

Міністерство освіти і науки України  
ДВНЗ «Придніпровська академія будівництва та архітектури»

Національна академія наук України  
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

Базилевич Юрій Миколайович

УДК 519.876

## **ДИСЕРТАЦІЯ**

### **Методи декомпозиції матричних математичних моделей**

01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні методи

11 — математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Ю. М. Базилевич

Дніпро— 2018

## АНОТАЦІЯ

*Базилевич Ю. М.* Методи декомпозиції матричних математичних моделей — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних науки за спеціальністю 01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні методи. ДВНЗ «Придніпровська академія будівництва та архітектури» Міністерства освіти і науки України (Дніпро), Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України. Київ, 2018.

Розглянуто питання приведення систем рівнянь високого порядку до окремих підсистем через лінійну заміну змінних. Застосовано як ті методи, що використовують інформацію щодо симетрії відповідної розрахункової схеми, так і ті, що безпосередньо аналізують систему рівнянь. Особливу увагу приділено обчислювальній стороні методів, що застосовуються, питанням отримання рішення за допомогою ЕОМ. Розв'язано задачу з визначення систем, близьких до таких, що розщеплюються. Створено метод найкращої ієрархічної декомпозиції систем.

Розглянуто спрощення рівнянь еволюції неконсервативних систем, систем автоматичного управління і моделей міжгалузевого балансу.

**Наукова новизна отриманих результатів.** Основні положення, що виносяться на захист є такі:

*вперше:*

- широке коло задач декомпозиції зведено до задачі про знаходження перетворення подібності допоміжних квадратних матриць, що дозволяє розглядати різні задачі декомпозиції з єдиних позицій;
- сформульовано й доведено теорему єдиності розв'язку задачі декомпозиції;
- розроблено спосіб виявлення систем, близьких до розщеплюваних;

— отримано необхідні й достатні умови існування перетворення подібності, що приводить одночасно кілька матриць до блочно-трикутного вигляду; розроблено алгоритм обчислення матриці цього перетворення; таким чином, вирішено задачу про найкращу ієрархічну декомпозицію системи рівнянь;

*удосконалено:*

— *методи оцінки області притягання розв'язку;*

— *методи спрощення задач напівозначеного програмування;*

*набули подальшого розвитку:*

— *методи декомпозиції рівнянь з прямокутними матрицями коефіцієнтів; розглянуті різні окремі випадки підсистем «нестандартного» вигляду;*

— *результати з декомпозиції рівнянь руху складних механічних, електромеханічних систем, а також із декомпозиції матричних моделей міжгалузевого балансу.*

**Практичне значення** дисертації підтверджують акти впровадження. Зокрема використання результатів роботи по спрощенню математичних моделей рейкових екіпажів дало такі переваги.

1. Зменшився обсяг роботи, яка потрібна для вибору оптимальних параметрів рухомого складу залізничного транспорту.
2. Підвищилася точність розрахунків динамічних показників.

*Ключові слова:* декомпозиція, стійкість руху, лінійна модель, матриця, перетворення подібності, централізатор, блоково-трикутний вигляд, алгебра над полем, радикал.

#### ABSTRACT

Bazilevich Yu. N. Methods of decoupling of matrix mathematical models. - Qualifying scientific work as a manuscript.

Thesis for the Doctor's of Physical and Mathematical Sciences degree by specialty: 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. State Higher Educational Institution "Prydniprovsk Academy of Civil Engineering and Architecture" of the Ministry of Education and Science of Ukraine (Dnipro), V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine. Kyiv, 2018.

The problems of bringing the systems of equations of high order to the individual subsystems by a linear change of variables have been considered. The methods of both using the information about symmetry of corresponding calculation model and analyzing the system of equations directly have been applied. Particular attention has been paid to the computing side of the applied methods and to the issues of obtaining of the computer-aided decisions. The problem of determining the systems similar to the splittable ones has been resolved. The method of the best hierarchical decoupling of the systems have been created.

Simplification of the equations of evolution of the non-conservative systems, automatic control systems and models of input-output balance have been considered.

**Scientific novelty of the obtained results.** *The main provisions presented for defence and degree of their scientific novelty:*  
*for the first time:*

- a wide range of decoupling problems has been reduced to the problem of finding the similarity transformation of the auxiliary square matrices, which allows us to consider various decoupling problems from a unified position;
- the unique solution theorem for the decoupling problem has been formulated and proved;
- a method of detection of the systems that are similar to splittable ones has been developed;

—necessary and sufficient conditions for existence of a similarity transformation that reduces several matrices to the block-triangular form simultaneously have been obtained; a computational algorithm of this transformation matrix has been developed; thus, the problem of the best hierarchical decoupling of the system of equations has been solved;

*improved:*

—a new evaluation of the domain of solution attraction has been obtained;  
—a new approach to simplification of semi-defined programming problems has been developed;

*gained further traction:*

—the structure of the subsystems that may be obtained has been studied; various special cases of "non-standard" subsystems have been examined;  
—the results of decoupling of the motion equations of complex mechanical, electromechanical systems, as well as of decoupling of matrix models of the intersectoral balance have been obtained.

**The practical significance** of the thesis is confirmed by the implementation acts. In particular, the use of work results to simplify the mathematical models of railcars has given the following advantages:

1. The amount of work required to select the optimal parameters of rolling stock of rail transport has been decreased.
2. The accuracy of dynamic indicators calculation has been improved.

*Key words:* decoupling, motion stability, linear model, matrix, similarity transformation, centralizer, block-triangular form, algebra over field, radical.

### Список публікацій здобувача

#### Публікації, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. *Базилевич Ю. Н.* Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики / Ю. Н. Базилевич. – Киев: Наук. думка, 1987. — 156 с.
2. *Базилевич Ю. Н.* Разделение на подсистемы уравнений возмущенного движения восьмиосного вагона с несимметричной загрузкой / Ю. Н. Базилевич // Динамика и прочность сложных механических систем. – Киев: Наук. думка, 1977. — С. 24—27.
3. *Базилевич Ю. Н.* О применении методов теории чувствительности для стабилизации сложных динамических систем / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, В. А. Татарина // Теория инвариантности и её применение. Ч. 2. — Киев: Наук. Думка, 1979. — С. 16—21.
4. *Базилевич Ю. Н.* Приведение системы линейных дифференциальных уравнений к максимально возможному количеству независимых подсистем / Ю. Н. Базилевич // Дифференц. уравнения. — 1980. — 16, № 2. — С. 360—361.
5. *Базилевич Ю. Н.* Оптимизация параметров рельсовых экипажей по различным целевым функциям / Ю. Н. Базилевич, Н. А. Радченко // Нагруженность, прочность, устойчивость движения механических систем. Киев: Наук. думка, 1980. — С.48—52
6. *Базилевич Ю. Н.* Оценка области притяжения решения уравнений движения с помощью собственных чисел / Ю. Н. Базилевич // Колебания и динамические качества механических систем. — Киев: Наук. думка, 1983. — С. 14—17.
7. *Базилевич Ю. Н.* Механические характеристики путевой структуры скоростной транспортной системы / Ю. Н. Базилевич // Динамические характеристики механических систем. — Киев: Наук. Думка, 1984. — С. 76—81.

8. *Базилевич Ю. Н.* О боковых колебаниях восьмиосных экипажей / Ю. Н. Базилевич, Ю. В. Демин, М. Б. Кельрих, Л. М. Коротенко // Конструкторско-технологические исследования в области создания металлургического, горнорудного, подъёмно-транспортного оборудования и цистерностроения. Краматорск: НИИПТмаш., 1985. — С. 90—100
9. *Базилевич Ю. Н.* Распределение амплитуд колебаний многомассовой существенно неконсервативной системы / Ю. Н. Базилевич, Ю. В. Демин, Л. М. Коротенко // Колебания и прочность механических систем. — Киев: Наук. Думка, 1986. С. 81—87.
10. *Базилевич Ю. Н.* Численные алгоритмы для разделения уравнений на независимые и слабо связанные подсистемы / Ю. Н. Базилевич // Нагруженность и надежность механических систем. — Киев: Наук. думка, 1987. — С. 53—55
11. *Базилевич Ю. Н.* Моделирование боковых колебаний четырехосной цистерны с дополнительными упругодиссипативными связями / Ю. Н. Базилевич, Ю. П. Бороненко, Ю. В. Демин, Л. М. Коротенко // Проблемы динамики, прочности и устойчивости движения железнодорожного подвижного состава. — Днепропетровск: Изд-во ДИИТ, 1986. — С. 104—111.
12. *Базилевич Ю. М.* Вибір узагальнених координат локомотива з трьома візками з урахуванням симетрії його розрахункової схеми / Ю. М. Базилевич, М. Л. Коротенко // Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки, Біологічні науки. №1, 2000. — С. 13 —16.
13. *Базилевич Ю. Н.* Наилучшее разделение на блоки матричных макроэкономических моделей / Ю. Н. Базилевич // Питання прикладної математики і математичного моделювання: Зб. наукових пр. — Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2005. — С. 23 — 28.

14. *Апроянц А. Р.* Различные подходы к задаче нахождения общего инвариантного подпространства нескольких матриц / А. Р. Апроянц, Ю. Н. Базилевич, Н. В. Чехранов // Вісник Дніпропетровського університету. Математика. 2005, № 6. — С. 3 — 6.
15. *Базилевич Ю. Н.* Точная декомпозиция линейных систем [Электронный ресурс] / Ю. Н. Базилевич // Электронный журнал "Исследовано в России", 018, стр. 182—190. — 2006. — Режим доступа к ресурсу: <http://elibrary.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/MFTI/2006/018.pdf>.
16. *Bazilevich Yu. N.* The Simultaneous Reduction of Matrices to the Block-Triangular Form / Yu. N. Bazilevich [E-resource] // Physics Journal. — 2015. Vol. 1, No. 2, pp. 54—61. Access to the resource: <http://files.aiscience.org/journal/article/html/70400061.html>.
17. *Базилевич Ю. Н.* Новые вычислительные алгоритмы в задачах точной декомпозиции / Ю. Н. Базилевич // Питання прикладної математики і математичного моделювання. — Д.: РВВ ДНУ, 2015. — Вип. 15. — С. 3—8.
18. *Базилевич Ю. Н.* Об упрощении задачи полуопределенного программирования / Ю. Н. Базилевич // Теорія оптимальних рішень. К.: Ін-т кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2016. — № 15. — С. 103—107.
19. *Базилевич Ю. Н.* Расщепление уравнений движения экипажа на электромагнитном подвешивании / Ю. Н. Базилевич // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. №1, 2016. — С. 5—11.
20. *Базилевич Ю. Н.* Оценка области притяжения решения в случае системы уравнений высокого порядка / Ю. Н. Базилевич, И. А. Костюшко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. № 25. — Д. : ДНУ, 2016. — С. 18—26.



21. *Базилевич Ю. Н.* Группа симметрии декомпозируемой системы / Ю. Н. Базилевич // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. — 2016, вип. 1 (20). — С. 3 — 10.
22. *Базилевич Ю. Н.* О постановке задач точной декомпозиции линейных математических моделей / Ю. Н. Базилевич, И. А. Костюшко // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2017. — № 1. — С. 77–82.
23. *Базилевич Ю. Н.* Наилучшее приведение матриц к блочно-треугольному виду для задач иерархической декомпозиции / Ю. Н. Базилевич // Кибернетика и системный анализ. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 145–153.
24. *Базилевич Ю. Н.* Приближённая декомпозиция как приём оценки демпфирования колебательных систем / Ю. Н. Базилевич, Р. Б. Грановский, Н. Я. Гаркави, Е. Ф. Фёдоров, В. В. Карпенко, О. Н. Литвиненко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. — Дніпро: Ліра, 2017. — Вип. 26. — С. 22—33.

#### **Публікації, які свідчать про апробацію матеріалів дисертації**

25. *Базилевич Ю. Н.* Оптимизация параметров рельсовых экипажей с точки зрения устойчивости движения / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, Н. А. Радченко // Всесоюзная конференция по оптимальному управлению в механических системах. Тезисы докладов. Казань: изд. КАИ, 1977. — С. 9—10.
26. *Базилевич Ю. Н.* Приведение набора матриц к блочно-треугольному виду с максимальным количеством блоков / Ю. Н. Базилевич // XIX Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений. Часть первая. — Львов: Изд-во ИППММФ АН УССР, 1987. — С. 18.
27. *Базилевич Ю. Н.* Расщепление уравнений боковых колебаний рельсового экипажа на подсистемы / Ю. Н. Базилевич // Проблемы механики

- железнодорожного транспорта. Тезисы докл. Всесоюзной конф. — Днепропетровск: ДИИТ, 1988. — С. 42
28. *Базилевич Ю. Н.* Декомпозиция уравнений при исследовании устойчивости движения рельсовых экипажей / Ю. Н. Базилевич // Восьмая конференция "Проблемы механики железнодорожного транспорта". Тезисы докладов конференции. — Днепропетровск: ДИИТ, 1992. — С. 23
29. *Базилевич Ю. Н.* Компьютерная декомпозиция уравнений движения рельсовых экипажей / Ю. Н. Базилевич // IX Международная конференция: Проблемы механики железнодорожного транспорта: Динамика, надежность и безопасность подвижного состава. Тезисы докладов конференции. — Днепропетровск: Днепропетр. гос. технич. ун-т ж. д. транспорта, 1996. — С. 148 — 149
30. *Базилевич Ю. Н.* О методах анализа матричных моделей стоимостного баланса / Ю. Н. Базилевич, В. А. Нецветаев, Е. П. Резник // XXI столетие — проблемы и перспективы освоения месторождений полезных ископаемых: Сб. науч. трудов НГА Украины. №3, том. 7. — Днепропетровск: РИК НГА Украины, 1998. — С. 194 — 196.
31. *Базилевич Ю. Н.* Алгоритм нахождения общего решения системы линейных однородных алгебраических уравнений в случае сверхбольшой разреженной матрицы коэффициентов / Ю. Н. Базилевич, А. Л. Булдович // Математические модели и современные технологии. Сб. науч. тр. / НАН Украины. Ин-т математики. — Киев, 1998. — С.12, 13.
32. *Базилевич Ю. Н.* Последовательная декомпозиция уравнений при исследовании устойчивости движения рельсовых экипажей / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, И. В. Швец // Проблемы механики железнодорожного транспорта: Динамика, надёжность и безопасность подвижного состава. X Международная конференция. Тезисы докладов. — Днепропетровск: Арт-Пресс, 2000. — С. 130—131.

33. *Базилевич Ю. Н.* Численное решение задач иерархической декомпозиции линейных математических моделей / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, И. В. Швец // Міждержавна науково-методична конференція “Комп'ютерне моделювання”. — Дніпродзержинськ, ДзДТУ, 2001. — С. 45—46
34. *Базилевич Ю. Н.* Методы точной декомпозиции при анализе динамической модели Леонтьева / Ю. Н. Базилевич, И. В. Швец // Міждержавна науково-методична конференція “Проблеми математичного моделювання”. — Дніпродзержинськ, ДзДТУ, 2002. — С. 7.
35. *Базилевич Ю. Н.* Выявление симметрии и условной симметрии системы вычислительными методами / Ю. Н. Базилевич // IX Крымская международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл./ Таврический национальный ун-т. — Симферополь. 2008. — С. 17.
36. *Bazilevich Yu. N.* Similarity transformation of the pair of matrices to the best partitioned-triangular form / Yu. N. Bazilevich // 7-а міжнародна алгебраїчна конференція в Україні: тези доповідей. — Київ, Ін-т математики НАН України, 2009. — С. 21.
37. *Базилевич Ю. Н.* Методы декомпозиции при анализе матричных макроэкономических моделей / Ю. Н. Базилевич // X Крымская международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл./ Таврический национальный ун-т. — Симферополь. 2010. — С. 13
38. *Базилевич Ю. Н.* Новые алгоритмы иерархической декомпозиции / Ю. Н. Базилевич // Информационные технологии в управлении сложными системами. Сборник докладов научной конференции. Днепропетровск: изд-во «Свидлер А.Л.», 2011. — С. 8—10.
39. *Базилевич Ю. Н.* Декомпозиция уравнений с прямоугольными матрицами коэффициентов / Ю. Н. Базилевич // Моделирование, управление и

- устойчивость (MCS-2012): межд. конф / Таврический нац. ун-т. — Симферополь. ДИАПИ, 2012. — С. 79.
40. *Базилевич Ю. Н.* Точная декомпозиция систем линейных уравнений / Ю. Н. Базилевич // Пятнадцатая міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня, 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — К.: НТУУ «КПІ», 2014. — С. 40.
41. *Базилевич Ю. Н.* Методы точной декомпозиции в линейных динамических задачах / Ю. Н. Базилевич // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: міжнародна науково-практична конф. — Дніпропетровськ: ДНУ, 2015. — С. 14—15.

**Публікації, які додатково відображають наукові результати дисертації**

42. *Базилевич Ю. Н.* Оптимизация параметров механических систем при овражном характере целевой функции / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, В. А. Татарина // Динамика и прочность сложных механических систем. — Киев: Наук. думка, 1977. — С. 31—33.
43. *Базилевич Ю. Н.* Приведение системы линейных дифференциальных уравнений к максимально возможному количеству независимых подсистем / Ю. Н. Базилевич // Рукопись деп. ВИНТИ 11.05.79 N1973-79 Деп.
44. *Базилевич Ю. Н.* Вычислительный подход к задаче нахождения неприводимых представлений конечной группы / Ю. Н. Базилевич // Прикладные проблемы математического моделирования: Вестник Херсонского государственного технического университета, 1999. — С. 29 — 31
45. *Базилевич Ю. Н.* Решение задачи иерархической декомпозиции линейных математических моделей механических систем / Ю. Н. Базилевич,

М. Л. Коротенко, И. В. Швец // Техническая механика. —2003, №1. — С. 135 — 140.

46. *Коротенко М. Л.* О работах В. А. Лазаряна в области устойчивости движения рельсовых экипажей и их развитии / М. Л. Коротенко, Ю. Н. Базилевич // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. — Вип. 30. — Д: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім акад. В. Лазаряна, 2009 — С. 144—149.

## ЗМІСТ

<b>СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ .....</b>	<b>19</b>
<b>ВСТУП.....</b>	<b>21</b>
<b>РОЗДІЛ 1    АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД СТАНУ ПИТАННЯ ПРО ДЕКОМПОЗИЦІЮ СИСТЕМ РІВНЯНЬ .....</b>	<b>28</b>
1.1. Огляд традиційних методів розрахунків симетричних систем у будівельній механіці й теорії коливань.....	28
1.2. Точна й наближена декомпозиція.....	30
1.3. Огляд літературних джерел із чисельних методів знаходження загального розв’язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь і застосування головних фазових координат .....	38
1.4. Аналіз теорії і практики застосування зображень скінченних груп .....	39
1.5. Метод комутуючої матриці .....	40
1.6. Огляд літературних джерел з алгебраїчних методів декомпозиції.....	45
1.7. Приклади прикладних задач, пов’язаних із проблемою декомпозиції..	49
1.8. Постановка задач даного дослідження.....	54
1.9. Висновки до розділу 1.....	57
1.10. Список використаних джерел до розділу 1 .....	58
<b>РОЗДІЛ 2 МЕТОДИ ЗВЕДЕННЯ ДО НЕЗАЛЕЖНИХ ПІДСИСТЕМ МІНІМАЛЬНО МОЖЛИВОГО ПОРЯДКУ .....</b>	<b>70</b>
2.1. Постановка задачі декомпозиції у випадку систем із квадратними матрицями коефіцієнтів.....	71
2.2. Перехід до задачі знаходження перетворення подібності .....	73
2.3. Алгоритм розв’язання задачі.....	75
2.4. Дійсні матриці коефіцієнтів .....	83
2.5. Комп’ютерне знаходження множини матриць, комутуючих з даними матрицями .....	84

	15
2.6. Системи рівнянь, які є близькими до розщеплюваних систем.....	106
2.7. Група симетрії динамічної системи.....	108
2.8. Комп'ютерне знаходження інваріантних підпросторів.....	115
2.9. Складання групи симетрії, відповідної виконаній декомпозиції.....	117
2.10. Обчислювальний підхід до задачі знаходження незвідних зображень .....	119
2.11. Декомпозиція математичних моделей керованих систем.....	124
2.12. Спрощення задачі напівозначеного програмування.....	133
2.13. Висновки до розділу 2.....	137
2.14. Список використаних джерел до розділу 2 .....	138
 <b>РОЗДІЛ 3 СПРОЩЕННЯ РІВНЯНЬ ЧЕРЕЗ ЗВЕДЕННЯ МАТРИЦЬ КОЕФІЦІЄНТІВ ДО БЛОЧНО-ТРИКУТНОГО ВИГЛЯДУ (ІЄРАРХІЧНА ДЕКОМПОЗИЦІЯ) .....</b>	
	142
3.1. Основні теореми .....	142
3.2. Знаходження загального інваріантного підпростору декількох матриць (метод інваріантного підпростору).....	150
3.3. Докладний опис алгоритму .....	153
3.4. Різні підходи до задачі знаходження загального інваріантного підпростору декількох матриць .....	161
3.5. Ієрархічна декомпозиція рівнянь руху механічних систем .....	168
3.6. Умовна симетрія системи .....	172
3.7. Виконання розрахунків за допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP .....	174
3.8. Підвищення ефективності алгоритму .....	182
3.9. Проблема ієрархічної декомпозиції рівнянь із прямокутними матрицями коефіцієнтів.....	185
3.10. Висновки до розділу 3.....	190
3.11. Список використаних джерел до розділу 3 .....	191

<b>РОЗДІЛ 4 ГОЛОВНІ КООРДИНАТИ Й ФОРМИ КОЛИВАНЬ НЕКОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>193</b>
4.1. Зведення рівнянь руху неконсервативної системи до головних фазових координат .....	193
4.2. Аналіз форм коливань неконсервативної коливальної системи .....	195
4.3. Стабілізація неконсервативних коливальних систем алгебраїчними методами.....	199
4.4. Оцінка області притягання розв'язку за допомогою власних векторів матриці першого наближення .....	208
4.5. Висновки до розділу 4.....	217
4.6. Список використаних джерел до розділу 4 .....	217
<b>РОЗДІЛ 5 РОЗЩЕПЛЕННЯ РІВНЯНЬ ОБУРЕНОГО РУХУ РЕЙКОВИХ ЕКІПАЖІВ.....</b>	<b>220</b>
5.1. Декомпозиція рівнянь руху чотиривісного вагона з подвійним ресорним підвісом.....	222
5.2. Поділ на підсистеми рівнянь обуреного руху восьмивісного вагона з несиметричним завантаженням .....	227
5.3. Вибір узагальнених координат локомотива із трьома візками з урахуванням симетрії його розрахункової схеми .....	230
5.4. Аналіз форм коливань восьмивісної цистерни .....	235
5.5. Оптимізація параметрів електровоза ВЛ-80 з погляду стійкості руху .....	238
5.6. Висновки до розділу 5.....	239
5.7. Список використаних джерел до розділу 5 .....	240
<b>РОЗДІЛ 6 РОЗЩЕПЛЕННЯ РІВНЯНЬ РУХУ СИСТЕМИ ВИСОКОШВИДКІСНОГО ТРАНСПОРТУ НА ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПІДВІШУВАННІ .....</b>	<b>244</b>
6.1. Поїзд на магнітнім підвішуванні .....	244
6.2. Розщеплення рівнянь руху екіпажа на електромагнітнім підвішуванні .....	246



	17
6.3. Дослідження форм коливань шляхової структури ВШНТ .....	251
6.4. Висновки до розділу 6.....	260
6.5. Список використаних джерел до розділу 6 .....	260
<b>РОЗДІЛ 7 АНАЛІЗ МАТРИЧНИХ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДІВ ДЕКОМПОЗИЦІЇ .....</b>	<b>262</b>
7.1. Аналіз матричних моделей вартісного балансу за допомогою власних векторів матриці повних витрат.....	262
7.2. Найкращий поділ на блоки матричних макроекономічних моделей... ..	265
7.3. Висновки до розділу 7.....	270
7.4. Список використаних джерел до розділу 7 .....	270
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>272</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>	<b>274</b>
<b>ДОДАТОК А. ПРОГРАМА ЗНАХОДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ ВЕЛИКОЇ СИЛЬНО РОЗРІДЖЕНОЇ МАТРИЦІ КОЕФІЦІЄНТІВ.....</b>	<b>294</b>
A.1. Автори програми .....	294
A.2. Призначення програми .....	294
A.3. Підготовка вихідних даних.....	295
A.4. Приклади .....	295
A.5. Використання програми.....	297
A.6. Текст програми SLAU5.PRG .....	298
A.7. Текст підпрограми ex2.prg.....	307
A.8. Література.....	309
<b>ДОДАТОК Б. ПРОГРАМА ЗНАХОДЖЕННЯ МНОЖИНИ МАТРИЦЬ, КОМУТЮЮЧИХ З ДАНИМИ МАТРИЦЯМИ (ВИПАДОК ВЕЛИКИХ МАТРИЦЬ).....</b>	<b>310</b>
<b>ДОДАТОК В. ПРОГРАМА ЗНАХОДЖЕННЯ ІНВАРІАНТНИХ ПІДПРОСТОРІВ ГРУПИ СИМЕТРІЇ.....</b>	<b>325</b>

<b>ДОДАТОК Г. ПРОГРАМА ЗВЕДЕННЯ МАТРИЦЬ ДО КЛІТИННО-ТРИКУТНОГО ВИГЛЯДУ .....</b>	<b>333</b>
<b>ДОДАТОК Д. АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ.....</b>	<b>357</b>

## СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$R$	— множина дійсних чисел
$C$	— множина комплексних чисел
$R^n$	— множина $n$ -мірних резових векторів-стовпців
$C^n$	— множина $n$ -мірних комплексних векторів-стовпців
$\in$	— "належить"
$\subset$	— є підмножиною
$\Rightarrow$	— "тягне за собою" (запис $A \Rightarrow B$ означає, що з твердження $A$ випливає твердження $B$ )
$\exists$	— "існують"
$\forall$	— "при кожному"
$T$	— знак транспонування матриці
$\text{diag } a_j$	— діагональна матриця, на головній діагоналі якої стоять числа $a_j$
$\text{diag } A_j$	— блочно-діагональна матриця, на головній діагоналі якої стоять блоки $A_j$
$v(A)$	— матриця, стовпцями якої є вектори канонічного базису (власні і приєднані вектори) матриці $A$
$\text{Gr}(A)$	— жорданова форма матриці $A$
$\lambda_j$	— власні числа матриці
$\Lambda(B_j)$	— множина всіх матриць, які комутують з матрицями $B_j$
$E_m$	— одинична матриця порядку $m$
$g_j$	— перетворення симетрії
$T(g_j)$	— матриці зображення групи симетрії
$q$	— вектор початкових узагальнених координат
$x, y$	— вектор нових узагальнених координат
$U$	— вектор фазових координат
$S$	— матриця перетворення змінних (іноді цієї ж буквою позначається і саме перетворення)
$j = \overline{1, n}$	— $j$ приймає значення від 1 до $n$

- $\dot{\times}$  — знак прямого добутку матриць
- $\tilde{A}$  — результат перетворення подібності:  $\tilde{A} = S^{-1}AS$
- $\hat{A}$  — результат перетворення:  $\hat{A} = HAS$
- — кінець доведення (або його відсутність)
- span(.) — лінійна оболонка

## ВСТУП

**Актуальність теми.** При розв'язанні широкого класу технічних й економічних задач корисно виконувати декомпозицію відповідних систем рівнянь. Наприклад, у практиці теорії коливань, будівельної механіки й у теоретичній фізиці накопичено великий досвід вибору невідомих таким чином, щоб одержати рівняння, розділені на підсистеми. Часто цей вибір робиться на інтуїтивному рівні. Спеціальні методи декомпозиції розвивалися окремо за декількома напрямками. Підхід, що погоджує локальні напрямки, раніше не розглядався.

