinenko

### THE APPROXIMATE DECOUPLING AS THE WAY TO ESTIMATE THE DAMPING OF THE OSCILLATORY SYSTEMS

It is shown that the approximate decoupling is the effective way to estimate the damping for both linear and wide range of nonlinear oscillatory systems.

*Keywords:* approximate decoupling, oscillatory system modelling, frequency characteristics, damping estimation, testing procedures.

Let the oscillations of the mechanical system be described by differential equation system (generally nonlinear). The node of this system may be presented as the mechanical converter of the input (for the node) signal  $y(t)$  to the output (for the node) signal  $x(t)$ . If  $y(t) = B \cdot \sin(\omega t)$ , then the "amplitude" of the steady-state signal will be  $A(\omega) = \max_{t \rightarrow \infty} \{ |x(t)| \}$  (Here  $t \rightarrow \infty$  stands for rather long time interval that is far from the transient process). For the linear differential converter the dependency of  $A(\omega)$  is the amplitude frequency characteristics (the AFC) of the converter if  $B = 1$ . The decoupling will be deemed to be oscillation modeling  $x(t)$  by the oscillations of the linear systems with one freedom degree when activating on the frequencies that are close to the resonant ones. If the node is the linear converter, then we shall require the actual coordinates of three points in

each near-resonant area of the node AFC to be equal to the coordinates of three points of the AFF of the corresponding decoupled system.

As it is known, for the linear systems the damping characteristics are the oscillation decrement and the quality factor. For each the resonance frequency the decrement (the quality factor) is uniquely defined by its eigenvalues of the matrix of the linear differential converter as described above. In this article there are described the formula derivations to determine eigenvalues of the linear systems with one freedom degree by three near-resonant points of the AFC and by three near-resonant points of the imaginary frequency characteristics (the IFC). The decoupling is valid if eigenvalues of the decoupled subsystem, got by three near-resonant points of the AFC and by three near-resonant points of the IFC, are close.

The AFC and the IFC of the tested system may be defined by the tests with the scanned vibration activation or by the reaction to the Dirak's function (that corresponds to the test of the rolling stock, the so called «dropping from the stretchers»).

In this article it is shown how to get the AFC and the IFC of the linearized system, if in the system there is elastic or inelastic restraint of oscillations, as well as the nonlinear spring. It is shown also, how to estimate damping of systems with a friction absorber.

## REFERENCES

1. **Blohin E. P.** Prediction of the most dangerous modes of rolling stock running tests / E. P. Blohin, M. L. Korotenko, S. V. Myamlin and others // Bulletin of Machine Building. – Moscow: Mechanical engineering, USA: Allerton Press. – 2003. – No 7. – P. 20–23. (in Russian).
2. **Garkavie N. Ya.** Regarding the problem solving in mechanics by means of modeling / N. Ya. Garkavie, I. E. Kovalyov, V. L. Gorobets and others // Scientific discussion. Questions of technical sciences / Collection of articles on the materials of the XVII International Correspondence Scientific and Practical Conference, December 2013. – Moscow: International Center for Science and Education internauka.org, 2013. – No 12 (14). – P. 130–138. (in Russian).
3. **Garkavie N. Ya.** On ways of imitation of a vibrational condition of the objects / N. Ya. Garkavie, I. V. Dobrov // Bulletin of Machine Building. – Moscow: Mechanical engineering, USA: Allerton Press. – 1999. – No 4. – P. 52–54. (in Russian).
4. **Garkavie N. Ya.** A system for measuring the dynamic characteristics of mechanical structures in vibration tests / N. Ya. Garkavie, I. V. Dobrov // Bulletin of Machine Building. – Moscow: Mechanical engineering, USA: Allerton Press. – 2002. – No 3. – P. 10–14. (in Russian).
5. **Garkavie N. Ya.** A system for measuring and automatic processing of vibration tests of mechanical structures in order to determine their dynamic characteristics / N. Ya. Garkavie, I. E. Kovalyov // Dynamic measurements. Theses of the reports of the 2-nd All-Union Symposium. – Leningrad: LOP NTO Priborprom, RPA «All-Russian Scientific Research Institute of Metrology named after D. I. Mendeleev». – 1978. – P. 87–89. (in Russian).
6. **Dobrov I. V.** Regarding the study of association models / I. V. Dobrov, N. Ya. Garkavi, E. F. Fyodorov and others // System technologies. The collection of regional Inter-Universities papers. – Dnipropetrovsk. – 2014. – No 5(94). – P. 84–90. (in Russian).
7. **Kauderer G.** Nonlinear mechanics. – Moscow: Foreign Literature Publishing House, 1961. – 778 p. (in Russian).

8. **Lenk A.** Mechanical testing of instruments and apparatus / A. Lenk, Yu. Renits. – Moscow: Mir, 1976. – 272 p. (in Russian).

9. Norms of calculation and evaluation of the strength of load-bearing elements, dynamic qualities and the impact on the path of the locomotive underframe of railway locomotives acc. to the Ministry of Railways, gauge 1520 mm. – Moscow: VNIIZhT, 1998. – 145 p. (in Russian).

10. Norms of calculation and evaluation of the strength of load-bearing elements and the dynamic qualities of the locomotive underframe of the railway multiple unit acc. to the Ministry of Railways, gauge 1520 mm. – Moscow: VNIIV-VNIIZhT, 1997. – 147 p. (in Russian).

11. Norms of calculation and design of railroad cars acc. to the Ministry of Railways, gauge 1520 mm (non-self-propelled). – Moscow: GosNIIV-VNIIZhT, 1996. – 352 p. (in Russian).

12. **Panovko Ya. G.** Stability and oscillations of elastic systems. Modern concepts, paradoxes and mistakes. 6-e izd. / Ya. G. Panovko, I. I. Gubanova. – Moscow: KomKniga, 2007. – 352 p. (in Russian).

13. **Prihodko V. I.** The use of the Fourier transform in processing the results of full-scale tests of rolling stock / V. I. Prihodko, S. V. Myamlin, E. F. Fyodorov, N. Ya. Garkavi // XVI International Conference. Mathematics. Economy. Education. V International Symposium. Fourier series and their applications. Theses of reports. – Rostov-on-Don: YuFU. – 2008. – P.43–44. (in Russian).

14. **Rabinovich B. I.** Introduction to the dynamics of rockets-carriers of space vehicles. – Moscow: Mashinostroenie, 1975. – 416 p. (in Russian).

15. **Smyslov V. I.** On the experimental methods of studying the oscillations of aircraft. // Proceedings of TsAGI. Issue. 1217. – 1970. – P. 3–63.

16. Handbook of Technical Mechanics / Under the general editorship of Acad. A. N. Dinnik. – Moscow-Leningrad: OGIz-Gostehizdat, 1949. – 734 p. (in Russian).

<sup>1</sup> Приднепровская государственная академия  
строительства и архитектуры  
Днепр, Украина,

<sup>2</sup> Днепропетровский национальный  
университет железнодорожного транспорта  
им. академика В. Лазаряна,

<sup>3</sup> Информационно-статистический центр  
Приднепровской железной дороги,  
Днепр, Украина

Поступила в редколлегию 24.03.2017