Методи декомпозиції застосовуються для знаходження перетворення змінних, що приводить систему рівнянь до незалежних підсистем меншого порядку, або для доведення того факту, що в розглянутому випадку таке розбиття є неможливим. Можливість декомпозиції системи рівнянь дозволяє не тільки полегшити аналіз та синтез системи, але й зробити якісні висновки про властивості досліджуваної системи. Чисельне розв'язання задачі декомпозиції часто дає можливість виявлення прихованої симетрії системи. Інформація щодо симетрії системи може використовуватися, наприклад, при класифікації систем, при виявленні аналогів серед систем іншої природи.

На сьогодні з'явилася необхідність використовувати також «ієрархічну декомпозицію», тобто зведення матриць коефіцієнтів до блочно-трикутного вигляду. При цьому виходить, що перша з підсистем не містить «чужих» змінних. До наступної підсистеми ввійдуть «свої» змінні і змінні попередньої підсистеми і т. і. Ієрархічна декомпозиція є особливо корисною тоді, коли звичайна декомпозиція не дозволяє одержати бажаного ефекту.

В Інституті технічної механіки НАН України роботи з декомпозиції було почато ще в другій половині 60-х років з ініціативи академіка НАН України В. А. Лазаряна. Напрямок досліджень в основному було

продиктовано необхідністю роботи з несиметричними матрицями коефіцієнтів, обумовленими наявністю істотно неконсервативних сил.

Необхідним є поширення методів декомпозиції (в тому числі ієрархічної) на широкий клас систем: механічні системи зі складною структурою сил, електромеханічні, керовані, економічні й інші системи, а також використання цих методів для спрощення задач напівозначеного програмування.

Тому створення універсальних й ефективних методів декомпозиції матричних математичних моделей є актуальним як для теорії, так і для практики аналізу та синтезу складних систем і, зокрема, для дослідження стійкості руху моделей направляваних транспортних засобів.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Тема дисертаційного дослідження пов'язана з науковими темами Придніпровської державної академії будівництва й архітектури «Удосконалення фінансово-економічних й організаційних підходів і методів аналізу діяльності та управління розвитком виробничо-господарських і комерційно-посередницьких підприємств» (державний реєстраційний номер 0105U005298), «Підвищення ефективності діяльності підприємств на основі вдосконалення методів фінансово-економічної діагностики, контролінгу, логістики та менеджменту» (0106U002029), «Вдосконалення методів управління господарською та фінансово-економічною діяльністю підприємства в сучасних умовах функціонування економіки України» (0111U006482) і «Моделі, методи та інформаційні технології дослідження процесів і систем у будівництві» (0114U000527). У цих темах автор дисертації є виконавцем.

**Мета і задачі дослідження.** Метою дослідження є створення універсальних й ефективних методів декомпозиції матричних математичних моделей та розробка обчислювальних алгоритмів їх реалізації. Розв'язок цієї

наукової проблеми має важливе теоретичне і прикладне значення для математичного моделювання складних систем.

Для досягнення поставленої мети було сформульовано такі задачі.

- Виконати теоретичне узагальнення вітчизняних і закордонних досліджень у даній області й на цій основі розробити комплексний підхід до створення методів декомпозиції матричних математичних моделей.
- Розробити теоретичні основи й обчислювальні методи для найкращої декомпозиції систем із декількома матрицями коефіцієнтів шляхом зведення матриць до блочно-діагонального вигляду з максимально можливою кількістю блоків.
- Розробити метод ієрархічної декомпозиції, заснований на зведенні матриць до блочно-трикутного вигляду.
- Розробити спосіб виявлення систем, близьких до розщеплюваних систем.
- Розробити обчислювальні алгоритми й комп'ютерні програми реалізації методів декомпозиції.
- Застосувати розроблені алгоритми для практичного розв'язання технічних й економічних задач.

*Об'єктом дослідження* є матричні математичні моделі складних систем.

*Предметом дослідження* є методи декомпозиції систем лінійних рівнянь великої розмірності й відповідні обчислювальні алгоритми.

*Методи дослідження.* Загальною методологічною основою дослідження є лінійна й загальна алгебра, обчислювальні методи лінійної алгебри, практика використання сучасної обчислювальної техніки.

**Наукова новизна отриманих результатів.** Представлені в дисертації теоретичні узагальнення, наукові положення й методи розвивають теорію моделювання систем, які описуються відповідною сукупністю підсистем.

Основні положення, що виносяться на захист є такі:

*вперше:*

- широке коло задач декомпозиції зведено до задачі про знаходження перетворення подібності допоміжних квадратних матриць, що дозволяє розглядати різні задачі декомпозиції з єдиних позицій;
- сформульовано й доведено теорему єдиності розв'язку задачі декомпозиції;
- розроблено спосіб виявлення систем, близьких до розщеплюваних;
- отримано необхідні й достатні умови існування перетворення подібності, що приводить одночасно кілька матриць до блочно-трикутного вигляду; розроблено алгоритм обчислення матриці цього перетворення; таким чином, вирішено задачу про найкращу ієрархічну декомпозицію системи рівнянь;

*удосконалено:*

- методи оцінки області притягання розв'язку;
- методи спрощення задач напівозначеного програмування;

*набули подальшого розвитку:*

- методи декомпозиції рівнянь з прямокутними матрицями коефіцієнтів;; розглянуті різні окремі випадки підсистем «нестандартного» вигляду;
- результати з декомпозиції рівнянь руху складних механічних, електромеханічних систем, а також із декомпозиції матричних моделей міжгалузевого балансу.

**Практичне значення отриманих результатів.** Отримані результати дають можливість:

1. Розробляти обчислювальні алгоритми, що мають більшу точність розрахунків, більш високу швидкодію.
2. Аналізувати глибинні структурні взаємозв'язки досліджуваних систем й ефективніше використовувати інженерну інтуїцію, без якої є неможливим процес проектування систем.



3. Використовувати методи паралельних обчислень.
4. Скоротити час розрахунків у випадках застосування ітераційних методів, що вимагають багаторазового повторення обчислень.
5. Збільшити швидкодію в задачах, де час обчислення є критичним, наприклад, при керуванні системою.

Практичне значення складають комп'ютерні програми, що дозволяють виконувати спрощення складних математичних моделей технічних і економічних систем, а також результати розрахунків. Використання результатів дисертації підтверджено актами впровадження Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна та ДВНЗ «Придніпровська академія будівництва та архітектури».

**Особистий внесок автора.** Всі основні теоретичні результати отримано автором самостійно. У працях, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать наступні результати: [2, 42] – аналіз форм коливань системи, виведення формули для виконання кроку уздовж «яру»; [5, 8, 11] – аналіз форм коливань системи, участь у виконанні розрахунків; [9] – уточнення математичної моделі системи, участь у виконанні розрахунків; [14] – постановка завдання, участь у розробці прикладів, аналіз результатів; [20] – постановка завдання, участь у виконанні дослідження; [22, 24] – участь у виконанні дослідження; [30] – ідея методу; [31] – загальна схема алгоритму; [32-34, 45] – метод розрахунків; [46] – розділи 3 і 4.

**Апробація результатів дослідження.** Основні результати дисертації доповідалися на VIII Всесоюзній нараді із проблем керування (Таллінн — 1980), на міжнародних конференціях з механіки залізничного транспорту (Дніпропетровськ — 1984, 1988, 1992, 1996, 2000), на конференції «Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь» (Дрогобич — 1987), на XIX Всесоюзній алгебраїчній конференції (Львів — 1987), на міжнародній конференції з математичного моделювання (Херсон — 1998), на міжнародній

конференції «XXI сторіччя — проблеми й перспективи освоєння родовищ корисних копалин» (Дніпропетровськ — 1998), на міжнародній конференції «Проблеми та перспективи розвитку економіки України в умовах ринкової трансформації» (Дніпропетровськ — 1999), на міжнародному симпозиумі «Метод дискретних особливостей у задачах математичної фізики» (Коктебель — 1999), на міждержавних конференціях «Комп'ютерне моделювання» (Дніпродзержинськ — 2001, 2002), на міжнародних конференціях Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Київ — 2003, 2005, 2007), на засіданнях IX і X Кримських міжнародних математичних шкіл «Метод функцій Ляпунова і його застосування» (Алушта — 2008, 2010), на 7-й міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Харків — 2009), на Українському математичному конгресі (Київ — 2009), на Міжнародній конференції «Моделювання, управління і стійкість (MCS-2012)» (Севастополь — 2012), на 15-й Міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука (Київ — 2014), 13-й Міжнародній науково-практичній конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (Дніпропетровськ — 2015), на регіональному науковому семінарі «Сучасні технології в проектуванні» (Дніпропетровськ — 2016), на наукових семінарах Харківського, Дніпропетровського, Санкт-Петербурзького й Московського університетів, на дніпропетровських міських семінарах: «Семінар із загальної механіки», «Геометричні питання аналізу», «Економіко-математичне моделювання», «Проблеми управління й інформатики», «Проблеми нелінійної механіки».

**Публікації.** Результати дисертаційної роботи викладено в 46 наукових роботах. У тому числі у 24-х роботах [1-24] (серед яких 1 монографія [1]), опублікованих у наукових виданнях України до травня 1997 року [1-11] або включених у Перелік фахових видань України [12-24]. Серед цих робіт 2 роботи [15, 16] опубліковано у виданнях іноземних держав, 2 роботи [22, 23] — у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз і

перекладаються англійською мовою видавництвами "Springer" та "Begell House, Inc.". 5 робіт [1, 4, 18, 19, 24] включені до інших міжнародних наукометричних баз.

17 робіт [25-41] опубліковано в матеріалах міжнародних наукових конференцій.

## РОЗДІЛ 1

### АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД СТАНУ ПИТАННЯ ПРО ДЕКОМПОЗИЦІЮ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

#### 1.1. Огляд традиційних методів розрахунків симетричних систем у будівельній механіці й теорії коливань

У теорії коливань і будівельній механіці накопичено певний досвід вибору невідомих у такий спосіб, щоб одержати рівняння, розділені на підсистеми. Це в деяких випадках виділення рівнянь, що описують рух центру мас системи, або відділення одних від інших рівнянь, що описують симетричні й кососиметричні щодо деяких осей, центрів або площин форми коливань. При розрахунках статично невизначених систем часто використовують такі основні системи, при яких з'являються ортогональні один одному симетричні й кососиметричні епюри. Знайти вдалий варіант вибору невідомих або перетворення невідомих нерідко допомагають уміло складені розрахункові схеми й перетворення розрахункових схем відповідно до відділення деяких видів коливань.

Зрозуміло, що в загальному випадку знайти «найкращі» варіанти вибору невідомих, використовуючи лише найпростіші прийоми, неможливо. Але ці прийоми треба завжди мати «на озброєнні». Розглянемо їх застосування на найпростішому прикладі.

**Приклад 1.1.** Розглянемо коливальну систему (рис. 1.1), що складається із двох тіл, які мають можливість переміщатися уздовж осі  $Ox$ . Тіла з'єднані пружиною.

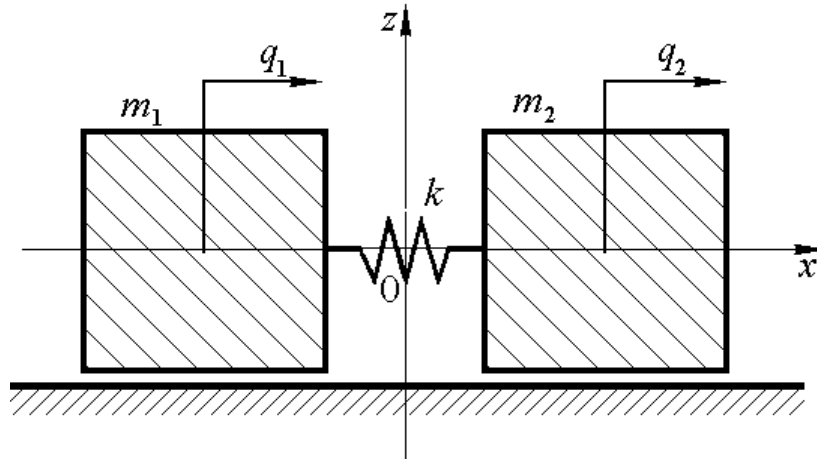


Рис. 1.1. Приклад коливальної системи

Складемо рівняння руху цієї системи. Кінетична  $T$  й потенційна  $\Pi$  енергії мають відповідно такі вирази:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2), \quad \Pi = \frac{k}{2} (q_1 - q_2)^2,$$

де  $q_1$  і  $q_2$  — переміщення першого і другого тіла;  $m_1$  і  $m_2$  — маси тіл;  $k$  — твердість пружини. На підставі рівнянь Лагранжа II роду одержуємо:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + kq_1 - kq_2 = 0; \\ m_2 \ddot{q}_2 - kq_1 + kq_2 = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Зрозуміло, що рух системи буде складатися з руху центру мас і коливань тіл щодо цього центру. При  $m_1 = m_2 = m$  таким рухам відповідають узагальнені координати:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} (q_1 + q_2); \\ x_2 &= \frac{1}{2} (q_1 - q_2). \end{aligned}$$

Дійсно, при цих узагальнених координатах одержуємо два окремі рівняння:

$$\begin{aligned}m \ddot{x}_1 &= 0; \\m \ddot{x}_2 + 2 k x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Цей приклад ілюструє прийом відділення такого рівняння, що описує рух центру мас системи. Такий результат можна одержати не лише з інтуїтивних міркувань, а й, наприклад, зведенням рівнянь (1.1) до головних координат. Нижче буде показано й інші формальні способи розщеплення рівнянь (1.1).

Елементарні прийоми розщеплення систем рівнянь широко застосовуються в будівельній механіці. Цим питанням присвячена ціла глава в книзі І. М. Рабиновича [68]. Аналогічні прийоми розглядаються також у книгах із механіки (підручник В. Л. Бідермана [14], § 13 і § 68), електротехніці й теорії коливань (див. лекції Л. І. Мандельштама [54], двадцять дев'ята лекція). Ряд робіт, що використовують елементарні прийоми розщеплення рівнянь для задач теорії керування, згадується в статті К. Д. Якубович [90]. У цій же роботі містяться результати, наслідком яких є «метод комутуючої матриці» (див. 1.5).

Для двох матриць другого порядку задача зведення їх до найпростішого вигляду повністю вирішена в роботі Крилова Б. Л. [43].

## **1.2. Точна й наближена декомпозиція**

Слово «декомпозиція» означає розклад (розбивку, розшарування) початкового об'єкта на більш прості об'єкти, як правило, тієї ж природи, що

й початковий, причому сукупність цих більш простих об'єктів є еквівалентною початковому об'єкту [61, 62]. Точно еквівалентною, якщо мова йде про точну декомпозицію, і приблизно еквівалентною, якщо мова йде про наближену декомпозицію. У даному підрозділі перелічено різні значення цього терміна. Природно, отримана класифікація [5] не претендує на абсолютну повноту.

Перш за все відокремимо задачі декомпозиції рівнянь від інших підходів, які можна трактувати як деталізацію (уточнення) блок-схеми, діаграми або розрахункової схеми. Наприклад, у теорії автоматичного керування передаточна функція ланки зі зворотним зв'язком дорівнює  $S / (1 - RS)$ , де  $S$  і  $R$  — передаточні функції відповідно прямої і зворотної ланки. У цьому випадку декомпозиція — це перехід від блоку, зображеного на рис. 1.2.а), до схеми, зображеної на рис. 1.2.б).



Рис. 1.2. Приклад декомпозиції як уточнення розрахункової схеми

Таке використання терміна є характерним для теорії систем, системного аналізу й теорії баз даних. Так, в [40] (глава 8) розглядається декомпозиція скінченного автомату, що приводить до зображення його у вигляді схеми з більш простих елементів. У теорії баз даних декомпозиція означає поділ відповідної діаграми на частини (див. [32], розділ 3).

Декомпозиція системи рівнянь — розбивка системи рівнянь на декілька більш простих підсистем. Така декомпозиція може бути наближеною або точною (рис. 1.3).

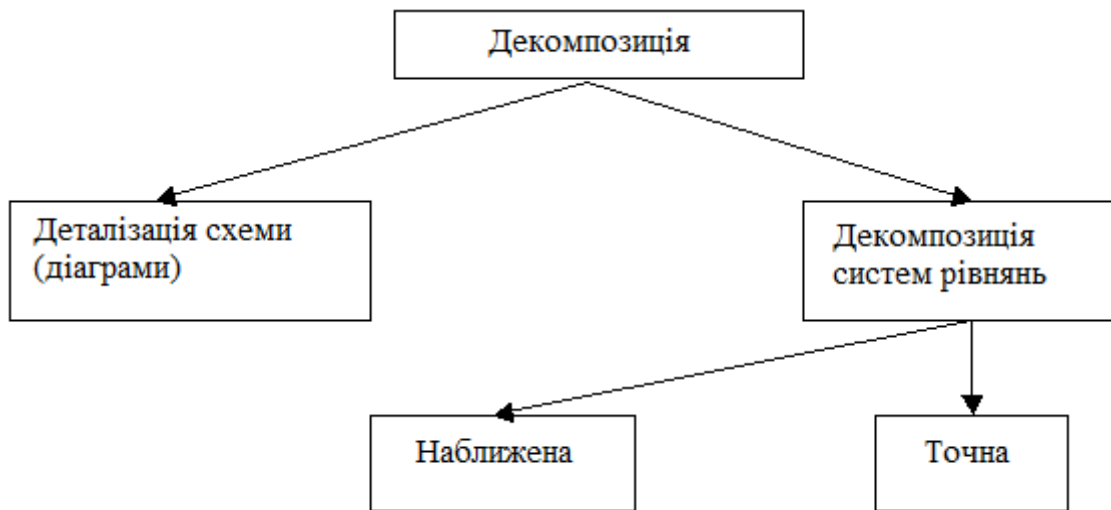


Рис. 1.3. Різні значення терміна «декомпозиція»

Для наближеної декомпозиції є кілька підходів (рис. 1.4)

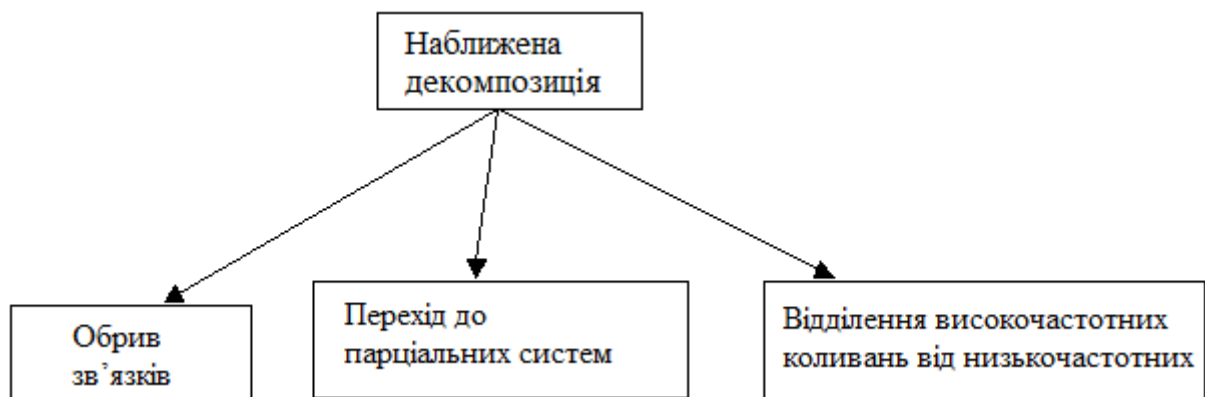


Рис. 1.4. Основні напрямки наближеної декомпозиції

Розглянемо їх детальніше.

*Обрив зв'язків* — обриваються ті зв'язки, які вважаються малими й, на нашу думку, мало впливають на результат. Слід звернути увагу на те, що маленький коефіцієнт зв'язку не завжди означає слабкий зв'язок. Наприклад, якщо 1-а підсистема діє на 2-у з частотою, яка збігається із власною частотою 2-ї підсистеми, то навіть «маленький» зв'язок не запобіжить великих



коливань в 2-й системі. Тому крім поняття «малий зв'язок» використовують ще поняття «мала зв'язаність» [54, 75].

*Парціальні системи:* це такі системи з одним ступенем вільності, які виходять із системи із двома ступенями вільності при «закріпленні» однієї з координат [54]. У випадку розгляду електричної системи, де змінними є струми у вітках схеми, парціальні системи виходять при почерговому обриві віток. У деяких випадках парціальні системи приблизно описують початкову систему. Тут також треба розрізняти величини коефіцієнтів зв'язку і зв'язаності.

Коефіцієнти слабких зв'язків і зв'язаності, введені для двомасових систем, було узагальнено на випадок  $n$ -мірних систем у роботі Л. Я. Банах [11].

*Відділення високочастотних коливань від низькочастотних.* Іншими словами — це розщеплення на швидкі й повільні рухи. Є сенс розглядати окремо одні від інших і в різних випадках складати різні системи рівнянь. Фактично вони є підсистемами великої системи, що враховує й те, й інше. Наприклад, підвішений шматок рейки. Якщо його розгойдувати — це повільні рухи, а якщо вдарити молотком, то він задзвенить — це швидкі рухи.

Декомпозиції (редукції) нелінійних систем присвячено величезне число публікацій, у тому числі монографії співробітників ОЦ РАН [36, 62]. Інститутом математики НАНУ проводилися дуже представницькі конференції *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics* із симетрійного аналізу нелінійних систем [97]. У даній роботі декомпозиція нелінійних систем не розглядається.

Розглянемо методи точної декомпозиції (рис. 1.5).

Існують методи зведення великої системи рівнянь до окремих підсистем рівнянь для блоків аналізованої системи й додаткової координуючої системи рівнянь, відповідної зв'язкам між блоками.

Г. Крон [89, 42] назвав такий підхід «*діакопτικοю*». Аналогічний підхід використано в задачах лінійного програмування — декомпозиція Данцига — Вульфа (див. [51]). Дослідження стійкості розв'язків розділених у такий спосіб диференціальних рівнянь було розглянуто в [29, 100]. Методи Г. Крона розвиває в теперішній час Е. В. Сметанин [73, 74].

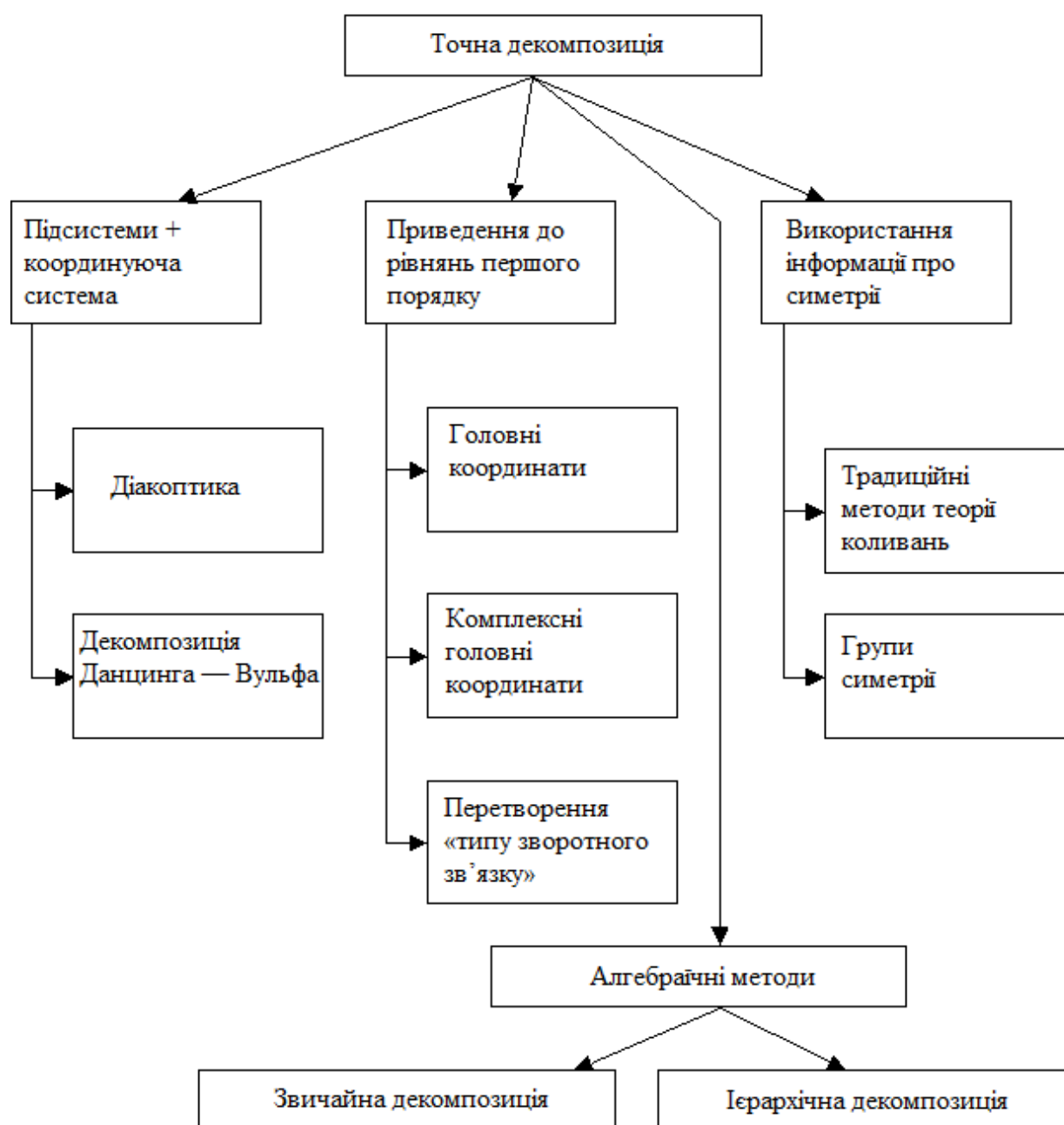


Рис. 1.5. Методи точної декомпозиції

Слід помітити, що можливість розбити рівняння на підсистеми, відповідні до блоків аналізованої системи, є не у всіх задачах. При аналізі власних коливань великої механічної або електричної системи неможливо вибирати довільні підсистеми рівнянь. Це впливає з того, що такий аналіз вимагає розв'язання алгебраїчного рівняння (або знаходження власних чисел матриці). Якби ми могли у довільний спосіб знижувати порядок будь-якої системи рівнянь, то це означало б, що можна за скінченне число кроків розв'язати будь-яке алгебраїчне рівняння, що суперечить теоремі Абеля. Далі розглянуто методи декомпозиції, що дають позитивний результат лише у випадку, коли властивості даної системи такі, що є можливою декомпозиція відповідних рівнянь.

Рівняння механічних або електричних коливань можуть бути записані у вигляді

$$B_1\ddot{x} + B_2\dot{x} + B_3x = 0, \quad (1.2)$$

де  $x \in R^n$ ;  $B_i$  — квадратні дійсні матриці. Такі рівняння приводяться до звичайних *головних координат* [54, 75] у випадку, коли дві з матриць  $B_i$  симетричні, причому одна з них позитивно визначена, а третя є лінійною комбінацією перших двох. При розв'язанні прикладних задач зведення до головних координат, як правило, не виконується, але сам факт існування головних координат є важливою інформацією щодо поведінки системи.

У випадку, коли рівняння не приводяться до звичайних головних координат, їх можна звести до «головних фазових координат». Спочатку приведемо рівняння (1.2) до системи рівнянь першого порядку:

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in R^m. \quad (1.3)$$

Якщо  $A$  — матриця простої структури, то рівняння (1.3) через заміну змінних  $\mathbf{u} = S\mathbf{p}$  приводяться до окремих рівнянь першого порядку

$$\dot{p}_k = \lambda_k p_k, \quad k = \overline{1, m}. \quad (1.4)$$

Тут  $S$  — матриця, стовпцями якої є власні вектори матриці  $A$ ,  $\{\lambda_k\}$  — власні числа матриці  $A$ . Слід помітити, що при розв'язанні технічних задач у переважній більшості випадків матриця  $A$  є матрицею простої структури.

Змінні  $p_k$  називають *головними* (власними, нормальними) *фазовими координатами*. Розв'язки  $u_k = c_k e^{\lambda_k t}$  рівнянь (1.4) — це *головні коливання* (*головні рухи*) досліджуваної системи.

Головні фазові координати, як правило, комплексні. Тому для розрахунків іноді використовують перехід до окремих підсистем другого порядку з дійсними коефіцієнтами і змінними.

Рівняння, що описують еволюцію системи автоматичного керування, мають вигляд:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u},$$

де  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$  — вектор змінних;  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}$  — вектор керування. За виконанням

певних умов [98, 103, 109] ці рівняння можуть бути приведені до окремих рівнянь першого порядку за допомогою *перетворення «типу зворотного зв'язку»*, тобто перетворення, при якому використовується спільне перетворення змінних і керувань.

Симетрія фізичної системи проявляється в тому, що існують перетворення  $g_i$  простору, щодо яких система, а отже, і її математична

модель, інваріантні (незмінні). До таких перетворень відносяться відбиття фізичної системи щодо площин симетрії, повороти навколо осей симетрії тощо.

*Елементарні прийоми* розщеплення рівнянь, що описують симетричні системи, широко застосовуються в механіці, електротехніці й теорії коливань (див. 1.1).

Коли перетворень симетрії  $g_i$  багато, зручніше використовувати всі їх разом за допомогою теорії груп (див. підрозділ 1.4).

Є вже столітній досвід застосування груп симетрії в теоретичній фізиці. Дуже ефективними є ці методи при аналізі коливань молекул і кристалів.

*Алгебраїчні методи декомпозиції* (див. підрозділ 1.6) дозволяють або звести дану систему рівнянь до декількох підсистем, або встановити, що при обраному класі перетворень таке зведення є неможливим. Для тих систем рівнянь, для яких така декомпозиція є можливою, існує інваріантне стосовно даної системи перетворення змінних [3, § 6.5]. Тому алгебраїчні методи декомпозиції часто дають можливість виявлення схованої симетрії досліджуваної системи.

Декомпозиція рівнянь на незалежні підсистеми означає зведення матриць коефіцієнтів до блочно-діагонального вигляду за допомогою заміни змінних. На відміну від звичайної декомпозиції, зведення матриць до блочно-трикутного вигляду відповідає *ієрархічній декомпозиції* [61, 62]. Раніше використовувалися також терміни «вертикальна», «послідовна декомпозиція», «агрегування». За термінологією, використовуваної в [36] для нелінійних систем, ієрархічна декомпозиція — це «редукція за допомогою факторизації».

При ієрархічній декомпозиції перша з підсистем не містить «чужих» змінних, у дальшу підсистему крім «своїх» змінних увійдуть змінні попередньої підсистеми і т. і. Число таких підсистем може бути більшим, ніж при звичайній декомпозиції.

Як ми бачимо, слово «декомпозиція» має дуже широке коло застосування (див. [30, 36, 63]).

### **1.3. Огляд літературних джерел із чисельних методів знаходження загального розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь і застосування головних фазових координат**

Ряд прикладних задач приводить до необхідності знаходження загального розв'язку системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь. У цьому випадку потрібно знайти базис у просторі розв'язків. Нерідко такі системи рівнянь мають високий порядок. При роботі з системами рівнянь великого порядку потрібно забезпечити з одного боку зберігання й ефективне використання великого обсягу даних, а з іншого — уникнути нагромадження похибок у процесі обчислень. У бібліотеках «стандартних» програм із лінійної алгебри, як правило, присутні програми розв'язання систем алгебраїчних рівнянь для випадку, коли система має рівно один розв'язок. Є чимало програм і для знаходження псевдорозв'язку у випадку, коли немає жодного розв'язку. Але майже немає програм для систем, що мають багато розв'язків, особливо у випадку великих розріджених систем. Універсальні алгоритми *svd* і *minfit* знаходження загального розв'язку систем лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь наведено в книзі Уілкінсона й Райнша [80, с. 130]. Спеціалізованого алгоритму для знаходження загального розв'язку систем лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь у випадку великої сильно розрідженої матриці коефіцієнтів очевидно раніше не було.

Зазвичай рекомендують для підвищення точності вибирати у якості провідного елемента максимальний за абсолютною величиною елемент матриці або її частини, що залишилась. Іноді зручніше вибирати максимальний елемент стовпця або рядка. Інший спосіб вибору провідного

елемента при обчисленнях з розрідженими матрицями запропоновано у роботі [44].

Існує багато літератури за обчисленнями із розрідженими матрицями (див. [67, 76, 89]). Там обговорюються методи впакування і зберігання даних, аналогічні тим, що використовуються в даній роботі, але стратегія одержання результатів — інша.

Головні фазові координати розглянуто в підручнику С. П. Стрелкова [75]. Зведення до таких координат в окремому випадку розглянув ще в 1929 р. П. Ф. Папкович [65]. Один з варіантів дійсних головних фазових координат викладено у книзі Б. В. Булгакова [19]. У роботах В. А. Лазаряна [46, 47] і книзі [31] головні фазові координати використовуються в задачах дослідження стійкості руху багатомасових систем.

#### **1.4. Аналіз теорії і практики застосування зображень скінченних груп**

Апарат теорії скінченних груп вже давно застосовується у квантовій механіці (див. Вигнер [22], Л. Д. Ландау й Е. М. Лівшиць [49], а також Г. Я. Любарський [52, 53], М. І. Петрашень і Є. Д. Трифонов [66] і списки літератури в цих книгах). Згодом цей апарат став широко використовуватися також і в теорії атома, теорії твердого тіла, обладнаннях надвисоких частот, спектроскопії, квантовій хімії й інших розділах фізики й хімії (див., наприклад, А. Б. Ройцин [69], Серр [72], Кохен, Кан [95], Н. К. Морозова й В. П. Морозов [58]).

З 1969 р. з'являються роботи щодо застосування методів теорії скінченних груп у технічних задачах: А. І. Кухтенко [45], В. В. Удилов [78], М. Е. Шайкин [86], Ю. І. Самійленко [71], Ю. М. Базилевич [10]. Ці методи застосовуються не тільки до об'єктів, що описуються системами звичайних

диференціальних рівнянь, а й до стрижневих систем, для яких задача статички описується алгебраїчними рівняннями, а динаміки — рівняннями в частинних похідних (В. В. Удилов, Г. Т. Ковбаса [77], В. М. Фомін [82]). З'явилися роботи із застосування теорії скінченних груп до нелінійних задач (В. І. Фушич [83], С. А. Владимиров [23], Л. І. Маневич, М. А. Пінський [55], В. І. Йолкін [36]). Системи автоматичного керування описуються рівняннями, що містять квадратні і прямокутні матриці. Тому в роботі Г. В. Можяєва [57] дано узагальнення теореми Вігнера на випадок прямокутних матриць. У роботі О. А. Дишліса й ін. [35] зазначено на можливість складання групи матриць зображень й обчислення проекторів на інваріантні підпростори за допомогою ЕОМ. Ряд методів і програмних комплексів для розрахунків на ЕОМ симетричних конструкцій описано у книзі І. І. Буришкіна й В. Н. Гордєєва [20] (див. також Злокович [37]).

Існує ряд оглядів робіт із застосування дискретних і безперервних груп у теорії керування й у механіці (Ю. Н. Андрєєв [1], А. А. Богоявленський і ін. [15], В. М. Павлов [60], Ю. М. Павловський [64]).

У теперішній час є великий обсяг літератури з застосування зображень дискретних груп у задачах фізики. Деякі з найбільш відомих книг з цієї теми зазначено в списку літератури до першого розділу книги Р. А. Еварестова [151]. Слід зазначити також двотомник Елліота й Добера [88].

### 1.5. Метод комутуючої матриці

Найпростішим з алгебраїчних методів декомпозиції є метод комутуючої матриці. Сформулюємо основне твердження у вигляді теореми.

**Теорема 1.1.** *Нехай матриця  $Z$  комутує з матрицями  $B_i$  і має хоча б два різні власні числа. Тоді перетворення подібності  $\tilde{B}_i = S^{-1}B_iS$ , де  $S$  —*



матриця, стовпцями якої є вектори канонічного базису матриці  $Z$ , приведе матриці  $B_i$  до блочно-діагонального вигляду.

Обґрунтуванням цього є теорема 3 глави VIII монографії Ф. Р. Гантмахера [24] (див. також [50, 90]).■

Тут і далі символ «■» означає кінець доведення або його відсутність.

Теорема 1.1 указує шляхи знаходження перетворення подібності для матриць коефіцієнтів рівнянь руху досліджуваної системи, тобто знаходження матриці заміни змінних. Необхідна для цього матриця  $Z$ , комутуюча з матрицями коефіцієнтів, може бути знайдена як з фізичних міркувань (якщо відома інформація щодо симетрії розрахункової схеми), так і розрахунковим шляхом.

Якщо система має яку-небудь симетрію, то це означає, що після деякого (нетривіального) лінійного перетворення змінних нова система збігається з початковою системою. У таких випадках будемо говорити, що система є *інваріантною* щодо відповідного перетворення симетрії. Далі відзначено, що для розщеплення важливими є властивості симетрії самої системи, а не діючого на неї навантаження.

Нехай у рівняннях, складених для дослідження деякої системи, невідомими є величини  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Перетворення цих величин у матричному вигляді можна записати так:

$$\mathbf{y} = Z\mathbf{q}, \quad (1.5)$$

де  $\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n)^T$ ;  $Z$  — матриця перетворення;  $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T$  — вектор нових невідомих.

Розглянемо такі рівняння руху механічної системи:

$$\ddot{\mathbf{q}} + B_2\dot{\mathbf{q}} + B_3\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t), \quad (1.6)$$

де  $B_2$  і  $B_3$  —  $n \times n$ -матриці коефіцієнтів;  $\mathbf{q}$  — вектор узагальнених координат;  $\mathbf{Q}(t)$  — вектор функцій часу, що характеризує дію зовнішніх сил.

До вигляду (1.6) приводяться, зокрема, рівняння руху консервативної коливальної системи  $A\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ . У цьому випадку  $B_2 = 0$ ;  $B_3 = A^{-1}C$ . У такому найпростішому випадку рівняння приводяться відомими методами до звичайних головних координат.

Нехай розрахункова схема, відповідна цим рівнянням, є симетричною, тоді з формули (1.5) одержуємо вираз  $\mathbf{q} = Z^{-1}\mathbf{y}$ . Підставляючи його в (1.6) і множачи знайдену рівність на матрицю  $Z$ , маємо:

$$\ddot{\mathbf{y}} + ZB_2Z^{-1}\dot{\mathbf{y}} + ZB_3Z^{-1}\mathbf{y} = Z\mathbf{Q}(t). \quad (1.7)$$

Ліва частина рівності (1.7) повинна збігатися (з точністю до позначень) з лівою частиною (1.6). Тому  $ZB_iZ^{-1} = B_i$  при  $i = 2, 3$ . Звідси  $ZB_i = B_iZ$ .

Отже, встановлено, що матриці коефіцієнтів рівнянь (1.6) комутують із матрицею перетворення симетрії. Ця властивість є характерною і для ряду інших систем рівнянь, відповідних до фізичних систем із симетричною розрахунковою схемою. Відзначимо, що при заміні змінних  $\mathbf{q} = S\mathbf{y}$  у рівняннях (1.6) матриці змінюються за формулою:

$$\tilde{B}_i = S^{-1}B_iS. \quad (1.8)$$

Перетворення (1.8) називається *перетворенням подібності* матриць  $B_i$ .

**Приклад 1.1 (продовження).** Механічна система, зображена на рис. 1.1, при  $m_1 = m_2 = m$  є симетричною щодо осі  $Oz$ . Це означає, що якщо початкову механічну систему відбити щодо осі  $Oz$ , то нова система буде збігатися з початковою системою. Початкові узагальнені координати при

відбитті щодо осі  $Oz$  перетворюються так:  $y_1 = -q_2$ ;  $y_2 = -q_1$ , або в матричному записі

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}.$$

Тому  $Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ . Матрицю  $Z$  будемо називати матрицею

перетворення симетрії. Вона ж є матрицею, комутуючою з матрицями коефіцієнтів рівнянь руху системи. Власні числа й вектори матриці  $Z$  такі:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Таким чином,  $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ . Це відповідає

заміні координат  $\begin{cases} q_1 = x_1 + x_2; \\ q_2 = x_1 - x_2. \end{cases}$  Зворотне перетворення збігається з

перетворенням, знайденим раніше в прикладі 1.1.

Коли матриці перетворень симетрії є невідомими, можна знайти комутуючу матрицю  $Z$  як розв'язок рівнянь

$$B_i Z = Z B_i. \quad (1.9)$$

У цьому випадку треба скласти систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, невідомими в якій будуть елементи матриці  $Z$ , і знайти загальний розв'язок рівнянь (1.9) — централізатор множини матриць  $\{B_i\}$ .

**Приклад 1.2.** Розглянемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 3q_1 + 2q_2 - q_3 = 0, \\ \ddot{q}_2 + 3q_1 + 3q_2 + 4q_3 = 0, \\ \ddot{q}_3 + 5q_3 + 8q_1 - 2q_2 + 5q_3 = 0. \end{cases}$$

Матриці коефіцієнтів даної системи мають вигляд:

$$B_1 = E, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 32 & 3 & 4 \\ 8 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Для матриць  $B_2$  і  $B_3$  визначена комутуюча матриця  $Z$ . При розв'язанні системи (1.9) було отримано такі рівності для знаходження елементів  $Z_{ij}$  матриці  $Z$ :

$$Z_{12} = 0,0625Z_{21}; \quad Z_{22} = Z_{11}; \quad Z_{33} = Z_{11} - 0,25Z_{21}; \quad Z_{13} = Z_{23} = Z_{31} = Z_{32} = 0.$$

При значеннях вільних невідомих  $Z_{11} = 0,25$ ,  $Z_{21} = 1$  маємо:

$$Z = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,0625 & 0 \\ 1 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Власні числа матриці  $Z$  такі:  $\lambda_1 = 0$ ;  $\lambda_2 = 0$ ;  $\lambda_3 = 0,5$ . Далі отримано власні вектори матриці  $Z$  і побудовано матрицю перетворення:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -0,25 & 0,25 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Через перетворення координат  $\mathbf{q} = S \mathbf{y}$  початкова система приводиться до двох підсистем:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 5\dot{y}_1 + 5y_1 - 4y_2 = 0, \\ \ddot{y}_2 + 4y_1 - 5y_2 = 0; \\ \ddot{y}_3 + 11y_3 = 0. \end{cases}$$

Цей приклад буде використано далі для відпрацювання різних алгоритмів розрахунків.

Обчислювальні алгоритми розв'язання рівнянь (1.9) в разі матриць  $B_i$  високого порядку, а також теоретичні аспекти методу комутуючої матриці і прийоми його поширення на різні класи задач розглянуті в розділі 2.

### **1.6. Огляд літературних джерел з алгебраїчних методів декомпозиції**

Метод комутуючої матриці — це наслідок теорем з роботи К. Д. Якубович [90]. Аналогічний спосіб одночасно було запропоновано О. К. Лопатіним [50]. Трохи інакше використовано комутуючу матрицю в роботі В. В. Удилова [79]. Ще кілька способів декомпозиції запропоновано в книгах Ю. А. Митропольського й О. К. Лопатіна [56, 104]. Слід зазначити, що можливість застосування комутуючої матриці для розщеплення є давно відомою у квантовій механіці (див. підручник Фермі [81], глава 16).

Узагальненням методу комутуючої матриці є теорема 1.2 [90]. Для її викладу введемо такі позначення. Нехай  $v(D)$  — матриця, стовпцями якої є вектори канонічного базису матриці  $D$ , тобто така матриця, що  $v^{-1}(D) D v(D) = \text{Gr}(D)$ , де  $\text{Gr}(D)$  — жорданова форма матриці  $D$ .

Далі нам знадобиться система матричних рівнянь

$$T_1 B_i = B_i T_2, \quad i = \overline{1, g}, \quad (1.10)$$

де  $T_1$  і  $T_2$  — квадратні матриці порядків  $m$  і  $n$  відповідно. Множину лінійно незалежних розв'язків цієї системи може бути отримано через знаходження загального розв'язку відповідної системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, невідомими якої є всі елементи матриць  $T_1$  і  $T_2$ .

Матриці  $T_1$  і  $T_2$  можуть мати загальні власні числа. Пронумеруємо власні числа матриць  $T_1$  і  $T_2$  у такий спосіб: спочатку співпадаючі власні числа, потім усі інші. Серед розв'язків рівнянь (1.10) завжди є присутньою множина  $T_1 = \alpha E_m$ ,  $T_2 = \alpha E_n$ , де  $E_k$  — одинична матриця порядку  $k$ ;  $\alpha$  — довільне число.

Нехай  $\sigma(T_i)$  — множина всіх різних власних чисел матриці  $T_i$  і  $\sigma_0(T_1, T_2) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$ .

**Теорема 1.2.** *Нехай  $T_1, T_2$  — розв'язок рівнянь (1.10) і  $H = v^{-1}(T_1)$ ,  $S = v(T_2)$ . Тоді якщо множина  $\sigma_0(T_1, T_2)$  має більш одного елемента, то перетворення*

$$\hat{B}_i = HB_iS, \quad i = \overline{1, g} \quad (1.11)$$

матриць  $B_i$  приводить їх до такого вигляду:

$$\hat{B}_i = \left[ \begin{array}{cccc|c} B_{i1} & & & 0 & 0 \\ & B_{i2} & & & 0 \\ & & \ddots & & \cdots \\ 0 & & & B_{id-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline n_1 & n_2 & \cdots & n_{d-1} & n_d \end{array} \right] \begin{array}{l} m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ m_{d-1} \\ m_d \end{array} \quad (1.12)$$

Тут  $n_k \times m_k$  — розмірності блоків матриці,  $d-1$  — кількість співпадаючих власних чисел матриць  $T_1$  і  $T_2$ ;  $\{n_i\}$  (при  $i < d$ ) — кратності власних чисел матриці  $T_1$ , а  $\{m_i\}$  — матриці  $T_2$ , число  $n_d$  дорівнює сумі

кратностей усіх власних чисел матриці  $T_1$ , що не збігаються з жодним із власних чисел матриці  $T_2$ ,  $m_d$  — сумі кратностей усіх власних чисел матриці  $T_2$ , що не збігаються з жодним із власних чисел матриці  $T_1$ .

Доведення цього факту наведене в [90] (теорема 2). ■

Справедливим є і зворотне твердження.

**Теорема 1.3.** *Якщо існує перетворення (1.11), що приводить матриці до вигляду (1.12), то існує такий розв'язок  $T_1, T_2$  рівнянь (1.10), що множина  $\sigma_0(T_1, T_2)$  має більш одного елемента.* ■

У кандидатській дисертації автора питання про використання перетворення (1.11) для спрощення рівнянь (1.2) було вирішено в окремому випадку. Доведено [10], що якщо одна з початкових матриць, наприклад  $B_1$ , є неособливою, то можна скласти допоміжні матриці  $C_{i-1} = B_1^{-1} B_i$ ,  $i = \overline{2, \nu}$ . Тоді задача зведення початкових матриць за допомогою перетворення (1.11) є еквівалентною зведенню допоміжних матриць із використанням перетворення подібності. У задачах механіки це означає, що перш ніж шукати множину комутуючих матриць, треба у відповідній системі рівнянь позбутися динамічних зв'язків і розділити кожне рівняння на інерційний коефіцієнт.

Питання про зведення системи рівнянь до максимально можливої кількості підсистем викличе певні труднощі, тому що задача одночасного зведення декількох матриць до деякої канонічної форми через перетворення подібності — це знаменита невирішена задача алгебри. Цю задачу й еквівалентні їй задачі називають дикими задачами [33]. Проблеми класифікації пар матриць присвячені роботи І. М. Гельфанда, В. А. Пономарьова, В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозда, Л. А. Назарової, В. В. Сергейчука, Б. З. Шаваровського й ін. [17, 26, 27, 34, 59, 85, 106, 107].

В [12, 57] розглянуто декомпозицію рівнянь із матрицями коефіцієнтів, заданими не лише над полем комплексних чисел, а й над деякими іншими.

У роботі В. В. Удилова [79] в 1974 р. доведено єдиність розкладу рівнянь на підсистеми в окремому випадку, коли відповідний централізатор є напівпростою алгеброю.

Розв'язок задачі про зведення рівнянь (1.6) до максимально можливої кількості незалежних підсистем повідомлено в статті автора [3] (повний текст цієї статті депоновано у ВІНІТІ в 1979 р. № 1973-79 Деп. [9]). Робота [3] містить також відповідну теорему єдиності. Незалежно від цієї роботи І. Ф. Борецьким і В. М. Павловим [18] в 1979 р. було доведено єдиність розв'язку задачі декомпозиції рівнянь для деяких окремих випадків. В. Є. Білозеровим і Г. В. Можаяєвим було опубліковано статтю [13] про теорему єдиності в 1982 р., тобто після автора.

Розглянуті методи застосовувалися і для розщеплення рівнянь еволюції систем автоматичного керування алгебраїчними методами [13, 57, 79, 90]. Особливістю таких задач є наявність прямокутних матриць коефіцієнтів.

У роботах [96, 101, 105] розглядається знаходження перетворення подібності для зведення набору симетричних матриць до блочно-діагонального вигляду. Матриці перетворення повинні бути ортогональними (у випадку комплексних початкових матриць — унітарними). Ця задача вирішується як допоміжна при напівозначеному програмуванні. Для побудови алгоритму використовуються інволютивні скінченновимірні алгебри (скінченновимірні  $C^*$ -алгебри).

Теоретичні аспекти декомпозиції лінійних і нелінійних систем активно досліджуються у відділі «Імітаційні системи» Обчислювального центру ім. А. А. Дородніцина РАН (зокрема — роботи Ю. М. Павловського [61—64] і В. І. Йолкіна [36]).

Робіт із зведенням матриць коефіцієнтів до блочно-трикутного вигляду (ієрархічної декомпозиції) порівняно мало. У статті О. К. Лопатіна [50] це питання, очевидно, розглядається вперше. О. К. Лопатіним, зокрема, доведено таку теорему.



**Теорема 1.4.** Для існування перетворення подібності, що приводить матриці  $B_v$ ,  $v = \overline{1, d}$  до блочно-трикутного вигляду з кількістю блоків  $p$ , необхідним і достатнім є існування сімейства матриць  $G(\tau)$ ,  $(\tau \in C^p)$ , таких, що

$$G^j(\tau)B_vL_j = \mathbf{0} \quad \forall \tau \quad \forall v, \quad (1.13)$$

$$\{\mathbf{0}\} \equiv L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_p \equiv C^n, \quad \dim L_{j+1} > \dim L_j,$$

$$\text{де } L_j = \{ \xi : G^j(\mathbf{t})\xi = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{t} \in C^p \}.$$

Окремі випадки задачі одночасного зведення матриць до блочно-трикутного вигляду розглянуто в роботах П. С. Казімірського, Б. З. Шаваровського [39, 84, 108] і В. Є. Білозьорова, Г. В. Можаяєва [12, 13].

Обчислювального алгоритму розв'язання цієї задачі раніше не існувало. Розв'язок задачі ієрархічної декомпозиції вперше викладено в монографії автора [3]. Докладний виклад цього питання наведено в [6]. Розроблений метод далі будемо називати «метод інваріантного підпростору».

### **1.7. Приклади прикладних задач, пов'язаних із проблемою декомпозиції**

Одним із джерел задач декомпозиції стали питання спрощення рівнянь, призначених для дослідження стійкості руху рейкових екіпажів. Задачі механіки залізничного транспорту можна схематично розділити на три напрямки: поздовжня динаміка поїзда, взаємодія рухомого складу й колії, стійкість руху рейкових екіпажів (див. [21], гл. XVI і [96]). Останній напрямок пов'язаний із необхідністю враховувати велику кількість ступенів вільності, а також брати до уваги сили псевдоковзання (сили крипу),

обумовлені взаємодією колісних пар і рейкової колії. Ці сили не є малими, саме вони визначають стійкість руху екіпажа (см. В. А. Лазарян, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко [48], Гарг, Дуккипаті [25], Чанг, Гарг, Гудспид й ін. [94], Гаривалтіс, Гарг, Дсоуза [99]).

Природа сил крипу полягає в такому. Залізничні колеса жорстко насаджені на вісь (рис. 1.6). Профіль коліс такий, що при малих коливаннях вони мають невелику конічність у точці контакту з рейкою. Рух колісних пар, об'єднаних у візки, супроводжується псевдоковзанням, при якому фактичні переміщення колеса не збігаються з кінематичними переміщеннями. Це відбувається внаслідок місцевих деформацій у зоні контакту колеса й рейки в тому випадку, коли дотична сила взаємодії  $P$  менше сили зчеплення. При не дуже великих значеннях сили  $P$  її вважають пропорційною відносному пружному прослизанню:

$$P = -F\varepsilon,$$

де  $F$  — коефіцієнт пропорційності, що називається коефіцієнтом псевдоковзання,  $\varepsilon$  — відносне пружне прослизання. У результаті на колісну пару діють узагальнені сили [96]:

$$Q_y = f_1 \psi - h_1 v^{-1} \dot{y},$$

$$Q_\psi = -f_2 y - h_2 v^{-1} \dot{\psi}.$$

Тут  $y$  і  $\psi$  — відповідно, бічний зсув і кут виляння (повороту навколо вертикальної осі) колісної пари,  $Q_y$  і  $Q_\psi$  — узагальнені сили, що відповідають змінним  $y$  і  $\psi$ ,  $v$  — швидкість поступального руху рейкового екіпажа,  $f_1$ ,  $h_1$ ,  $f_2$ ,  $h_2$  — позитивні коефіцієнти, крапка означає похідну за часом.

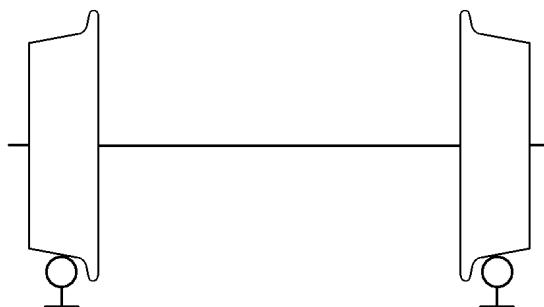


Рис. 1.6. Колісна пара й рейкова колія

Другі складові у виразах сил псевдо ковзання є аналогічними силам в'язкого тертя. Вони стабілізують коливання. Оскільки швидкість стоїть в знаменнику, величина цих доданків зменшується зі збільшенням швидкості руху екіпажа. Перші складові, навпаки, розгойдують систему. Більш того, наявність несиметричних доданків робить непридатними для дослідження таких систем багато традиційних методів теорії коливань. Такі системи не приводяться до головних координат навіть при відсутності демпфірування. Для них «не працюють» відомі теореми якісного дослідження.

Нестійкість прямолінійного руху рейкових екіпажів не призводить до аварій завдяки гребням коліс. Однак виникаючі при цьому автоколивання призводять до підвищеного зношування рухомого складу і шляху, негативно впливають на схоронність вантажів і комфорт пасажирів.

Несиметричні матриці коефіцієнтів зустрічаються і при дослідженні стійкості руху інших динамічних систем [16, 70]. Це пов'язане не лише з явищем крипу, а й з такими відомими проблемами, як шіммі коліс автомобіля або переднього шасі літака, флатер, облік гіроскопічних сил тощо.

Явище шіммі полягає в такому. Коли на автомобільне колесо, що котиться, діє бічна сила, воно зазнає пружної деформації (рис. 1.7). Колесо при цьому відхиляється, не змінюючи свого напрямку. Але послідовність площин контакту розташовується вже в іншому напрямку. Інакше кажучи, колесо котиться «криво» у напрямку, що утворює кут відведення  $\varepsilon$  з геометричною площиною недеформованого колеса [70] (с. 96, 132).

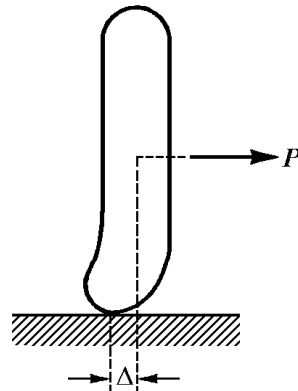


Рис. 1.7. Бічна сила, що діє на автомобільне колесо

Гіпотеза «відведення» полягає в тому, що кут відведення  $\varepsilon$  вважається пропорційним бічному зсуву  $\Delta$ , який у свою чергу є пропорційним бічній силі  $P$ :

$$\varepsilon = \beta\Delta, P = -H\Delta,$$

де  $H$  — твердість колеса в горизонтальному поперечному напрямку,  $\beta$  — коефіцієнт пропорційності, що називається коефіцієнтом відведення. У таких задачах матриці коефіцієнтів є несиметричними, але число ступенів вільності, як правило, є меншим, ніж у рівняннях руху залізничних екіпажів.

Рівняння обуреного руху механічної системи можуть бути представлені в такому вигляді:

$$B_1\ddot{\mathbf{q}} + B_2\dot{\mathbf{q}} + B_3\mathbf{q} = \mathbf{0},$$

де  $B_1$ ,  $B_2$  і  $B_3$  — комплексні (загалом кажучи) матриці коефіцієнтів;  $\mathbf{q}$  — вектор узагальнених координат. Задача декомпозиції полягає в зведенні матриць  $B_i$  до блочно-діагонального або (хоча б) до блочно-трикутного вигляду.

Одним із прикладів електромеханічної системи є екіпаж високошвидкісного наземного транспорту (ВШНТ) на електромагнітнім підвішуванні [41, 102].

У якості змінних при дослідженні руху такого вагона використовуються механічні величини (переміщення мас, розміри зазорів тощо) і значення струмів в електромагнітах. Величини сил притягання електромагнітів залежать від величин струмів. Значення струмів визначаються за такими формулами:

$$L\dot{q}_{n+j} + Rq_{n+j} = k_1\delta_j + k_2\dot{\delta}_j + k_3\ddot{\delta}_j; \quad \delta_j = q_j + \eta(t),$$

де  $L$  і  $R$  — індуктивність і опір опліток електромагнітів;  $k_1, k_2, k_3$  — коефіцієнти системи автоматичного керування зазором між електромагнітами і шляховою структурою;  $\eta(t)$  — поточна координата нерівності шляхової структури;  $n$  — кількість механічних узагальнених координат;  $j$  — номер електромагніту;  $q_{n+j}$  — динамічна добавка сили струму електромагніту;  $q_j$  — переміщення електромагніту.

При розв'язанні задачі стабілізації бічних коливань такого екіпажа з'являються громіздкі системи рівнянь. Стає актуальною задача їх декомпозиції.

Аналогічні задачі виникають і при аналізі економічних систем [4, 7]. Так, динамічна модель Леонтьєва може бути записана у вигляді [28]:

$$\mathbf{x} = A \mathbf{x} + K \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}. \quad (1.14)$$

Тут  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  — вектор випуску, що характеризує випуск продуктів за рік за галузями;  $A$  — матриця прямих витрат (тобто коефіцієнти пропорційності між випуском і проміжним споживанням);  $K = K_0(E - A)$ ;

$K_0$  — матриця коефіцієнтів повної приростної капіталомісткості (тобто коефіцієнти пропорційності між швидкостями приросту кінцевих продуктів і відповідними інвестиціями);  $E$  — одинична матриця;  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T$  — вектор споживання;  $\tau$  — знак транспонування. Розглядається задача знаходження перетворення змінних, що дозволяє розділити рівняння (1.14) на кілька незалежних підсистем. Якщо це можливо, то отримані підсистеми описують деякі «комплекси» виглядів продукції. Кожний з них можна аналізувати окремо від інших. Про симетричність початкових матриць  $A$  і  $K$  мова взагалі не ідеться.

У даній роботі вважаємо, що матриці коефіцієнтів можуть бути несиметричними і взагалі довільними. Далі буде показано що, застосовуючи методи декомпозиції до систем з довільними матрицями коефіцієнтів, ми зустрічаємося з некомпактними групами симетрії, ненапівпростими алгебрами і змушені залучати досить глибокі результати загальної алгебри [6, 8, 91 — 93].

### 1.8. Постановка задач даного дослідження

Центральне місце в дослідженні посідають такі дві задачі.

**Задача 1.** Дано  $g$  матриць  $B_1, B_2, \dots, B_g$ , потрібно знайти таке перетворення подібності, яке приведе ці матриці одночасно до однакового блочно-діагонального вигляду

$$\tilde{B}_j = S^{-1} B_j S = \text{diag}(B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{lj}) = \begin{bmatrix} [1] & & & \mathbf{0} \\ & [2] & & \\ \mathbf{0} & & \dots & \\ & & & [l] \end{bmatrix}$$

так, щоб кількість блоків на головній діагоналі матриць була максимальною:

$$\max_{S: \det(S) \neq 0} l.$$

Тут і далі в теоретичних твердженнях фігурують комплексні матриці, а в розрахунках майже завжди вдається не виходити за межі дійсної арифметики.

Помітимо, що при  $g > 1$  готового розв'язку цієї задачі немає, оскільки для однієї матриці існує канонічна форма Жордана, а для декількох матриць такої канонічної форми немає. Більш того: задача про канонічну форму декількох матриць належить до знаменитих невіршених задач.

**Задача 2.** Ця задача є аналогічною першій, але потрібно звести матриці до блочно-трикутного вигляду:

$$\tilde{B}_j = S^{-1} B_j S = \begin{bmatrix} [1] & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & [2] & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & [p] \end{bmatrix}, \max_{S: \det(S) \neq 0} p.$$

У роботі отримано теоретичний і обчислювальний розв'язок цих задач, а також зазначено, як застосувати розроблені методи розв'язання для задач декомпозиції й виявлення симетрії в таких прикладних проблемах.

1.8.1. Коливання механічної системи часто записуються у вигляді такої системи рівнянь:

$$B_1 \ddot{\mathbf{x}} + B_2 \dot{\mathbf{x}} + B_3 \mathbf{x} = \mathbf{Q}(t). \quad (1.15)$$

Добре вивченим у теорії коливань є випадок, коли матриця  $B_1$  містить інерційні коефіцієнти,  $B_2$  — коефіцієнти демпфірування, а  $B_3$  — квазіпружні коефіцієнти. У цьому випадку всі матриці є симетричними. Однак при складній структурі сил матриця  $B_2$  може бути несиметричною через

гіроскопічні сили, а  $B_3$  — через неконсервативні позиційні сили. Саме такі сили враховуються в задачах, пов'язаних із проблемою стійкості руху й аналізу таких явищ, як флатер, шіммі коліс автомобіля або літака, крип, викликаний взаємодією колісних пар і рейкової колії у залізничних екіпажів [16, 96, 70].

Досвід розв'язання таких задач показав, що перетворення, знайдені при певних значеннях параметрів, як правило, «працюють» і при інших параметрах. Але можна заздалегідь обмовити інваріантність шуканих перетворень при зміні деяких параметрів, як це зроблено в наступному пункті.

1.8.2. Розглянемо таку систему рівнянь:

$$B_1(\boldsymbol{\mu}) \ddot{\mathbf{x}} + B_2(\boldsymbol{\mu}) \dot{\mathbf{x}} + B_3(\boldsymbol{\mu})\mathbf{x} = \mathbf{Q}(t),$$

де матриці  $B_i(\boldsymbol{\mu})$  лінійно залежать від вектора параметрів  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)^T$ :

$$B_i(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{k=1}^p \mu_k B_i^{(k)}.$$

Задачу декомпозиції цієї системи рівнянь поставлено так само, як і для попередньої системи рівнянь. Змінено лише кількість постійних матриць:  $g = 3p$ .

1.8.3. Рівняння, що описують динаміку керованої системи, мають вигляд:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}.$$

Розглянуто задачу поділу їх на підсистеми за допомогою такої заміни змінних:



$$\mathbf{x} = S_1 \mathbf{x}', \mathbf{u} = S_2 \mathbf{u}', \mathbf{y} = S_3 \mathbf{y}',$$

де  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{y}'$  — вектори нових змінних.

Крім цієї існують й інші задачі, де також фігурують системи рівнянь із прямокутними матрицями коефіцієнтів. У данім дослідженні для багатьох таких систем рівнянь вирішено задачу щодо їх найкращої декомпозиції, тобто про поділ на підсистеми за допомогою заміни змінних й одержання при цьому максимально можливого числа підсистем.

1.8.4. Необхідно встановити взаємозв'язок між розробленими методами розщеплення матриць й існуючими методами обліку симетрії систем за допомогою зображень скінченних груп. Для цього вирішуємо задачі:

- застосування груп симетрії для механічних й електромеханічних систем зі складною структурою сил;
- відновлення групи симетрії системи, відповідної до знайдених перетворень із декомпозиції рівнянь;
- комп'ютерне знаходження незвідних зображень довільної скінченної групи.

1.8.5. Необхідно застосувати методи зведення до комплексних головних координат для задач оптимізації, аналізу форм коливань складних систем, для оцінки області притягання розв'язків, а також для аналізу макроекономічних систем.

1.8.6. Необхідно розробити методіку спрощення завдань напівозначеного програмування за допомогою методів декомпозиції.

## 1.9. Висновки до розділу 1

Слово «декомпозиція» має дуже широке коло застосування. У теорії коливань і будівельній механіці накопичено певний досвід вибору невідомих таким чином, щоб одержати рівняння, розділені на підсистеми. Це робиться

на інтуїтивному рівні. Спеціальні методи декомпозиції розвивалися окремо за декількома напрямками: використання апріорної інформації щодо симетрії системи за допомогою теорії груп, алгебраїчні методи точної декомпозиції для лінійних систем із квадратними та із прямокутними матрицями коефіцієнтів, приведення матриць коефіцієнтів до блочно-трикутного вигляду.

Підхід, що погоджує локальні напрямки, раніше не розглядався. Не було досвіду розрахунків з громіздкими технічними системами. Завдання про отримання максимально можливої кількості підсистем раніше не ставилися і не вирішувались. Досі не вирішена знаменита проблема про класифікацію пар матриць. Це є перешкодою при розробці нових методів.

#### **1.10. Список використаних джерел до розділу 1**

1. Андреев Ю. Н. Дифференциально-геометрические методы в теории управления / Ю. Н. Андреев // Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 10. — С. 5—46.
2. Базилевич Ю. Н. Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики / Ю. Н. Базилевич. — Киев: Наук. думка, 1987. — 156 с.
3. Базилевич Ю. Н. Приведение системы линейных дифференциальных уравнений к максимально возможному количеству независимых подсистем / Ю. Н. Базилевич // Дифференц. уравнения. — 1980. — 16, № 2. — С. 360—361.
4. Базилевич Ю. Н. Наилучшее разделение на блоки матричных макроэкономических моделей / Ю. Н. Базилевич // Питання прикладної математики і математичного моделювання: Зб. наукових пр. — Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2005. — С. 23—28.
5. Базилевич Ю. Н. О постановке задач точной декомпозиции линейных математических моделей / Ю. Н. Базилевич, И. А. Костюшко //

- Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2017. — № 1. — С. 77–82.
6. Базилевич Ю. Н. Наилучшее приведение матриц к блочно-треугольному виду для задач иерархической декомпозиции / Ю. Н. Базилевич // Кибернетика и системный анализ. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 145–153.
  7. Базилевич Ю. Н. О методах анализа матричных моделей стоимостного баланса / Ю. Н. Базилевич, В. А. Нецветаев, Е. П. Резник // XXI столетие — проблемы и перспективы освоения месторождений полезных ископаемых: Сб. науч. Трудов НГА Украины. №3, Том. 7. — РИК
  8. Базилевич Ю. Н. Точная декомпозиция систем линейных уравнений / Ю. Н. Базилевич // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня, 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — К.: НТ
  9. Базилевич Ю. Н. Приведение системы линейных дифференциальных уравнений к максимально возможному количеству независимых подсистем / Ю. Н. Базилевич. — Минск, 1979. — 18 с. — Деп. ВИНТИ 11.05.79 N 1973—79 Деп.
  10. Базилевич Ю. Н. Декомпозиция уравнений движения многомассовой механической системы с позиционными неконсервативными силами: автореф. дис. ... канд. физ.-мат наук: спец. 01.02.01 Теоретическая механика / Ю. Н. Базилевич. — Л.: ЛПИ,
  11. Банах Л. Я. Методы декомпозиции и редукции динамических моделей при колебаниях механических систем. / Л. Я. Банах // Вестник научно-технического развития. — 2012. — № 6 (58). — С. 3—8.
  12. Белозеров В. Е. О декомпозиции линейных стационарных систем автоматического управления / В. Е. Белозеров, Г. В. Можяев // Кибернетика и вычисл. техника. — 1983. — Вып. 58. — С. 71—78.
  13. Белозеров В. Е. О единственности решения задач декомпозиции и агрегирования линейных систем автоматического управления /

- В. Е. Белозеров, Г. В. Можаяев // Теория сложных систем и методы их моделирования. — М.: ВНИИСИ, 1982. — С.
14. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. — М.: Высш. шк., 1980. — 408 с.
15. Богоявленский А. А. Методы теории групп непрерывных преобразований в механике систем с конечным числом степеней свободы / А. А. Богоявленский, И. С. Емельянова, Л. М. Мархашов и др. // Устойчивость движения, аналитическая механика, управление движением.
16. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. — М.: Физматгиз, 1961. — 339 с.
17. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 / В. М. Бондаренко // Мат. сб. — 1975. — 96, № 1. — С. 63—74.
18. Борецкий И. Ф. О единственности декомпозиции в линейной задаче оптимального управления с квадратичным критерием качества / И. Ф. Борецкий, В. Г. Павлов // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 11. — С. 10—15.
19. Булгаков Б. В. Колебания / Б. В. Булгаков. — М.: Гостехтеориздат, 1954. — 891 с.
20. Бурьшкин М. Л. Эффективные методы и программы расчета на ЭВМ симметричных конструкций / М. Л. Бурьшкин, В. Н. Гордеев. — Киев: Будівельник, 1984. — 120 с.
21. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). — М.: Машиностроение, 1978 — 1979 — Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978. — 352 с.
22. Вигнер Е. Теория групп и ее приложение к квантово-механической теории атомных спектров / Е. Вигнер. — М.: Изд—во иностр. лит., 1961. — 443 с.

23. Владимиров С. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения с дискретной группой симметрии / С. А. Владимиров // Дифференц. уравнения. — 1975. — 11, № 7. — С. 1180—1189.
24. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.
25. Гарг В. К. Динамика подвижного состава / В. К. Гарг, Р. В. Дуккипати. — М.: Транспорт, 1988, 391 с.
26. Гельфанд И. М. Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве / И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев // Функцион. анализ. — 1969. — 3, Вып. — 4. — С. 81—82.
27. Гельфанд И. М. Неразложимые представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев // Успехи матем. наук, 23:2 (1968), 3—60.
28. Гранберг А. Г. Моделирование социалистической экономики / А. Г. Гранберг. — М.: Экономика, 1988. — 487 с.
29. Груйич Л. Т. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях / Л. Т. Груйич, А. А. Мартынюк, М. Риббенс-Павелла. — Киев: Наук. думка, 1984. — 308 с.
30. Декомпозиционные методы в математическом моделировании и информатике. Тезисы докладов 2-ой Московской конференции / Под ред. Ю. Н. Павловского. — М.: ВЦ РАН, 2004. — 213 с.
31. Демин Ю. В. Автоколебания и устойчивость движения рельсовых экипажей / Ю. В. Демин, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко и др. — Киев: Наук. думка, 1984. — 160 с.
32. Джексон Г. Проектирование реляционных баз данных для использования с микроЭВМ / Г. Джексон. — М.: Мир, 1991. — 252 с.
33. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах / Ю. А. Дрозд // Матричные задачи. — Киев: Институт математики АН УССР, 1977. — С. 104—114.

34. Дрозд Ю. А. Представление коммутативных алгебр / Ю. А. Дрозд // Функ. анализ и его прилож. 1969. Т. 6, вып. 4. С. 41 — 43.
35. Дышлис А. А. Определение на ЭВМ координат симметрии молекул методом операторов проектирования / А. А. Дышлис, Н. К. Морозова, Н. Б. Гайсина и др. // Науч. конф. Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе. — Киев:
36. Елкин В. И. Основы геометрической теории нелинейных управляемых систем / В. И. Елкин. — М.: Физматлит, 2014. — 204 с.
37. Злокович Дж. Теория групп и G-векторных пространств в колебаниях, устойчивости и статике конструкций / Дж. Злокович. — М.: Стройиздат, 1977. — 164 с.
38. Ицкович И. А. Анализ линейных экономико-математических моделей / И. А. Ицкович. — Новосибирск: Наука, 1976. — 192 с.
39. Казімірський П. С. Розклад матричних многочленів на множники (II видання) / П. С. Казімірський. — Львів: ІППММ НАНУ, 2015. — 282 с.
40. Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. — М.: Мир, 1971. — 400 с.
41. Коротенко М. Л. Боковые колебания экипажа с бесконтактным подвесом / М. Л. Коротенко, В. Л. Копорулин, Е. П. Крышко // Проблемы динамики, прочности и устойчивости движения железнодорожного подвижного состава. — Днепропетровск: ДИИТ,
42. Крон Г. Тензорный анализ сетей / Г. Крон. — М.: Сов. радио, 1978. — 720 с.
43. Крылов Б. Л. Решение в конечном виде проблемы Римана для системы Гаусса / Б. Л. Крылов // Труды Казанского авиационного института, 31, 1956. — С. 203—445.
44. Кублановская В. Н. К решению задач с разреженными матрицами / В. Н. Кублановская, Г. В. Савина, Т. Н. Смирнова // Зап. науч. семинаров

- Ленинг. отд. математического ин-та АН СССР. — 1973. — Вып. 35. — С. 75—94.
45. Кухтенко А. И. Проблема многомерности в теории сложных систем / А. И. Кухтенко // Кибернетика и вычисл. техника. — 1969. — Вып. 1. — С. 6—35.
46. Лазарян В. А. Динамика транспортных средств: Избр. тр. / В. А. Лазарян. — Киев: Наук. думка, 1985. — 528 с.
47. Лазарян В. А. Понижение порядка систем нелинейных дифференциальных уравнений путем исключения быстро затухающих решений / В. А. Лазарян, Л. А. Длугач, И. А. Зильберман и др. // Прикл. механика. — 1975. — 11, № 8. — С. 81—88.
48. Лазарян В. А. Устойчивость движения рельсовых экипажей / В. А. Лазарян, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко. — Киев: Наук. думка, 1972. — 199 с.
49. Ландау Л. Д. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948. — 568 с.
50. Лопатин А. К. Об алгебраической приводимости систем линейных дифференциальных уравнений / А. К. Лопатин // Дифференц. уравнения. — 1968. — 4, № 3. — С. 439—445.
51. Лэсдон Л. Оптимизация больших систем / Л. Лэсдон. — М.: Наука, 1975. — 432 с.
52. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике: Курс лекций для физиков-теоретиков. Изд. 2 / Г. Я. Любарский. — М.: URSS, 2016 — 360 с.
53. Любарский Г. Я. Теория групп и физика / Г. Я. Любарский. — М.: Наука, 1986. — 224 с.
54. Манделъштам Л. И. Лекции по теории колебаний / Л. И. Манделъштам. — М.: Наука, 1972. — 470 с.

55. Маневич Л. И. О нормальных колебаниях в нелинейных системах с двумя степенями свободы / Л. И. Маневич, М. А. Пинский // Прикл. Механика. — 1972. — 8, № 9. — С. 83—90.
56. Митропольский Ю. А. Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики / Ю. А. Митропольский, А. К. Лопатин. — Киев: Наук. думка, 1988. — 272 с.
57. Можаяев Г. В. Об использовании симметрии в линейных задачах оптимального управления с квадратичным критерием качества / Г. В. Можаяев // Автоматика и телемеханика. — 1975. — № 6. — С. 22—30; № 7. — С. 23—31.
58. Морозова Н. К. О приведении по симметрии операторов энергии в теории колебаний молекул / Н. К. Морозова, В. П. Морозов // Докл. АН СССР. — 1968. — 182, № 3. — С. 538—541.
59. Назарова Л. А. Представление колчанов бесконечного типа / Л. А. Назарова // Изв. АН СССР. Сер. Математика. — 1973. — 37, № 4. — С. 752—791.
60. Павлов В. Г. Системы, инвариантные относительно групп преобразований / В. Г. Павлов // Кибернетика и вычисл. техника. — 1983. — Вып. 58. — С. 17—21.
61. Павловский Ю. Н. Декомпозиция моделей управляемых систем / Ю. Н. Павловский. — М.: Знание, 1985. — 32 с.
62. Павловский Ю. Н. Проблема декомпозиции в математическом моделировании / Ю. Н. Павловский, Т. Г. Смирнова. — М.: ФАЗИС, 1998. VI+266 с.
63. Павловский Ю. Н. Теория декомпозиции и некоторые ее приложения [Электронный ресурс] / Ю. Н. Павловский // VIII Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и технологий (ЭКОМОД)».



64. Павловский Ю. Н. Управление декомпозиционными структурами / Ю. Н. Павловский // Кибернетика и вычисл. техника. — 1983. — Вып. 58. — С. 11—16.
65. Папкович П. Ф. Об одной форме основных дифференциальных уравнений малых колебаний системы, не имеющей гироскопических членов / П. Ф. Папкович // Изв. Ленингр. политехн. Ин-та. Отд. техники, естествознания и математики. — 1929. — Вып. 32. — С. 1—14.
66. Петрашень М. И. Применение теории групп в квантовой механике / М. И. Петрашень, Е. Д. Трифионов. — М.: Наука, 1967. — 308 с.
67. Писанецки С. Технология разреженных матриц / С. Писанецки. — М.: Мир, 1988. — 410 с.
68. Рабинович И. М. Курс строительной механики / И. М. Рабинович. — М.: Госстройиздат, 1954. — Ч. 2. — 544 с.
69. Ройцин А. Б. Некоторые применения теории симметрии в задачах радиоспектроскопии / А. Б. Ройцин. — Киев: Наук. думка, 1973. — 100 с.
70. Рокар И. Неустойчивость в механике. — М.: Издательство иностранной литературы, 1959. — 287 с.
71. Самойленко Ю. И. Методы теории линейных представлений групп симметрии и применение этих методов для дискретных систем / Ю. И. Самойленко // Кибернетика и вычисл. техника. — 1969. — Вып. 2. — С. 37—66.
72. Серр Ж. -П. Линейные представления конечных групп / Ж. -П. Серр. — М.: Мир, 1970. — 132 с.
73. Сметанин Е. В. К расчету крупномасштабной сети декомпозиционным и диакоптическим методами в рамках категорно-тензорной модели сетей. Поиск наиболее эффективного разбиения сети на подсети. / Е. В. Сметанин, Н. Б. Иванова // Вестник Иван.
74. Сметанин Е. В. Категорно-тензорная модель сетей с движущимися элементами / Е. В. Сметанин // Там же — с. 44—49.

75. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний / С. П. Стрелков. — М.: Наука, 1964. — 440 с.
76. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы / Р. Тьюарсон. — М.: Мир, 1977. — 189 с.
77. Удилов В. В. Исследование собственных колебаний стержневых систем с групповой симметрией / В. В. Удилов, Г. Т. Ковбаса // Кибернетика и вычисл. техника. — 1969. — Вып. 1. — С. 82—92.
78. Удилов В. В. Об аналитическом конструировании многомерных систем с известной группой симметрии / В. В. Удилов // Кибернетика и вычисл. техника. — 1970. — Вып. 5. — С. 13—18.
79. Удилов В. В. Применение методов абстрактной алгебры при исследовании многомерных систем автоматического управления / В. В. Удилов // Кибернетика и вычисл. техника. — 1974. — Вып. 23. — С. 20—27.
80. Уилкинсон Дж. Х. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра / Дж. Х. Уилкинсон, С. Райнш. — М.: Машиностроение, 1976. — 389 с.
81. Ферми Э. Квантовая механика / Э. Ферми. — М.: Мир, 1968. — 367 с.
82. Фомин В. М. Применение теории представлений групп к определению частот и форм свободных колебаний стержневых систем с данной группой симметрии / В. М. Фомин // Распределенное управление процессами в сплошной среде. — Киев: ИК АН
83. Фушич В. І. Вибрані праці / В. І. Фушич. — Київ: Наук. думка, 2005. — 448 с.
84. Шаваровский Б. З. Преобразования подобия разложимых матричных многочленов и некоторые их связи / Б. З. Шаваровский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 49:9 (2009), 1539—1553.

85. Шаваровский Б. З. Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований / Б. З. Шаваровский // Матем. заметки, 64:5 (1998), 769—782.
86. Шайкин М. Е. Теоретико-групповые методы декомпозиции симметрических многосвязных динамических систем / М. Е. Шайкин // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 9. — С. 22—32.
87. Эварестов Р. А. Квантовохимические методы в теории твердых тел / Р. А. Эварестов. — Л.: Изд-во Ленингр. Ун-та, 1982. — 280 с.
88. Эллиот Дж. Симметрия в физике: В 2 т / Дж. Эллиот, П. Добер. — М.: Мир, 1983. — Т. 1—2.
89. Эстербю О. Прямые методы для разреженных матриц / О. Эстербю, З. Златев. — М.: Мир, 1987. — 120 с.
90. Якубович Е. Д. Построение систем замещения для некоторого класса многомерных линейных систем автоматического управления / Е. Д. Якубович // Изв. вузов. Радиофизика. — 1969. — 12, № 3. — С. 362—377.
91. Bazilevich Yu. N. Hidden Symmetry Exposure. The Mechanical Systems with the Hard Structure of Forces / Yu. N. Bazilevich // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — Kyiv, Institute of Mathematics, 2004. — Vol. 50, Part 3, 1261—1265
92. Bazilevich Yu. N. Similarity transformation of the pair of matrices to the best partitioned-triangular form / Yu. N. Bazilevich // 7-а міжнародна алгебраїчна конференція в Україні: тези доповідей. — Київ, Ін-т математики НАН України, 2009. — С. 21.
93. Bazilevich Yu. N. The Simultaneous Reduction of Matrices to the Block-Triangular Form / Yu. N. Bazilevich [E-resource] // Physics Journal. — 2015. Vol. 1, No. 2, pp. 54—61. Access to the resource: <http://files.aiscience.org/journal/article/html/70400061>

94. Chang E. H. Comparative study of the linear and non-linear locomotive response / E. H. Chang, V. K. Garg, C. H. Goodspeed et al. // *Trans. ASME, Dyn. Syst. Meas. and Contr.* — 1979. — 101, Sept. — P. 263—271.
95. Cohen M. Analytical asymmetrical warequide junctions / M. Cohen, W. K. Kahn // *IRE Trans. Micr. Theory and Techn.* — 1960. — Oct. — P. 430—441.
96. de Klerk E. Numerical block diagonalization of matrix \*-algebras with application to semidefinite programming / Etienne de Klerk, Cristian Dobre, Dmitrii V. P?asechnik // *Math. Program., Ser. B* (2011) 129: 91—111.
97. Eighth International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. June 21-27, 2009 [E-resource] Access to the resource: <http://www.imath.kiev.ua/~appmath/conf.html>.
98. Falb P. L. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems / P. L. Falb, W. A. Wolovich // *IEEE Trans. Automat. Contr.* — 1967. — 12, № 6. — P. 651—659.
99. Garivaltis D. S. Fatigue damage of the locomotive suspension elements under random loading / D. S. Garivaltis, V. K. Garg, A. F. D'Souza // *Trans. ASME, J. Mech. Design.* — 1981. — 103, Oct. — P. 871—880.
100. Grujić L. T. Asymptotic stability and instability of large-scale systems / L. T. Grujić, D. D. Šiljak // *IEEE Trans. Automat. Contr.* — 1973. — 18, № 6. — P. 636—645.
101. Maehara T. A numerical algorithm for block-diagonal decomposition of matrix \*-algebras with general irreducible components / Takanori Maehara, Kazuo Murota // *Japan J. Indust. Appl. Math.* (2010) 27: 263—293.
102. Maglev [E-resource] // Wikipedia, the free encyclopedia. — 2015 — Access to the resource: [https://en.wikipedia.org/wiki/Maglev#cite\\_note-31](https://en.wikipedia.org/wiki/Maglev#cite_note-31).
103. Majumdar A. K. On the decoupling of non-linear systems / A. K. Majumdar, A. K. Choudhury // *Int. J. Contr.* — 1972. — 16, № 4. — P. 705—718.

104. Mitropolsky Yu. A. *Nonlinear Mechanics, Groups and Symmetry* / Yu. A. Mitropolsky, A. K. Lopatin. — Amsterdam: Springer-Science+Business Media, B.Y. 1995, 390 p.
105. Murota K. A numerical algorithm for block-diagonal decomposition of matrix \*-algebras with application to semidefinite programming / Kazuo Murota, Yoshihiro Kanno, Masakazu Kojima, Sadayoshi Kojima. // *Japan J. Indust. Appl. Math.* (2010) 27: 125–160.
106. Sergeichuk V. V. Canonical matrices and related questions / V. V. Sergeichuk // *Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування.* — Т. 57. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. — 326 с.
107. Sergeichuk V. V. Canonical matrices for liner matrix problem / V. V. Sergeichuk // *Linear Algebra and its Applications* 317 (2000) 53 — 102.
108. Shavaovskii B. Z. On a Metod for Reducing a Pair of Matrices to Block Diagonal Form by a Similarity Transformation / B. Z. Shavaovskii // *Computational Mathematics and Mathematical Phisics* Vol. 43 No 9 2003.
109. Wonham W. M. Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: a geometric approach / W. M. Wonham, A. S. Morse // *SIAM J. Contr.* — 1970. — 8, № 1. — P. 1—18.

## РОЗДІЛ 2

### МЕТОДИ ЗВЕДЕННЯ ДО НЕЗАЛЕЖНИХ ПІДСИСТЕМ МІНІМАЛЬНО МОЖЛИВОГО ПОРЯДКУ

У даному розділі наведено виклад й обґрунтування методів найкращої декомпозиції системи рівнянь на незалежні підсистеми. Широковідомі методи теорії груп симетрії не гарантують можливості зведення рівнянь до максимальної кількості незалежних підсистем, оскільки в більшості випадків немає впевненості в тому, що інформація щодо групи симетрії системи рівнянь, знайдена апіорно, є вичерпною. «Метод комутуючої матриці» є призначеним для аналізу системи рівнянь безпосередньо. Однак і він все-таки не дає відповіді на запитання, як одержати максимально можливу кількість підсистем. У цьому розділі дано відповідь на це питання, тобто зазначено операції, за допомогою яких рівняння можна розділити на підсистеми, й доведено, що скінченна послідовність цих операцій дозволяє одержати максимальне для обраного класу перетворень число підсистем.

Поділ на підсистеми в багатьох випадках дозволяє не тільки скоротити час обчислення й підвищити точність при комп'ютерних розрахунках, а й краще розуміти структуру досліджуваної системи, її властивості.

У ряді випадків декомпозиція дозволяє спростити викладення при одержанні розв'язку в замкненій формі.

Особливо корисним є зведення до підсистем за допомогою перетворення, що не залежить від деяких параметрів системи. Наприклад, для оптимізації параметрів системи рівнянь за допомогою пошукових методів необхідно робити багаторазові обчислення при різних значеннях цих параметрів. Виконане один раз розщеплення системи рівнянь дозволяє спростити розрахунки на кожному кроці оптимізації, що приводить до значного скорочення загальних витрат машинного часу. У кожному разі

декомпозиційність системи (або неможливість декомпозиції) — це важлива властивість досліджуваної системи.

## 2.1. Постановка задачі декомпозиції у випадку систем із квадратними матрицями коефіцієнтів

Розглянемо систему рівнянь

$$B_1(\boldsymbol{\mu})\ddot{\mathbf{q}} + B_2(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{q}} + B_3(\boldsymbol{\mu})\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t), \quad (2.1)$$

де  $\mathbf{q}, \mathbf{Q}(t) \in C^n \forall t$ , а  $B_i(\boldsymbol{\mu})$  — комплексні матриці розміром  $m \times n$ , що лінійно залежать від параметрів  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ :

$$B_i(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{k=1}^p \mu_k B_i^{(k)};$$

$B_i^{(k)}$  — постійні матриці. Випадок дійсних змінних і деякі інші системи рівнянь буде розглянуто далі.

У теперішній час дослідники змушені вивчати системи рівнянь, що відрізняються від традиційних для теорії коливань. Вже не є рідкістю рівняння з несиметричними матрицями коефіцієнтів. Є роботи, де після складання рівнянь намагаються зневажити деякими масами, не змінюючи загальний вигляд системи рівнянь. При цьому матриця інерційних коефіцієнтів стає особливою. У зв'язку з тенденцією до постійного розширення кола розв'язуваних задач у даному розділі розглянуто рівняння, що мають зовсім довільні (у тому числі і прямокутні) матриці коефіцієнтів. Питання існування й єдиності розв'язку диференціальних рівнянь із прямокутними матрицями коефіцієнтів тут не досліджуються.

Розглянемо деякі окремі випадки постановки задачі про розщеплення системи (2.1).

1.  $n = m$ ,  $B_2 \equiv 0$ ,  $B_1$  і  $B_3$  — симетричні постійні матриці, причому одна з них є позитивно визначеною. Це відома вирішена задача теорії коливань про зведення до головних координат.

2.  $n = m$ ,  $B_1, B_2, B_3$  — постійні матриці (не обов'язково симетричні) і  $B_i \neq 0 \forall i$ . Такі системи рівнянь зустрічаються в механіці при наявності неконсервативних і «суттєво неконсервативних» сил (таких як сили демпфірування, псевдоковзання, гіроскопічні й т. п.). Ці рівняння, як правило, не приводяться до звичайних головних координат. Розщеплення таких рівнянь звичайно є можливим при наявності деякої симетрії (явної або схованої) досліджуваної фізичної системи, і тому отримане перетворення координат не змінюється при зміні параметрів системи (пружностей пружин, геометричних розмірів тощо), що не порушують цю симетрію. У цьому випадку розв'язок такої задачі одночасно є розв'язком більш громіздкої задачі, де залежність матриць  $B_i$  від параметрів є заздалегідь застереженою.

3.  $B_i = B_i(t)$ , де матриці  $B_i(t)$  можна представити у вигляді  $B_i(t) = \sum_{k=1}^p \mu_k(t) B_i^{(k)}$ ,  $3p < nm$ , ( $B_i^{(k)}$  — постійні матриці). Одержуємо задачу про зведення рівнянь до максимальної кількості підсистем при використанні тільки постійних матриць перетворення.

Далі матриці  $B_i^{(k)}$  позначаємо так:  $B_1, B_2, \dots, B_g$ , де  $g = 3k$ . Невироджені лінійні перетворення системи (2.1) — це: а) заміна змінних  $\mathbf{q} = S\mathbf{y}$ , де  $S$  — неособлива матриця, б) множення системи ліворуч на неособливу матрицю  $H$ . При цьому матриці перетворюються так:

$$\hat{B}_i = HB_iS, \quad i = \overline{1, g} \quad (2.2)$$



Позначимо розміри матриць  $B_{ik}$  коефіцієнтів, отриманих у результаті перетворення підсистем через  $m_k \times n_k$ , при цьому  $\sum_{k=1}^l m_k \leq m$ ,  $\sum_{k=1}^l n_k \leq n$ . При даних матрицях  $B_i$  число блоків  $l$  і розміри  $m_k \times n_k$  залежать від  $H$  і  $S$ . Позначимо  $N(H, S)$  — максимальне з добутків  $m_k \times n_k$ .

Поставлено задачі знайти  $H$  і  $S$ , при яких досягається

а)  $\min_{\Omega} N(H, S)$ ,  $\Omega = (H, S: \det H \neq 0, \det S \neq 0)$ ;

б)  $\max_{\Omega} l$ .

Нижче буде зазначено правила обчислення матриць  $H$  та  $S$ , а також доведено, що розв'язок другої задачі одночасно є розв'язком першої.

Розв'язання задач а) і б) полягає в такому: спочатку складаються допоміжні квадратні матриці, для яких потрібно розв'язати таку саму задачу, але використовуючи лише перетворення подібності (теорема 2.1); далі за допомогою множини матриць, комутуючих з даними (способи А і Б), послідовно приводяться до блочно-діагонального вигляду спочатку початкові допоміжні матриці, потім отримані на попередньому етапі блоки і т. д.; ознакою неможливості подальшого зведення даних блоків є відсутність матриці, що має хоча б два різні власні числа в множині матриць, комутуючих з даними блоками; на підставі теореми 2.2 затверджуємо, що зазначені дії дозволяють знайти максимально можливу кількість підсистем для допоміжних матриць, а отже, й розв'язати задачі а) і б).

## 2.2. Перехід до задачі знаходження перетворення подібності

**Теорема 2.1.** *Рівняння (2.1) розщеплюються за допомогою перетворення (2.2) тоді й тільки тоді, коли приводяться одночасно до блочно-діагонального вигляду такі  $v = g + I$  матриці:*

$$C_1 = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 2E_n \end{bmatrix}, C_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i = \overline{1, g} \quad (2.3)$$

за допомогою перетворення подібності

$$\tilde{C}_j = R^{-1} C_j R = \text{diag} (C_{jk}). \quad (2.4)$$

При цьому матриці перетворення  $H$  і  $S$  можуть бути складені за знайденим перетворенням (2.4) за допомогою співвідношення

$$\text{diag} (H, S) = Rv (\tilde{C}_1).$$

Д о в е д е н н я .

А. Необхідність. Нехай рівняння (2.1) розщеплюються. Це значить, що матриці  $B_i$  перетворенням (2.2) приводяться до вигляду (1.12). Складемо матрицю  $\tilde{Z} = \text{diag}(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2)$ , де матриці  $\tilde{T}_1$  й  $\tilde{T}_2$  мають вигляд:

$$\begin{cases} \tilde{T}_1 = \text{diag}(1E_{m_1}, 2E_{m_2}, \dots, (d-1)E_{m_{d-1}}, d, \dots, d + m_d - 1), \\ \tilde{T}_2 = \text{diag}(1E_{n_1}, 2E_{n_2}, \dots, (d-1)E_{n_{d-1}}, -d, \dots, -d - n_d + 1). \end{cases}$$

Матриця  $\tilde{Z}$  комутує з матрицями

$$\tilde{C}_1 = C_1, \tilde{C}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{B}_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, g}.$$

З іншого боку, як неважко перевірити,  $C_j = Q^{-1} \tilde{C}_j Q$ ,  $j = \overline{1, v}$ , де  $Q = \text{diag}(H^{-1}, S)$ . Тому рівність  $\tilde{Z} \tilde{C}_j = \tilde{C}_j \tilde{Z}$  можна записати у вигляді  $\tilde{Z} Q C_j Q^{-1} = Q C_j Q^{-1} \tilde{Z}$  або, інакше,  $(Q^{-1} \tilde{Z} Q) C_j = C_j (Q^{-1} \tilde{Z} Q)$ . Отже, існує матриця  $Z = Q^{-1} \tilde{Z} Q$ , комутуюча з матрицями (2.3), що має не менш двох різних власних чисел. На підставі теореми 1.1 одержуємо, що матриці  $C_j$  приводяться до блочно-діагонального вигляду.

Б. Достатність. Нехай матриці  $C_j$  приводяться до блочно-діагонального вигляду. Тоді матриця  $Z = R (\text{diag} k E_{n_k}) R^{-1}$  комутує з ними й має хоча б два різні власні числа. З іншого боку матриця  $Z$  має вигляд  $Z = \text{diag}(Z_1, Z_2)$ , оскільки вона комутує з матрицею  $C_1$ , що має блочно-діагональний вигляд із блоками, власні числа яких різні. Підстановкою матриці  $Z$  у рівність  $C_i Z = Z C_i$  переконуємося у виконанні рівностей (2.3). Далі з теореми 1.1 випливає, що рівняння (2.1) розщеплюються. При цьому матриці  $B_i$  приводяться до вигляду (1.11) так, що число  $d-1$  блоків  $B_{ik}$  дорівнює кількості блоків  $C_{ik}$  таких, що  $C_{i2}, \dots, C_{iv}$  не дорівнюють нулю одночасно; число  $m_d$  нульових рядків дорівнює кількості блоків  $C_{jk}$  першого порядку таких, що  $C_{j1} = 1, C_{j2} = \dots = C_{jv} = 0$ ; число  $n_d$  нульових стовпців дорівнює кількості блоків  $C_{rk}$  першого порядку таких, що  $C_{r1} = 2, C_{r2} = \dots = C_{rv} = 0$ . ■

Таким чином, задача про знаходження перетворення (2.2) для розщеплення рівнянь (2.1) зводиться до задачі одночасного зведення допоміжних матриць до блочно-діагонального вигляду перетворенням подібності.

### 2.3. Алгоритм розв'язання задачі

У попередньому параграфі було показано, як задача про знаходження перетворення (2.2) зводиться до задачі знаходження перетворення подібності для матриць  $C_j$  порядку  $n_0$ :

$$\tilde{C}_j = R^{-1}C_jR = \text{diag}(C_{jk}), k = \overline{1, l}; j = \overline{1, g}.$$

До цієї ж задачі приходимо й при спрощенні деяких інших типів рівнянь.

Розглянемо алгебру  $\Lambda(C_j)$  усіх матриць, комутуючих з матрицями  $C_j$ , тобто множину розв'язків системи матричних рівнянь

$$C_j Z = Z C_j, j = \overline{1, g}. \quad (2.5)$$

Ця алгебра є централізатором множини  $\{C_j\}$  в алгебрі всіх матриць порядку  $n_0$ . Загальний розв'язок системи (2.5) має вигляд:

$$Z = \sum_{k=1}^r \alpha_k W_k,$$

де  $\alpha_k$  — вільні змінні;  $W_k$  — матриці, що є базисом алгебри  $\Lambda(C_j)$ . Множина розв'язків системи (2.5), а саме матриці  $W_k$  можна знайти, вирішуючи систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь; алгоритм, що дозволяє здійснити це при високому порядку матриць  $C_j$ , описано в розділі 3.

Існують такі способи знаходження матриці  $R$  перетворення подібності.

**Спосіб А** (метод комутуючої матриці). Із множини  $\Lambda(C_j)$  вибираємо матрицю  $Z$ , що має хоча б два різні власні числа. Вектори її канонічного базису є стовпцями шуканої матриці  $R$ .

Обґрунтуванням способу А є теорема 1.1. ■

**Спосіб Б.** Складаємо й вирішуємо систему рівнянь

$$\sum_{v=1}^r \sum_{j=1}^r \gamma_{vj}^{(\mu)} \rho_v \rho_j = \rho_\mu, \mu = \overline{1, r}, \quad (2.6)$$

де  $\gamma_{vj}^{(\mu)}$  — структурні константи алгебри  $\Lambda(C_j)$ ;  $r$  — ранг цієї алгебри;  $\rho_v$  — координати проектора  $P$  у базисі  $W_\mu$ . Якщо матриці  $C_k$  приводяться до блочно-діагонального вигляду, то наведена вище система рівнянь має розв'язок, відповідний до нетривіального проектора  $P_1$ . З лінійно незалежних стовпців матриць  $P_1$  і  $P_2 = E - P_1$  складаємо матрицю перетворення  $S$ .

Ідея способу Б узята з роботи В. В. Удилова [19].

Якщо в централізаторі  $\Lambda(C_j)$  немає жодної матриці, що має хоча б два різні власні числа, то не існує перетворення подібності, що приводить матриці  $C_j$  одночасно до блочно-діагонального вигляду (теорема 1.3).

Теоретично можливим є випадок, коли ранг централізатора  $r > 1$ , але всі матриці базису не мають різних власних чисел. Це — особливий випадок. Його можна подолати, наприклад, за допомогою способу Б і розв'язання рівнянь (2.6). Розв'язання такої системи нелінійних рівнянь звичайно є складнішим, ніж застосування способу А.

Зведення до блоків мінімальних порядків здійснюється через послідовне застосування способу А або Б спочатку до початкових матриць  $C_k$ , потім до блоків, що виходять, до знаходження блоків, що не розщеплюються (на першому кроці бажано застосувати методи, які використовують апріорну інформацію щодо симетрії відповідної фізичної системи).

Залишається переконатися в тому, що після зведення до блоків, що не розщеплюються далі, вже неможливо збільшити їхню кількість, тобто якби ми проводили розщеплення в іншому порядку, то все одно не одержали б більшої кількості блоків. Про це свідчить теорема 2.2.

**Теорема 2.2.** Нехай матриці  $C_j$ ,  $j = \overline{1, g}$ , деяким перетворенням подібності приводяться до блочно-діагонального вигляду

$$\tilde{C}_j = R^{-1} C_j R = \text{diag} C_{jk}, \quad k = \overline{1, l_1}; \quad j = \overline{1, g},$$

причому кожний набір блоків  $C_{jk}$ ,  $j = \overline{1, g}$ , не приводиться до декількох блоків одночасно. Якщо існує інше таке перетворення, що отримані блоки не розщеплюються далі

$$\tilde{C}'_j = R_2^{-1} C_j R_2 = \text{diag} C'_{j\mu}, \quad \mu = \overline{1, l_2}, \quad j = \overline{1, g},$$

то  $l_1 = l_2$  і може бути встановлено відповідність між номерами  $k$  і  $\mu$  така, що блоки  $C_{jk}$  подібні до блоків  $C'_{j\mu(k)}$ :  $C_{jk} = r_k^{-1} C'_{j\mu(k)} r_k$ .

**Д о в е д е н н я .** Складемо алгебру  $\phi$ , породжену матрицями  $E, C_1, \dots, C_g$ . Складемо далі лівий  $\phi$ -модуль  $M$ , елементами якого є  $n_0$ -мірні вектори. Зрозуміло, що одночасному зведенню матриць  $C_j$  перетворенням подібності до блочно-діагонального вигляду із блоками, що не приводяться далі, відповідає розкладу модуля  $M$  у пряму суму нерозкладних підмодулів.

Згідно з теоремою Крулля — Шмідта інший такий розклад модуля містить стільки ж підмодулів і відповідні підмодулі є ізоморфними [11, 21]. Отже, інше зведення матриць  $C_j$  до нерозщеплюваних блоків надає стільки ж блоків, і блоки відповідних розкладань є подібними. ■

Теорема 2.2 встановлює єдиність зведення рівнянь до підсистем, що не розщеплюються.

Отриманий метод декомпозиції системи рівнянь (2.1) дасть результат також і у випадку прямокутних матриць  $B_i$ .

У загальному випадку спрощення системи (2.1) може бути досягнуто внаслідок не лише поділу рівнянь на підсистеми, але й через виключення деяких рівнянь або змінних. Це впливає із загального вигляду (1.12) матриць  $\hat{B}_i$ . Кожне з таких спрощень будемо далі називати декомпозицією (розщепленням) системи (2.1).

**Приклад 2.1.** Розглянемо коливальну систему (рис.2.1.), що складається із двох тіл, які мають можливість переміщатися уздовж осі  $Ox$ . Тіла з'єднано між собою пружиною й демпфером в'язкого тертя. Кожне з тіл приєднано пружиною й демпфером до нерухомої опори. Потрібно визначити, при яких співвідношеннях між коефіцієнтами пружності, масами й коефіцієнтами демпфірування є можливим розщеплення рівнянь руху цієї системи на два незалежні рівняння другого порядку.

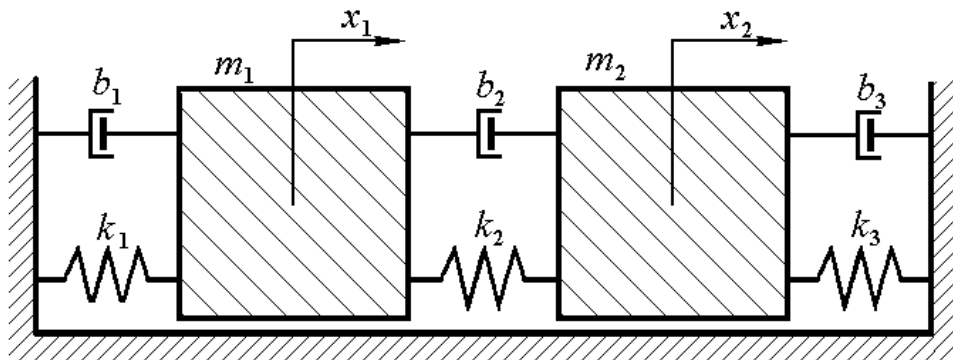


Рис. 2.1. Приклад коливальної системи

Складемо рівняння руху системи. Кінетична й потенційна енергії системи мають відповідно такі вирази:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2);$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(k_1(x_1)^2 + k_2(-x_1 + x_2)^2 + k_3(-x_2)^2) = \frac{1}{2}(c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 - 2c_3 x_1 x_2); \quad (2.7)$$

$$c_1 = k_1 + k_2; c_2 = k_2 + k_3; c_3 = k_2,$$

де  $x_1$  і  $x_2$  — переміщення першого і другого тіл;  $m_1$  і  $m_2$  — маси тіл;  $k_1, k_2, k_3$  — твердості пружин.

Аналогічним чином одержуємо вирази дисипативної функції:

$$\Phi = \frac{1}{2}(\beta_1 \dot{x}_1^2 + \beta_2 \dot{x}_2^2 - 2\beta_3 \dot{x}_1 \dot{x}_2); \quad (2.8)$$

$$\beta_1 = b_1 + b_2; \beta_2 = b_2 + b_3; \beta_3 = b_2,$$

де  $b_1, b_2$  і  $b_3$  — коефіцієнти демпфірування.

На підставі рівнянь Лагранжа 2-го роду одержуємо рівняння руху системи. Після поділу на інерційні коефіцієнти вони здобувають вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{\beta_1}{m_1} \dot{x}_1 - \frac{\beta_3}{m_1} \dot{x}_2 + \frac{c_1}{m_1} x_1 - \frac{c_3}{m_1} x_2 = 0; \\ \ddot{x}_2 - \frac{\beta_3}{m_2} \dot{x}_1 + \frac{\beta_2}{m_2} \dot{x}_2 - \frac{c_3}{m_2} x_1 + \frac{c_2}{m_2} x_2 = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Матриці коефіцієнтів такі:

$$B_1 = E; \quad B_2 = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{m_1} & -\frac{\beta_3}{m_1} \\ -\frac{\beta_3}{m_2} & \frac{\beta_2}{m_2} \end{bmatrix}; \quad B_3 = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{m_1} & -\frac{c_3}{m_1} \\ -\frac{c_3}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix}.$$

Невідому поки матрицю  $Z$  запишемо в такому вигляді:

$$Z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$



З рівності  $ZB_3 = B_3Z$  одержимо такі чотири рівняння (використовуємо умову  $c_3 \neq 0$ ):

$$\frac{b}{m_2} = \frac{c}{m_1}; \quad (2.11)$$

$$-a \frac{c_3}{m_1} + b \frac{c_2}{m_2} = b \frac{c_1}{m_1} - e \frac{c_3}{m_1}; \quad (2.12)$$

$$c \frac{c_1}{m_1} - e \frac{c_3}{m_2} = -a \frac{c_3}{m_2} + c \frac{c_2}{m_2}; \quad (2.13)$$

$$\frac{c}{m_1} = \frac{b}{m_2} \quad (2.14)$$

Помітимо, що рівняння (2.14) збігається з рівнянням (2.11), а рівняння (2.13) є наслідком двох попередніх. Дійсно, якщо рівняння (2.11) помножити на  $c_1 - \frac{m_1}{m_2}c_2$ , а рівняння (2.12) на  $\frac{m_1}{m_2}$  й ці добутки скласти, одержимо рівняння, еквівалентне (2.13). Залишаються рівняння (2.11) і (2.12). Спростивши останнє, одержуємо:

$$e - a = \frac{b}{c_3 m_2} (c_1 m_2 - c_2 m_1). \quad (2.15)$$

Якщо врахувати ще умову  $ZB_2 = B_2Z$ , то додається ще рівняння:

$$e - a = \frac{b}{\beta_3 m_2} (\beta_1 m_2 - \beta_2 m_1) \quad (2.16)$$

Дорівнявши праві частини останніх двох рівностей, одержуємо

$$b(c_3(\beta_1 m_2 - \beta_2 m_1) - \beta_3(c_1 m_2 - c_2 m_1)) = 0 \quad (2.17)$$

Отже, або  $b = 0$ , або вираз в дужках дорівнює 0.

У першому випадку з рівнянь (2.15) і (2.11) одержуємо, що матриця  $Z$  є пропорційною одиничній матриці, і розщеплення є неможливим. У другому випадку справедлива рівність:

$$c_3(\beta_1 m_2 - \beta_2 m_1) = \beta_3(c_1 m_2 - c_2 m_1) \quad (2.18)$$

При цьому рівняння (2.16) є еквівалентним рівнянню (2.15). З рівнянь (2.11) і (2.15) одержуємо змінні  $a$  і  $c$ . Матриця  $Z$  має вигляд:

$$Z = \begin{bmatrix} e - bN & b \\ b \frac{m_1}{m_2} & e \end{bmatrix} = eE + b \begin{bmatrix} -N & 1 \\ \frac{m_1}{m_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

де  $N = \frac{1}{c_3 m_2} (c_1 m_2 - c_2 m_1)$ ,  $e$  і  $b$  — вільні змінні.

Власні числа матриці  $Z$  будуть різними тільки у випадку, коли різні власні числа другої матриці у виразі (2.19). Ці числа дорівнюють:

$N_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -N \pm \sqrt{N^2 + 4 \frac{m_1}{m_2}} \right)$ . Вони будуть різними за виконанням умови:

$$N^2 + 4 \frac{m_1}{m_2} \neq 0. \quad (2.20)$$

Отже, розщеплення рівнянь (2.8) є можливим тоді й тільки тоді, коли виконується умова (2.20). Помітимо, що ця формула збігається з результатом, отриманим в інший спосіб (див. [85, 17]).

## 2.4. Дійсні матриці коефіцієнтів

Розглянемо рівняння (2.1) у випадку, коли матриці  $B_i$  і вектор  $x$  є дійсним. Часто виникає задача розщеплення цих рівнянь при використанні тільки дійсних перетворень.

Для дійсної матриці  $D$  введемо матрицю  $U(D)$  таку, що дійсні стовпці матриць  $v(D)$  і  $U(D)$  збігаються, а на місці кожної пари комплексно спряжених векторів-стовпців  $\mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$  матриці  $v(D)$ , що відповідають комплексно спряженим власним числам  $\alpha \pm i\beta$  матриці  $D$ , у матриці  $U(D)$  розташовані дійсні стовпці  $\mathbf{a}$  і  $\mathbf{b}$ . Помітимо, що багато комп'ютерних програм обчислення власних векторів видають результат у вигляді матриці  $U(D)$ .

Таким чином,  $U(D)$  — дійсні матриці, причому  $U^{-1}(D)DU(D) = \Phi(D)$ , де  $\Phi(D)$  — дійсна матриця, аналогічна жордановій формі  $\text{Gr}(D)$  матриці  $D$ , але не маюча комплексних чисел. Наприклад, замість пари комплексно спряжених власних чисел на головній діагоналі матриці  $\text{Gr}(D)$ , що утворюють блок  $\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$ , у матриці  $\Phi(D)$  стоїть блок другого порядку:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Для випадку дійсних змінних виконуються теореми, аналогічні теоремам, доведеним для загального випадку, але замість матриці  $v(D)$  використовується матриця  $U(D)$ , замість умови: «хоча б два різні власні числа» — ставиться умова: «хоча б два різні власні числа, що мають невід'ємні уявні частини». Кількість підсистем, що виходять за допомогою

тільки дійсних перетворень, може бути меншою, ніж у загальному випадку.

Наприклад, матриці  $C_1 = E$ ,  $C_2 = C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  не приводяться до діагонального вигляду дійсними перетвореннями, але приводяться комплексними.

Випадок симетричних дійсних матриць розглянуто в підрозділі 2.12.

## **2.5. Комп'ютерне знаходження множини матриць, комутуючих з даними матрицями**

У даному підрозділі наведено описи алгоритмів розв'язання обчислювальних задач, необхідних для застосування методів, викладених у другому й у третьому розділах. Особливу увагу приділено обчислювальній задачі знаходження загального розв'язку системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь. Це пояснюється тим, що серед величезної кількості алгоритмів і програм розв'язання систем рівнянь є лише кілька програм для знаходження загального розв'язку, тобто базису в просторі розв'язків. Але й ці програми призначені для «звичайних» систем рівнянь, у той час як застосовувані тут методи вимагають знаходження розв'язку великих розріджених систем рівнянь і враховують специфіку задачі.

Ефективність обчислювального методу, як правило, залежить не тільки від ідеї цього методу, а й від того, як ця ідея реалізується. Часто незначні (на перший погляд) зміни в алгоритмі можуть суттєво змінити його надійність або швидкодію. Тому найцікавіші комп'ютерні програми наведено в основному тексті дисертації. Вони і є чіткими описами відповідних алгоритмів. Мова програмування (Фортран) не відіграє особливої ролі, оскільки ці програми легко переводяться на будь-яку іншу мову.

Про те, якими далекими є багато теоретичних курсів лінійної алгебри від практичних потреб, написано в статті В. В. Воєводіна [7]. Про це свідчать й інші автори (див. В. А. Лазарян й ін. [12]).

Відомим є спосіб знаходження загального розв'язку системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, пов'язаний із відшукуванням базисного мінору. Для цього потрібно обчислити всі можливі мінори матриці коефіцієнтів. Зрозуміло, що такий спосіб є незручним для комп'ютерних розрахунків. Тим більш що самі визначники все одно обчислюються за допомогою якого-небудь алгоритму, наприклад, за методом Жордана — Гаусса.

Усі розповсюджені бібліотеки «стандартних» програм для ПЕОМ містять програми знаходження розв'язку у випадках, коли система рівнянь має не більш одного розв'язку; порівняно мало програм для знаходження загального розв'язку у випадку систем рівнянь із нескінченною множиною розв'язків. Виключення із цього правила — алгоритми *svd* і *minfit* Уілкінсона [20].

У цьому підрозділі викладено обчислювальний метод розв'язання зазначеної задачі. Він являє собою метод виключення невідомих, аналогічний методу Жордана — Гаусса, але враховуючий також відкидання «зайвих» рівнянь, тобто рівнянь, що є лінійною комбінацією інших. Окрім того, передбачено вибір провідного елемента таким чином, щоб значно скоротити загальний обсяг обчислень. Це приймання, як показала практика обчислень із розрідженими матрицями коефіцієнтів, дозволяє одночасно збільшити точність одержуваних результатів. Розроблений обчислювальний метод використовується для застосування методу комутуючої матриці і для розв'язання багатьох інших задач.

При використанні методу комутуючої матриці доводиться вирішувати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь. Таку саму обчислювальну задачу необхідно вирішувати і при використанні ряду інших



- 1) множення одного з рівнянь на число, що не дорівнює нулю;
- 2) вирахування одного рівняння, помноженого на деяке число, з іншого.

Д о в е д е н н я . Нехай вектори  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  є лінійно незалежними, тобто  $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \forall \alpha_i = 0$ . Нехай для визначеності перетворення зазнає перший вектор. Виконаємо перетворення 1, тобто  $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{c} \mathbf{a}_1$  ( $c \neq 0$ ) й  $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i$  при  $i > 1$ . Тоді

$$\sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\beta_1}{c} \mathbf{a}_1 + \sum_{i=2}^k \beta_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\beta_1}{c} = 0, \beta_i = 0, i = \overline{2, k} \Rightarrow \forall \beta_i = 0.$$

Виконаємо перетворення 2, тобто  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 - p \mathbf{a}_s$  і  $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i (i > 1)$ . Тоді

$$\sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{i \neq s} \beta_i \mathbf{a}_i + (\beta_s - p \beta_1) \mathbf{a}_s = \mathbf{0} \Rightarrow \forall \beta_i = 0.$$

У випадку лінійної залежності доведення є аналогічним. ■

Д о в е д е н н я т е о р е м и 2.3.

а) Перетворена матриця містить стовпці з номерами  $s_j, j = \overline{1, k}$ , у яких на  $j$ -м місці стоїть одиниця, а інші елементи дорівнюють нулю. Блок  $A_1$  перетвореної матриці, що містить перші  $k$  рядків, має ранг  $k$ , оскільки стовпці з номерами  $s_j$  лінійно є незалежними.

б) При виконанні кроків методу Жордана — Гаусса без перестановки рядків використовуються тільки перетворення, перераховані в лемі, тому рядок з номером  $k+1$  перетвореної матриці є лінійною комбінацією попередніх рядків. Якби він не був нульовим, то було б можливе виконання наступного  $(k+1)$ -го кроку методу Жордана — Гаусса. У цьому випадку перші  $(k+1)$  рядків стали б лінійно незалежними (перша частина

теорему). Цього не може бути, оскільки властивість лінійної залежності рядків при виконанні чергового кроку зберігається. ■

Отже, для відкидання всіх «зайвих» рядків достатньо передбачити далі додаткові операції. Перед вибором провідного елемента в черговому рядку робиться перевірка: чи є цей рядок нульовим. Якщо ця умова виконується, то рядок відкидається.

Після закінчення описаних вище обчислень перетворена матриця складається з  $r$  рядків, де  $r$  — ранг початкової матриці. Перетворена матриця містить  $r$  стовпців, що є одиничними векторами порядку  $r$ . Для спрощення подальших міркувань переставимо стовпці матриці так, щоб  $k$ -й одиничний вектор стояв на  $k$ -м місці. Перестановці стовпців відповідає перенумерація невідомих. Система рівнянь здобуває вигляд

$$[E_r, A_2] \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow E_r \mathbf{y}_1 + A_2 \mathbf{y}_2 = \mathbf{0}, \quad (2.22)$$

де блок  $A_2$  поєднує останні  $n - r$  стовпців перетвореної матриці, вектор  $\mathbf{y}_1$  складається з перших  $r$  невідомих із новими номерами, а вектор  $\mathbf{y}_2$  — з інших невідомих. Рівність (2.22) перепишемо так:

$$\mathbf{y}_1 = -A_2 \mathbf{y}_2. \quad (2.23)$$

Звідси видно, що невідомим, які входять у вектор  $\mathbf{y}_2$  (вільним невідомим), можна привласнити довільні значення й обчислити відповідні значення невідомих, що входять у вектор  $\mathbf{y}_1$  (базисних невідомих). Для одержання загального розв'язку початкової системи рівнянь можна послідовно привласнювати вектору  $\mathbf{y}_2$  значення, що дорівнюють одиничним векторам  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-r}$  порядку  $n - r$ , й обчислювати відповідні значення вектора  $\mathbf{y}_1$ . Отримані вектори



$$\mathbf{y}^{(k)} = \begin{bmatrix} -A_2 \mathbf{e}_k \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix}$$

утворюють базис у множині всіх розв'язків початкової системи рівнянь.

**Приклад 2.2.** Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} 1) & 4x_1 - x_2 + 3x_4 = 0, \\ 2) & 7x_1 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ 3) & -0,7x_2 - 2x_3 + 1,7x_4 = 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Хід розв'язання наведено в таблиці 2.1. Перед кожним кроком методу записано рядок чисел, у якому ненульові числа стоять лише в тих стовпцях, де вже вибирався провідний елемент. Ці числа дорівнюють номерам відповідних рядків, де був раніше обраний провідний елемент. Він вибирається як максимальний із абсолютної величини елементів рядка. Перетвореній матриці відповідає така система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0,25x_2 + 0,75x_4 = 0, \\ 0,35x_2 + x_3 - 0,85x_4 = 0. \end{cases}$$

Вільними невідомими тут є  $x_2$  і  $x_4$ . Це видно також з того, що в допоміжному рядку залишилися нульовими другий і четвертий елементи. Привласнивши вільним невідомим значення  $x_2^{(1)} = 1, x_4^{(1)} = 0$ , одержимо:  $x_1^{(1)} = 0,25; x_3^{(1)} = -0,35$ . Аналогічно, при  $x_2^{(2)} = 0, x_4^{(2)} = 1$  маємо:  $x_1^{(2)} = -0,75; x_3^{(2)} = 0,85$ .

Отже, базис множини всіх розв'язків системи рівнянь такий:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 1 \\ -0,35 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0,75 \\ 0 \\ 0,85 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таблиця 2.1

Розв'язання системи рівнянь (2.24)

Рівняння системи (2.4)	Коефіцієнт при невідомих				Коментар
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	0	0	0	0	Допоміжний рядок
1)	4	-1	0	-3	Початкова система рівнянь
2)	7	0	5	1	
3)	0	-0,7	-2	1,7	
	1	0	0	0	Допоміжний рядок
1)' = 1)/4	1	-0,25	0	0,75	Перший крок методу
2)' = 2) - 1)' · 7	0	1,75	5	-4,25	
3)' = 3) - 1)' · 0	0	-0,7	-2	1,7	
	1	0	2	0	Допоміжний рядок
1)'' = 1)' - 2)'' · 0	1	-0,25	0	0,75	Другий крок методу
2)'' = 2)'/5	0	0,35	1	-0,85	
3)'' = 3)' - 2)'' (-2)	0	0	0	0	
	1	0	2	0	Допоміжний рядок
1)''' = 1)''	1	-0,25	0	0,75	Відкидання нульових рядків
2)''' = 2)''	0	0,35	1	-0,85	

Багато практичних задач приводять до систем рівнянь із розрідженими матрицями, тобто матрицями, що містять велику кількість нульових коефіцієнтів. У цих випадках доцільно вибирати провідний елемент у рядку з мінімальною кількістю ненульових елементів, причому вибирати найбільший

з абсолютної величини елемент рядка. Як показала практика розв'язання таких задач, викладений вище спосіб вибору провідного елемента зазвичай дозволяє значно скоротити загальний обсяг обчислень, а також підвищити точність одержуваних результатів.

Нижче наведено програму знаходження загального розв'язку системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь. Провідний елемент вибирається в рядку з мінімальною кількістю ненульових елементів. Для цього перед черговим  $k$ -м кроком методу проглядаються всі рядки від  $k$ -го до останнього рядка, й обраний рядок переставляється на  $k$ -е місце. Далі вибирається максимальний із абсолютної величини елемент рядка.

При виконанні розрахунків на ПЕОМ коефіцієнти рівнянь, що є лінійною комбінацією попередніх, стають у процесі виключень нульовими з точністю до помилок округлення, пов'язаних з обмеженістю розрядної сітки ПЕОМ. Тому вводяться два числа: абсолютна похибка ( $\varepsilon_1$ ) і відносна ( $\varepsilon_2$ ). У випадку, коли при вирахуванні двох близьких чисел виходить коефіцієнт, менший за абсолютною величиною, ніж добуток  $\varepsilon_2$  на одне із цих чисел, коефіцієнту привласнюється нульове значення. Якщо отриманий коефіцієнт за абсолютною величиною є меншим за  $\varepsilon_1$ , йому також привласнюється нульове значення. Рядок відкидається, коли максимальна з абсолютних величин елементів рядка є меншою за  $\varepsilon_1$ .

Після закінчення розрахунків за зазначеною схемою вектору вільних невідомих послідовно привласнюються значення одиничних векторів  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-r}$  і в кожному випадку обчислюється відповідний набір базисних невідомих за формулою (2.23).

Звертання до програми таке: CALL SLAU5 (A, NN, M, E1, E2, L, V, N2, N3, KB), де A — дійсний двовимірний масив розмірністю  $NN \times M$ , що містить коефіцієнти системи рівнянь. Після роботи програми перші  $(M - L)$  рядків матриці A містять вектори базису підпростору, натягнутого на

вектори-рядки початкової матриці  $A$ . У головній програмі масив  $A$  може мати розмірність більшу за  $NN \times M$ ;  $NN$  — кількість рівнянь (INTEGER);  $M$  — кількість невідомих (INTEGER);  $E1, E2$  — абсолютна й відносна погрешності. Рекомендованими значеннями є відповідно  $1.0E-15$  і  $1.0E-9$  (REAL);  $L$  — кількість знайдених лінійно незалежних розв'язків (INTEGER);  $V$  — дійсний двовимірний масив розмірністю  $N3 \times M$ , після роботи програми в його перших  $L$  рядках перебувають знайдені лінійно незалежні розв'язки;  $N2$  — число рядків в описі масиву  $A$  в головній програмі ( $N2 = NN$ ),  $N3$  — число рядків в описі масиву  $V$  у головній програмі. При невідомому заздалегідь числі  $L$  треба задавати  $N3 = M$ . Якщо виявилось  $N3 < L$ , то лінійно незалежні розв'язки не складаються й робота програми закінчується після перетворення матриці  $A$  та обчислення числа  $L$ ;  $KB$  — цілий одновимірний робочий масив розмірністю  $M$ .

Програма SLAU5 може використовуватися також і для розв'язання таких задач:

- а) визначення рангу матриці;
- б) перевірка лінійної залежності векторів;
- в) визначення кількості лінійно незалежних векторів серед даних векторів і вибір базису в підпросторі, натягнутому на задані вектори;
- г) знаходження підпростору, ортогонального даному.

Для обчислення рангу матриці треба звернутися до програми SLAU5, задавши замість матриці коефіцієнтів системи рівнянь задану матрицю, а замість чисел  $NN$  і  $M$  — відповідно числа її рядків і стовпців. Ранг матриці буде дорівнювати  $M - L$ .

Для розв'язання задач б), в) і г) потрібно звернутися до програми SLAU5, попередньо розташували в рядках масиву  $A$  задані вектори. У цьому випадку  $NN$  — число векторів,  $M$  — їх порядок.

Ознака лінійної залежності векторів:  $M - L < NN$ .

Кількість лінійно незалежних векторів буде дорівнювати  $M - L$ .

Вектори базису в підпросторі, натягнутому на задані вектори, після роботи програми будуть розташовані в перших  $M - L$  рядках масиву  $A$ .

Базисом підпростору, що є ортогональним доповненням до підпростору, натягнутого на задані вектори, буде загальний розв'язок системи рівнянь (перші  $L$  рядків матриці  $V$ ). Дійсно, запис  $Ax = 0$  означає, що скалярний добуток чергового рядка на вектор  $x$  дорівнює нулю, тобто вектор-стовпець, складений з елементів рядка матриці, є ортогональним до вектору  $x$ . Загальний розв'язок — це і є всі ті вектори, які є ортогональними всім рядкам матриці.

Текст програми SLAU5 такий:

```

SUBROUTINE SLAU5 (A, NN, M, E1, E2, L, V, N2, N3, NMB)
C  ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
C  УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ РАЗРЕЖЕННОСТИ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ
C  А В Т О Р :   Ю.Н. БАЗИЛЕВИЧ (ИТМ НАН УКРАИНЫ)
C-----
C  A - МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ.
C  NN*M - ЕЕ РАЗМЕРНОСТЬ.
C  E1, E2 - АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГР.
C  L - К-ВО ЛИН. НЕЗАВИСИМЫХ РЕШЕНИЙ
C  NMB - В МАССИВЕ ОТМЕЧАЮТСЯ БАЗИСНЫЕ ПЕРЕМ.
C  V - В ПЕРВЫЕ L СТРОК МАТРИЦЫ ЗАНОСЯТСЯ ЛИН. НЕЗАВ. РЕШЕНИЯ
C  N2 - ЧИСЛО СТРОК В ОПИСАНИИ МАТР. A
C  N3 -           - " -           V
C-----
      DIMENSION A (N2, M), NMB (M), V (N3, M)
      INTEGER VEDSTR
      N=NN
      DO 5 I=1, M
5         NMB (I) =0
C.....

```

```

VEDSTR=1
3   CONTINUE
C
   IF (VEDSTR.GT.N) GO TO 6
C...ПОИСК СТРОКИ С МИН. К-ВОМ ЭЛ-ТОВ
MINKBO=M
MINC=VEDSTR
DO 30 I=VEDSTR,N
   KEL=0
   DO 31 J=1,M
     P=ABS(A(I,J))
31   IF (P.GT.E1) KEL=KEL+1
     IF (KEL.GE.MINKBO) GO TO 30
     MINKBO=KEL
     MIN C=I
30   CONTINUE
   DO 32 J=1,M
     R=A(VEDSTR,J)
     A(VEDSTR,J)=A(MIN C,J)
32   A(MIN C,J)=R
C...ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ - НАИБОЛЬШИЙ В СТРОКЕ
K=1
DO 1 J=2,M
   P=ABS(A(VEDSTR,J))
   P2=ABS(A(VEDSTR,K))
1   IF (P.GT.P2) K=J
   S=A(VEDSTR,K)
   P=ABS(S)
   IF (P.GT.E1) GO TO 2
C УДАЛЕНИЕ СТРОКИ
N=N-1
IF(VEDSTR.GT.N) GO TO 3
DO 4 K1=VEDSTR,N
   DO 4 J=1,M

```

```

4           A(K1,J)=A(K1+1,J)
           GO TO 3
2           NMB(K)=VEDSTR
С...ЖОРДАНОВЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ
           DO 9 J=1,M
9           A(VEDSTR,J)=A(VEDSTR,J)/S
           DO 7 I=1,N
           IF (I.EQ.VEDSTR) GO TO 7
           AMHOG=A(I,K)
           DO 10 J=1,M
           P=ABS(A(I,J))
           A(I,J)=A(I,J)-A(VEDSTR,J)*AMHOG
           P2=ABS(A(I,J))
10          IF (P2.LT.E2*P .OR. P2.LT.E1) A(I,J)=0.
7           CONTINUE
           VEDSTR=VEDSTR+1
           GO TO 3
6           CONTINUE
           L=M-N
СОСТАВЛЕНИЕ ЛИН.НЕЗАВ. РЕШЕНИЙ
           IF (L.GT.N3) RETURN
           DO 12 I=1,L
           DO 12 J=1,M
12          V(I,J)=0.
           K=0
           DO 13 I=1,M
           IF(NMB(I).NE.0) GO TO 13
           K=K+1
           V(K,I)=1.
           DO 14 J=1,M
14          IF (NMB(J).NE.0) V(K,J)=-A(NMB(J),I)
13          CONTINUE
           RETURN
           END

```

У якості тестового прикладу використано рівняння (2.24). Приведемо текст перевіряючої програми:

```

PROGRAM OTL
  DIMENSION A(15,15),V(15,15),NMB(15)
1,A2(3,4)
  DATA A2/4.0,7.0,0.0,
1      -1.0,0.0,-0.7,
2      0.0,5.0,-2.0,
3      3.0,1.0,1.7/
  NN=3
  M=4
  DO 8 I=1,3
    DO 8 J=1,4
8      A(I,J)=A2(I,J)
  PRINT 23,((A(I,J),J=1,4),I=1,3)
C -----
  CALL SLAU5(A,NN,M,1.0E-15,1.0E-9,L,V,15,15,NMB)
C -----
  IR=M-L
  PRINT 24,(I,(V(I,J),J=1,4),I=1,L)
  PRINT 25,IR
  PRINT 26
  IF (IR.EQ.NN) PRINT 27
  IF (IR.LT.NN) PRINT 28
  PRINT 29,(I,(A(I,J),J=1,4),I=1,IR)
23  FORMAT (/2X,'ИСХОДНАЯ МАТРИЦА (КОЭФИЦИЕНТЫ',
1    'СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ) '/(4F7.2))
24  FORMAT (/2X,'ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ РЕШЕНИЯ'/
1    (2X,I4,') .',3X,4F8.4))
25  FORMAT (/2X,'РАНГ МАТРИЦЫ РАВЕН:',I4/)
26  FORMAT (/2X,'ВЕКТОРЫ СТРОКИ МАТРИЦЫ -')
```



```

27  FORMAT (2X, 'ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫ.' /)
28  FORMAT (2X, 'ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ.' /)
29  FORMAT (/2X, 'БАЗИС ПОДПРОСТРАНСТВА, НАТЯНУТОГО ',
1   ' НА ВЕКТОРЫ-СТРОКИ МАТРИЦЫ.' / (2X, I4, ') . '4F8.4) )
    STOP
    END

```

### Результати розрахунків:

ИСХОДНАЯ МАТРИЦА (КОЭФФИЦИЕНТЫ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ)

```

4.00  -1.00  0.00  3.00
7.00   0.00  5.00  1.00
0.00  -0.70 -2.00  1.70

```

ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ РЕШЕНИЯ

```

1) .    0.2500  1.0000 -0.3500  0.0000
2) .   -0.7500  0.0000  0.8500  1.0000

```

РАНГ МАТРИЦЫ РАВЕН: 2

ВЕКТОРЫ СТРОКИ МАТРИЦЫ -  
ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ.

БАЗИС ПОДПРОСТРАНСТВА, НАТЯНУТОГО НА ВЕКТОРЫ-СТРОКИ МАТРИЦЫ.

```

1) .  1.0000 -0.2500  0.0000  0.7500
2) .  0.0000  0.3500  1.0000 -0.8500

```

Для створення комплексного варіанта CSLAU програми SLAU5 необхідно внести до неї такі зміни:

- а) додати опис COMPLEX A, V, R, S, AMHOЖ;
- б) всі бібліотечні функції ABS замінити функціями CABS;

в) дійсні константи 0. і 1. замінити відповідно на комплексні константи (0., 0.) і (1., 0.).

При використанні цієї програми слід урахувати, що масиви  $A$  і  $V$  є комплексними. В решті використання програми CSLAU є таким самим, як і SLAU5.

Програма CSLAU може використовуватися для знаходження власних векторів довільної матриці  $A$ , що відповідають відомому власному числу. Дійсно, вирішуючи систему рівнянь  $(A - \lambda_k E) x = 0$ , ми одержуємо всі лінійно незалежні власні вектори  $x_k$ , відповідні до власного числа  $\lambda_k$ .

Розглянутий алгоритм знаходження загального розв'язання можна застосувати і для неоднорідних рівнянь. Відмінність полягає в тому, що в таблицю методу Жордана — Гаусса додатково вводиться стовпець вільних членів. Неважко довести, що якщо розглянута система рівнянь є не сумісною, то на одному із кроків методу при виборі провідного елемента виявиться, що в розглянутому рядку всі коефіцієнти при невідомих є нульовими, а вільний член не дорівнює нулю. А якщо ні, то розрахунки за методом Жордана — Гаусса буде успішно закінчено. Перетворена система рівнянь буде відрізнятися від системи (2.23) наявністю в правій частині цієї формули другого доданка — постійного вектора. Подальша побудова загального розв'язку не викликає труднощів.

Можна розв'язати неоднорідну систему рівнянь і не змінюючи комп'ютерну програму (SLAU5 або аналогічну). Для цього замість системи рівнянь  $Ax = \mathbf{b}$  складаємо систему рівнянь

$$A_p \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (2.25)$$

де  $A_p$  — розширена матриця коефіцієнтів, тобто така, що до матриці коефіцієнтів  $A$  праворуч приєднаний вектор вільних членів  $\mathbf{b}$ ;  $\mathbf{y}$  — вектор, що має розмірність більшу на одиницю, ніж вектор  $\mathbf{x}$ . Нова система є

еквівалентною до попередньої у випадку, коли останній елемент вектора  $y$  рівний мінус одиниці:  $y_{m+1} = -1$ . Тому, одержавши базис  $y$  множині розв'язків системи (2.25), вибираємо такий вектор базису, у якого  $y_{m+1} \neq 0$  і множимо цей вектор на таке число, при якому останній елемент буде дорівнювати мінус одиниці. Попередні  $m$  елементів вектора  $y$  утворюють частинний розв'язок початкової системи рівнянь, тобто вектор  $x$ . Загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь, як відомо, дорівнює сумі частинного розв'язку неоднорідної системи й загального розв'язку відповідної однорідної системи рівнянь.

У традиційному випадку, коли матриця  $A$  є квадратною й невинродженою, при розв'язанні рівнянь (2.25) буде отримано один вектор базису, й умову  $y_{m+1} \neq 0$  буде виконано. Помноживши вектор базису на число  $-1/y_{m+1}$ , одержимо вектор з розв'язком початкової системи рівнянь.

Для знаходження множини матриць, комутуючих з даними матрицями, розроблено програму CENTER. Алгоритм роботи програми полягає в складанні й розв'язанні за допомогою програми SLAU5, описаної в попередньому підрозділі, системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, відповідних до матричних рівнянь

$$ZB_i = B_iZ, I = \overline{1, k}, \quad (2.26)$$

де  $B_i$  — задані матриці;  $Z$  — невідома матриця.

Звертання до програми таке: CALL CENTER (B, NB, NB2, NB3, KBOB, A, V, C, L, NMB), де  $B$  — дійсний тривимірний масив розмірністю  $NB \times NB \times KBOB$ , що містить  $KBOB$  початкових квадратних матриць порядку  $NB$ . Перша з початкових матриць розташована в таких елементах масиву:  $B(i, j, 1)$  ( $i = \overline{1, NB}$ ,  $j = \overline{1, NB}$ ), друга —  $B(i, j, 2)$  і т. д.,  $NB$  — порядок початкових матриць;  $NB2 = NB \times NB$ ;  $NB3 = 2 \times NB2$ ;  $KBOB$  — кількість початкових

матриць;  $A, V$  — дійсні робочі двовимірні масиви розмірністю відповідно  $NB3 \times NB2$  і  $NB2 \times NB2$ ;  $C$  — дійсний тривимірний масив розмірністю  $NB \times NB \times NB$ , перші  $L$  шарів якого містять знайдені матриці базису шуканого централізатора, тобто множини всіх матриць, комутуючих з даними. Шаром називаємо множину елементів тривимірного масиву, що відповідає фіксованому третьому індексу;  $L$  — кількість матриць, що є базисом шуканої множини;  $NMB$  — цілий одновимірний робочий масив розмірністю  $NB2$ .

Текст програми CENTER такий:

```

SUBROUTINE CENTER(B,NB,NB2,NB3,КВОВ,A,V,C,L,NMB)
C  НАХОЖДЕНИЕ МНОЖЕСТВА МАТРИЦ, КОММУТИРУЮЩИХ С
C  ДАННЫМИ МАТРИЦАМИ (ЦЕНТРАЛИЗАТОР)
C  А В Т О Р Ы :   Ю.Н. БАЗИЛЕВИЧ, Л.М. КОРОТЕНКО,
C                   Г.М. КОРОТЕНКО (ИТМ НАН УКРАИНЫ)
C-----
C  В - ИСХОДНЫЕ МАТРИЦЫ
C  NB,КВОВ - ИХ ПОРЯДОК I КОЛИЧЕСТВО
C  A,V,NMB - РАБОЧИЕ МАССИВЫ
C  NB2=NB*NB, NB3=2*NB2
C  C - ВЫЧИСЛЕННЫЕ МАТРИЦЫ БАЗИСА ИСКОМОГО МН-ВА
C  L - КОЛИЧЕСТВО ЭТИХ МАТРИЦ
C-----
      DIMENSION  B(NB,NB,КВОВ), A(NB3,NB2),
1              V(NB2,NB2), C(NB,NB,NB2),
2              NMB(NB2)
C-----
      NH=0
      M =NB*NB
      N4=1
C  NH - ЧИСЛО УРАВНЕНИЙ, СОСТАВЛЕННЫХ РАНЕЕ
C  M - ЧИСЛО НЕИЗВЕСТНЫХ

```

```

DO 1 IB=1,KBO B
  NN=NH+M
  N1=NH+1
C ...ОЧИСТКА МЕСТА ДЛЯ НОВЫХ УРАВНЕНИЙ
  DO 8 I=N1,NN
    DO 8 J=1,M
8      A(I,J)=0.
C ...СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ
  DO 3 I=1,NB
    DO 3 J=1,NB
      IA=(I-1)*NB+J+NH
      DO 6 K=1,NB
        JA=(K-1)*NB+J
6      A(IA,JA)=B(I,K,IB)
      DO 3 K=1,NB
        JA=(I-1)*NB+K
3      A(IA,JA)=A(IA,JA)-B(K,J,IB)
C ...РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ
  IF (IB.EQ.KBO B) N4=NB2
  CALL SLAU5 (A,NN,M,1.E-15,1.E-9,L,V,NB3,N4,NMB)
  NH=M-L
1  CONTINUE
C-----
C...ЗАПОЛНЕНИЕ МАТРИЦЫ C
  DO 9 K=1,L
    DO 9 I=1,NB
      DO 9 J=1,NB
9      C(I,J,K)=V(K,(I-1)*NB+J)
  RETURN
  END

```

У якості тестового прикладу використано матриці (1.3). Для перевірки підпрограми CENTER за допомогою цього прикладу складено програму:

```

PROGRAM KMAT
  DIMENSION BB(3,3,3),B(3,3),A(18,9),V(9,9),
1          C(3,3,3), NMB(9)
          OPEN(8,FILE='numbers.TXT')
C-----
          READ(8, 57) KBO B, NB
C  NB - ПОРЯДОК МАТРИЦЫ B
          PRINT 51,KBO B, NB
          DO 1 K=1,KBOB
              READ(8, 5) ((B(I,J),J=1,NB),I=1,NB)
              PRINT 4,K
4          FORMAT (I5,'-Я ИСХОДНАЯ МАТРИЦА')
              DO 20 I=1,NB
                  PRINT 22, (B(I,J), J=1,NB)
20          CONTINUE
C...ПЕРЕСЫЛКА МАТРИЦЫ B ТРЕХМЕРНЫЙ МАССИВ
          DO 1 I=1,NB
              DO 1 J=1,NB
1          BB(I,J,K)=B(I,J)
          NB2=NB*NB
          NB3=2*NB2

          CALL CENTR(BB,NB,NB2,NB3,KBOB,A,V,C,L,NMB)
C...ПЕЧАТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ
          PRINT 7
7          FORMAT (2X'РЕЗУЛЬТАТЫ')
              DO 3 K=1,L
                  PRINT 55,K
                  DO 3 I=1,NB
3          PRINT 22, (C(I,J,K),J=1,NB)
51          FORMAT (2X,'К-ВО МАТРИЦ:',I3,',', ПОРЯДОК =',I3)
22          FORMAT (10E12.5)
55          FORMAT (/I5,'-Я МАТРИЦА НАЙДЕННОГО БАЗИСА')

```

```
57  FORMAT (2I3)
5   FORMAT (E4.2)
    END
```

Числовий матеріал до цієї програми перебуває у файлі numbers.TXT. Одиначна матриця не включена до числового матеріалу, оскільки її відсутність не впливає на результат. Текст файлу numbers.TXT:

```
002003
0.
0.
0.
0.
0.
0.
0.
0.
5.
3.
2.
-1.
32.
3.
4.
8.
-2.
5.
```

Результати розрахунків наведено нижче.

```
К-ВО МАТРИЦ:  2,  ПОРЯДОК =  3
1-Я ИСХОДНАЯ МАТРИЦА
.000000E+00  .000000E+00  .000000E+00
```

```
.00000E+00 .00000E+00 .00000E+00
.00000E+00 .00000E+00 .50000E+01
```

2-Я ИСХОДНАЯ МАТРИЦА

```
.30000E+01 .20000E+01 -.10000E+01
.32000E+02 .30000E+01 .40000E+01
.80000E+01 -.20000E+01 .50000E+01
```

Р Е З У Л Ь Т А Т Ы

1-Я МАТРИЦА НАЙДЕННОГО БАЗИСА

```
.25000E+00 .62500E-01 .00000E+00
.10000E+01 .25000E+00 .00000E+00
.00000E+00 .00000E+00 .00000E+00
```

2-Я МАТРИЦА НАЙДЕННОГО БАЗИСА

```
.10000E+01 .00000E+00 .00000E+00
.00000E+00 .10000E+01 .00000E+00
.00000E+00 .00000E+00 .10000E+01
```

Кожному матричному рівнянню відповідає  $n^4$  елементів при звичайному записі системи рівнянь. Тому програма CENTER безпосередньо дозволяє вирішувати задачі з матрицями порівняно невеликих порядків.

Для матриць великого порядку складено програми, що реалізують той самий алгоритм, що і програми SLAU5, CENTER, але при компактному зберіганні даних [5]. Тексти цих програм наведено в додатку А й додатку Б. Система однорідних алгебраїчних рівнянь, що відповідає (2.26), містить дуже багато нульових елементів. Тому програми побудовано таким чином, що нульові елементи не зберігаються в пам'яті машини. Їхнє зберігання організовано за правилами, прийнятими у системах керування базами даних. Для цих цілей уведено три стовпці, при цьому перший стовпець файлу містить номер рядка, другий стовпець містить номер стовпця цього елемента й третій стовпець містить значення елемента.



Наприклад, для рівнянь (2.24) початкова матриця коефіцієнтів системи рівнянь така:

4.00	-1.00	0.00	3.00
7.00	0.00	5.00	1.00
0.00	-0.70	-2.00	1.70

Тому стовпці, у яких зберігається ця матриця, мають вигляд:

1	1	4.00000
1	2	-1.00000
1	4	3.00000
2	1	7.00000
2	3	5.00000
2	4	1.00000
3	2	-0.70000
3	3	-2.00000
3	4	1.70000

Такий варіант програми SLAU5 було використано при знаходженні базису в множині розв'язків рівнянь із матрицею коефіцієнтів розмірністю  $578 \times 289$ . Для перевірки програми було використано розріджені матриці з колекції [29]. Використовано такі приклади квадратних матриць повного рангу: Arc130, 1138\_bus, bcsstk28. Остання з них має порядок  $n = 4410$ , матриця є заповненою ненульовими елементами на 1,13 %. До цих матриць було додано праву частину й за допомогою формули (2.25) програма SLAU5 було застосовано для розв'язання неоднорідної системи рівнянь.

Оцінимо те, наскільки розрідженою буде матриця  $A$  коефіцієнтів системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь  $Ax = \mathbf{0}$ , відповідна до системи матричних рівнянь (2.26). Число рядків матриці  $A$  дорівнює  $kn^2$ , а стовпців —  $n^2$ , де  $n$  — порядок початкових матриць  $\{B_i\}$ ,  $k$  — їх кількість.

Уважаємо, що початкові матриці є заповненими на 25 %, тому число ненульових елементів матриці  $B_i$  дорівнює  $0,25 n^2$ . Кожний із цих елементів входить у чергове рівняння вигляду (2.26)  $2n$  разів. Одержуємо що число ненульових елементів матриці  $A$  дорівнює  $0,5kn^3$  при загальному числі елементів  $kn^4$ . Отже, наповненість матриці  $A$  дорівнює  $\frac{0,5}{n}$ . При  $n = 17$  ця величина становить 3 %, а при  $n = 65$  вона дорівнює 0,7 %.

Тут не розглянуто алгоритми знаходження власних чисел і векторів матриць, оскільки для їхнього знаходження в теперішній час існують ефективні обчислювальні алгоритми, розроблені Уілкінсоном і його послідовниками [138, 22].

## 2.6. Системи рівнянь, які є близькими до розщеплюваних систем

Як було зазначено раніше, можливість або неможливість розщеплення рівнянь залежить від властивостей розрахункової схеми, що відповідає досліджуваній фізичній системі. Як правило, до комп'ютера вводяться наближені початкові дані. Тому становить інтерес задача виявлення випадків, коли досліджувана система рівнянь не розщеплюється, але близька до такої системи рівнянь, для якої існує перетворення змінних, що приводить систему до окремих підсистем [1]. Близькість тут розуміється як наближена рівність усіх коефіцієнтів однієї системи рівнянь коефіцієнтам іншої.

Для того щоб з'ясувати, чи є розглянута система близької до розщеплюваної системи, потрібно значення  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  в алгоритмі знаходження загального розв'язку системи відповідних алгебраїчних рівнянь вибрати не настільки малими, як при «точній» декомпозиції. Тоді рівняння, близькі до лінійно залежних рівнянь, будуть визнані програмою лінійно залежними. У результаті програма видасть «комутуючу» матрицю  $Z$ . Перетворення

подібності з матрицею  $S$ , стовпцями якої є власні вектори матриці  $Z$ , дає необхідне наближене зведення матриць коефіцієнтів до блочно-діагонального вигляду.

Пояснимо сказане на прикладі. Змінимо матриці (1.8) у такий спосіб. Елементу матриці  $B_3$  з номером 2 1 замість значення 32 привласнимо значення 30. Як показують розрахунки за програмою, змінена система рівнянь уже не розщеплюється. Тепер повторимо розрахунки при  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 0,5$ . У цьому випадку одержуємо «комутуючу» матрицю

$$Z = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,0666\dots & 0 \\ 1 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При початкових «незіпсованих» матрицях підкреслений елемент дорівнює 0,0625, інші елементи збігаються. Власні числа матриці  $Z$  такі:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0,008194$ ,  $\lambda_3 = 0,5082$ . Матриця власних векторів

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -0,2582 & 0,2582 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Перетворені матриці  $\tilde{B}_i = S^{-1}B_iS$  мають вигляд

$$\tilde{B}_1 = E, \quad \tilde{B}_2 = \left[ \begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$\tilde{B}_3 = \left[ \begin{array}{cc|c} 5 & -4,0656 & 0,0656 \\ 3,94 & -4,746 & 0 \\ \hline 0,0651 & 0 & 10,746 \end{array} \right].$$

Таким чином, для прикладу, в якому «точно» розщеплення є неможливим, отримано зведення матриць до такого вигляду, що поза діагональними блоками стоять малі числа. Порівняння власних чисел показує, що відкидання цих малих елементів майже не впливає на результат (змінюється лише четверта або п'ята значуща цифра).

Відзначимо, що описане вище перетворення матриць коефіцієнтів можна трактувати як виявлення схованого малого параметра.

## 2.7. Група симетрії динамічної системи

У даному підрозділі розглянуто методи розщеплення, що використовують інформацію щодо симетрії розрахункової схеми за допомогою зображень скінченних груп.

Питання практичного застосування методів теорії груп розглянуто далі на прикладі розрахункових схем рейкових екіпажів й екіпажів транспорту на магнітнім підвішуванні. Для цих систем є характерним високий порядок матриць коефіцієнтів. Для рейкових екіпажів є характерною також наявність неконсервативних сил псевдоковзання, завдяки яким матриці коефіцієнтів стають несиметричними. Все це викликає певні труднощі, як при складанні груп симетрії, так і при виконанні обчислень.

Симетрія фізичної системи проявляється в тому, що існують перетворення  $g_i$  простору, щодо яких система, а отже, і її математична модель, є інваріантними (незмінними). До таких перетворень відносяться

відбиття фізичної системи щодо площин симетрії, повороти навколо осей симетрії тощо.

Якщо в множині перетворень  $g_i$  ввести операцію послідовного застосування перетворень  $g_c = g_a g_b$ , то ця множина стає групою. Дійсно, послідовне застосування таких перетворень має властивість асоціативності, роль одиниці групи відіграє тотожне перетворення, при якому узагальнені координати не змінюються, і для кожного з перетворень існує зворотне. Кожне з перетворень узагальнених координат системи задається матрицею  $T(g_i)$ . Ці матриці утворюють зображення групи, тобто таке відображення даної групи в групу матриць, що  $T(g_i g_j) = T(g_i) T(g_j)$ . Властивість інваріантності системи щодо перетворень  $g_i$  виражається в тому, що матриці  $T(g_i)$  комутують із матрицями коефіцієнтів системи рівнянь.

У літературі (див., наприклад, [13]) докладно описано всі скінченні групи, що зустрічаються в застосуваннях. Наведено також їх незвідні зображення  $\tau_k(g_i)$  (тут  $k = \overline{1, m}$ ,  $m$  — число різних незвідних зображень даної групи). Розклад зображень  $\{T(g_i)\}$  на незвідні відповідає поділу системи рівнянь на кілька підсистем.

Помітимо, що при повороті або відбитті простору координати твердого тіла змінюються так, що матриця відповідного перетворення є ортогональною. Ця же властивість, як правило, притамана будь-які матриці перетворень симетрії в різних практичних задачах. Тому далі вважаємо всі матриці  $T(g_v)$  ортогональними.

Викладемо мінімум відомостей, достатніх для застосування методів розщеплення рівнянь за допомогою зображень скінченних груп.

Нехай розглядається деяка фізична система. Вектор її початкових змінних позначимо через  $\mathbf{q}$ . Ця система є інваріантною щодо групи перетворень координат  $g_1, g_2, \dots, g_n$ . У матричному вигляді дані перетворення записують так:  $\tilde{\mathbf{q}} = T(g_i)\mathbf{q}$ . Потрібно знайти таку заміну узагальнених

координат  $\mathbf{q} = S\mathbf{x}$ , щоб рівняння, складені в нових координатах, вийшли розділеними на підсистеми.

Існують два шляхи розв'язання цієї задачі. Перший шлях — використання твірних  $T(g_1), \dots, T(g_r)$  групи матриць. Тут і далі твірні розташовуються на початку списку елементів групи. Матриця  $T(g_1)$  комутує з матрицями коефіцієнтів  $B_i$  рівнянь руху досліджуваної системи (підрозділ 1.4). Тому можна застосувати «метод комутуючої матриці». Інакше кажучи, перетворення  $\mathbf{q} = S_1\mathbf{x}$ , де  $S_1 = \nu(T(g_1))$ , уже дає більш удчні узагальнені координати  $\mathbf{x}$ . Такий шлях, зокрема, було використано в підрозділі 1.5 при повторному розгляді прикладу 1.1. Відзначимо, що самі матриці  $B_i$  для цих розрахунків не потрібні.

Якщо елементом  $g_1$  не вичерпуються твірні групи симетрії, то далі використовуємо елемент  $g_2$ . Оскільки вектор координат  $\mathbf{x}$  уже є розділеним на кілька частин  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_m^T]$ , відповідних окремим підсистемам, матриці зображення можна скласти для кожної з частин вектора  $\mathbf{x}$  окремо. Матриці  $\tilde{T}_k(g_2)$ ,  $k = \overline{1, m}$ , можуть бути складені безпосередньо в нових координатах або обчислені за формулою  $\tilde{T}_k(g_2) = S_1^{-1}T(g_2)S_1 = \text{diag}(\tilde{T}_k(g_2))$ . За допомогою цих матриць робимо заміни змінних для кожного з векторів  $\mathbf{x}_k$  окремо. Далі використовуємо дальші твірні.

Інший шлях полягає в обчисленні проекторів на інваріантні підпростори, відповідні до незвідних зображень. У разі одновимірних незвідних зображень формула для знаходження проекторів має вигляд

$$P_j = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \overline{\tau_j(g_v)} T(g_v), \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.27)$$

де  $N$  — число елементів групи,  $\tau_j(g_v)$  —  $v$ -е значення  $j$ -го одновимірного незвідного зображення. Потім вибираються лінійно незалежні вектор-стовпці кожного з проекторів, які служать рядками матриці перетворення  $S$ .

Розглянемо застосування описаної методики на прикладі 1.1. Тут група симетрії складається із двох перетворень:  $g_1$  — відбиття щодо осі симетрії  $Oz$  і  $g_2$  — тотожне перетворення. Матрицю  $T(g_1)$  складено в підрозділі 1.4:

$T(g_1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ . Тотожному перетворенню відповідає одинична матриця.

Група симетрії є ізоморфною  $C_2$ . Вона має такі незвідні зображення [14]:  $\tau_1(g_1) = 1$ ,  $\tau_1(g_2) = 1$ ;  $\tau_2(g_1) = -1$ ,  $\tau_2(g_2) = 1$ . Обчислюємо проектори за формулою (2.27);

$$P_1 = \frac{1}{2} \left( 1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Виконавши аналогічні обчислення, знаходимо

$$P_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

далі виділяємо лінійно незалежні стовпці в кожній з матриць  $P_k$ . Транспонуємо ці стовпці і складаємо з них матрицю заміни змінних  $S$ . У даному прикладі

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{тому} \quad \begin{cases} q_1 = \frac{1}{2}(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2), \\ q_2 = \frac{1}{2}(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2). \end{cases}$$

Одержуємо два окремі рівняння руху:

$$\ddot{q}_1 = 0; \quad \ddot{q}_2 + \frac{2k}{m} \tilde{q}_2 = 0.$$

Якщо незвідні зображення мають порядок вищий за перший, то треба обчислити

$$P_{jk} = \frac{s_j}{N} \sum_{i=1}^N \overline{\tau_{jk1}(g_i)} \mathbf{T}(g_i), \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, s_j}, \quad (2.28)$$

де  $\tau_{jk1}(g_i)$  — елемент матриці незвідного зображення  $\tau_j(g_i)$ ;  $s_j$  — порядок цієї матриці;  $m$  — кількість різних незвідних зображень групи. Потрібно для кожного значення  $j$  обчислити матрицю  $P_{j1}$ ; знайти її лінійно незалежні стовпці; ортогоналізувати знайдені вектори; побудувати незвідні зображення  $L_{jk}$ , шляхом застосування проекторів  $P_{jk}$  при  $k = \overline{2, s_j}$  по черзі до кожного з векторів; скласти матрицю перетворення  $S$ , стовпцями якої будуть базиси всіх підпросторів  $L_{jk}$ . Тут мова йде про скінченні або (принаймні) компактні групи симетрії. А якщо ні, то наявність групи симетрії не гарантує можливість декомпозиції. Так в [2, 3] наведений приклад системи, що має некомпактну групу симетрії, але не приводиться до незалежних підсистем.

При  $s_j = 1$  формула (2.28) збігається з формулою (2.27). Недоліком цих формул є те, що треба знати всі матриці  $\mathbf{T}(g_i)$ . Якщо це матриці високого порядку і група  $G$  містить багато елементів, то таке обчислення може виявитися громіздким. З іншого боку, практично всі групи симетрії, що зустрічаються в додатках, містять не більше трьох твірних елементів. Однак алгоритм, що використовує тільки твірні групи  $\mathbf{T}(g_i)$ , теж є досить складним. Зрозуміло, що найпростішим способом у випадку великої групи є



знаходження за допомогою ПЕОМ усіх елементів групи  $T(g_i)$  по твірних і обчислення проекторів. Із цією метою було складено програму. Замість таблиці множення групи в програмі використано більш просту допоміжну таблицю. Для її складання будується така послідовність перемножень, що кожний новий елемент групи є добутком двох відомих елементів. Допоміжну таблицю легко побудувати, користуючись графом групи. Наприклад, для групи  $C_4$ , граф якої зображений на рис. 2.2, таблиця перемножень така:

Номер	
першого співмножника	1 2 3
другого співмножника	1 1 1
добутку	2 3 4

Після складання всієї групи  $T(g_v)$  обчислено проектори за формулою (2.28).

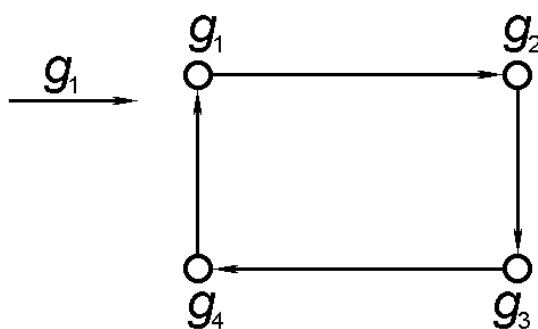


Рис. 2.2. Граф групи  $C_4$

Після цього неважко здійснити розклад довільного простору, що перетворюється за звідним зображенням  $T(g_v)$ . Для цього слід:

1) знайти за допомогою проекторів  $P_{j1}$  (2.28) усі підпростори  $E_{j1}$ , що мають розмірність  $m_j$ . Для знаходження кожного з підпросторів можна обрати довільний базис  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  простору  $C^n$ , подіяти на вектори базису

проектором  $P_{j1}$  і серед добутоків  $P_{j1}\mathbf{a}_k$  вибрати лінійно незалежні вектори  $\mathbf{e}_{j11}, \mathbf{e}_{j21}, \dots, \mathbf{e}_{jm_{j1}}$ . Якщо в якості векторів базису обрано одиничні вектори, то, як випливає з правил перемножування матриць, шуканими векторами є лінійно незалежні стовпці матриці  $P_{j1}$ ;

2) у кожному з підпросторів  $E_{j1}$  ( $m_j > 0$ ) вибрати довільним чином ортогональний базис (тобто такий базис, що будь-які два його елементи є взаємно ортогональними):

$$\mathbf{e}_{j11}, \mathbf{e}_{j21}, \dots, \mathbf{e}_{jm_{j1}}, \quad (2.29)$$

для цього вектори, знайдені в попередньому пункті, треба ортогоналізувати;

3) застосовуючи проектори (2.28) при  $k = \overline{2, s_j}$  по черзі до кожного з векторів (2.29), побудувати незвідні підпростори  $L_{jk}$ , відповідні кожному з цих векторів; отримані таким чином підпростори є взаємно ортогональними й перетворюються за зображенням  $\tau_j(g_v)$ ; в сукупності вони дають повний розклад підпростору  $L_j$ .

Для одновимірного зображення треба виконати тільки п. 1.

Кожному незвідному зображенню  $\tau_j(g_v)$  зіставлено підпростори  $L_{jk}$ ,  $k = \overline{1, m_j}$ , де  $m_j$  — кратність входження незвідного зображення  $\tau_j(g_v)$  в звідне зображення  $T(g_v)$ . Підпростори, натягнуті на вектори  $\mathbf{e}_{jkv}$  при  $k = \overline{1, m_j}$ , позначимо через  $E_{jv}$ . Прикладом використання цього підходу є наведені в (2.29) розрахунки з декомпозиції рівнянь руху восьмивісного вагона.

Матриці коефіцієнтів рівнянь руху симетричної системи комутовують із матрицями зображення групи симетрії (підрозділ 1.4).

Матрицю перетворення  $S$  складемо в такий спосіб. У якості перших  $m_1$  рядків матриці обираємо вектори базису підпростору  $E_{11}$ . Якщо незвідний підпростір має розмірність більшу за одиницю, то далі розміщуємо базиси



для всіх  $v$  одночасно, то можна робити обчислення для кожного блоку окремо.

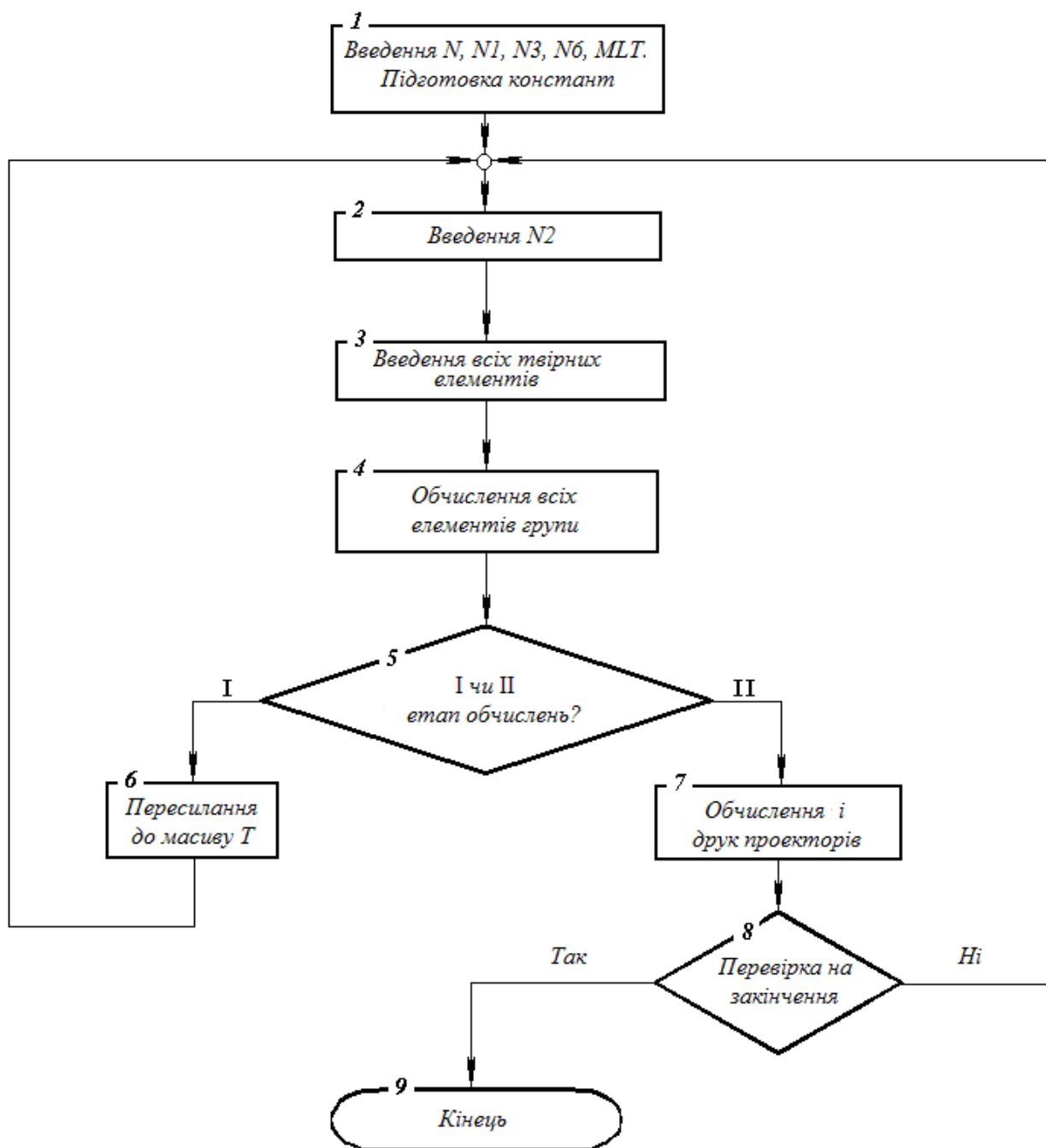


Рис. 2.3. Блок-схема програми

Для роботи програми треба ввести лише твірні елементи групи  $T(g_v)$  ( $v = \overline{1, N1}$ ) і незвідних зображень  $\tau_j(g_v)$  ( $v = \overline{1, N1}$ ). Складання всієї групи здійснюється за допомогою таблиці перемножувальних  $MLT$ .

Числовий матеріал для роботи програми треба підготувати у вигляді такого набору даних.

Спочатку вказуються кількість елементів групи, кількість твірних елементів, кількість різних незвідних зображень, кількість блоків матриць  $T(g_v)$ . Потім — таблиця MLT перемноження для даної групи (вводиться по стовпцях). Для кожного незвідного зображення вводяться: порядок матриць, що вводяться; потім матриці твірних елементів незвідних зображень, кожна у вигляді окремого масиву. Аналогічним чином вводиться кожний із блоків матриць звідного зображення. Після введення числа  $N_2$  й матриць твірних елементів вони надходять на друк (для контролю).

У результаті розв'язання друкуються по рядках проектори  $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1s_1}, P_{21}, P_{22}, \dots, P_{2s_2}, \dots, P_{N_3s_{N_3}}$ .

## 2.9. Складання групи симетрії, відповідної виконаній декомпозиції

Якщо для декомпозиції було застосовано алгебраїчні методи, що не використовують апріорну інформацію щодо симетрії досліджуваної системи, то постає питання про те, якій групі симетрії відповідає знайдене перетворення.

Розглянемо рівняння (1.15). Нехай для них декомпозиція за допомогою перетворення подібності є можливою. Знаючи матрицю  $R$  перетворення подібності, можна скласти групу симетрії досліджуваної фізичної системи (теорема 2.4.).

**Теорема 2.4.** Матриці  $T_\mu = RL_\mu R^{-1}$ , де

$$L_\mu = \text{diag}(E_1, E_2, \dots, -E_\mu, \dots, E_l) \quad (2.30)$$

є твірними групи симетрії початкової системи. Така група не є єдиною.

Д о в е д е н н я . Елементи отриманої множини утворюють скінченну абелеву групу, оскільки  $L_j L_\mu = L_\mu L_j$  і групи комутирують з матрицями  $C_i$ , а розклад їх на незвідні зображення відповідає зведенню твірних елементів групи до вигляду (2.4) з точністю до порядку розкладу блоків, тобто перетворення подібності з матрицею перетворення  $R$ .

Те, що група не є єдиною видно з того факту, що дана група є абелевою, у той час як група симетрії фізичної системи може бути неабелевою. ■

Зрозуміло, що матриці будь-якої групи симетрії належать до множини  $\Lambda(C_i)$ . Становить інтерес складання такої групи  $G_0$  матриць  $n$ -го порядку, щоб будь-яка скінченна група симетрії системи мала ізоморфне унітарне зображення в якості однієї з підгруп групи  $G_0$ .

У теперішній час можна надати відповідь на це питання у випадку підсистем першого порядку, тобто коли рівняння приводяться до головних координат. Нехай кількість різних підсистем першого порядку дорівнює  $p$ , а кратності кожної з підсистем дорівнюють  $m_1, m_2, \dots, m_p$ . Можна довести, що група  $G_0$  є породженою матрицями вигляду

$$L_{kg} = R \operatorname{diag}(E_{m_1}, \dots, E_{m_{k-1}}, g, E_{m_{k+1}}, \dots, E_{m_p}) R^{-1}, \quad (2.31)$$

де  $k = \overline{1, p}$ ,  $g$  пробігає множини твірних усіх скінченних унітарних груп матриць порядку  $m_k$ . Матриця  $R$  у виразі (2.31) повинна бути унітарної.

При  $m_k = 1$  «матриця»  $g$  приймає значення коренів різних ступенів з одиниці:

$$\cos 2k\pi / r + i \sin 2k\pi / r, \quad k = \overline{0, r-1}, \quad r = \overline{1, \infty}.$$

Якщо ввести вимогу, щоб група  $G_0$  містила лише дійсні матриці, то у випадку існування головних координат  $i$ , при відсутності ідентичних підсистем, параметр  $g$  може приймати лише значення  $\pm 1$ . У цьому випадку група  $G_0$  збігається із групою, складеної на початку даного підрозділу. Але при  $m_k > 1$  група  $G_0$  знову стає нескінченною. Так при  $m_k = 2$  у число значень, що приймає  $g$ , входять матриці вигляду

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{r}, \quad r = \overline{1, \infty}. \quad (2.32)$$

У літературі з застосування теорії груп, як правило, фізична система вважається симетричною, якщо рівняння її руху є інваріантними щодо будь-яких нетривіальних перетворень змінних. Таке визначення приводить до парадоксального висновку. Виходить, що будь-яка консервативна механічна система є симетричною, оскільки її рівняння приводяться до головних координат, а це означає існування нетривіальної групи симетрії (див. теорему 2.3.). Зрозуміло, що слід розрізняти симетрію фізичної системи й симетрію рівнянь.

## **2.10. Обчислювальний підхід до задачі знаходження незвідних зображень**

Розроблено обчислювальний алгоритм отримання всіх незвідних зображень довільної скінченної групи [6]. Для цього складається регулярне матричне зображення групи, потім здійснюється одночасне зведення всіх матриць до блочно-діагонального вигляду за допомогою методики, описаної в даному розділі.

Незвідні зображення широко використовуються при дослідженні коливань систем, що володіють симетрією. Незважаючи на те, що детальну

інформацію щодо точкових і деяких інших груп наведено у відповідній літературі (див., наприклад, [13]), становить інтерес можливість знаходження незвідних зображень груп для нових завдань. Наприклад, в [18, 23] вказується на те, що для дослідження нежорстких молекул і кристалів потрібно знати незвідні зображення груп, які не є точковими.

Нехай  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  є скінченною групою. **Регулярним зображенням** [13] називається таке гомоморфне відображення групи  $G$  у групу операторів  $\{R(g)\}$ , що  $R(g)\varphi(h) = \psi(h) \equiv \varphi(hg)$ , де  $\varphi(h)$  — довільна функція на групі.

Якщо зіставити кожному елементу  $g_i$  вектор  $e_i$  в  $n$ -мірному просторі  $L$  усіх функцій на групі, то матричний запис  $B(g)$  оператора  $R(g)$  буде такий:  $b_{ij}(g) = 1$ , якщо  $e_j g = e_i$ , а в інших випадках —  $b_{ij}(g) = 0$ . Позначимо такі матриці через  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Можна довести, що одночасне зведення всіх матриць  $B_i$  до блочно-діагонального вигляду з блоками, що далі не розкладаються, дає набори блоків, які є незвідними зображеннями.

Для зведення до блочно-діагонального вигляду можна використовувати «метод комутуючої матриці» (підрозділ 1.4), що полягає в знаходженні **централізатора** множини  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , тобто загального розв'язку системи матричних рівнянь вигляду

$$B_i Z = Z B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.33)$$

У якості невідомих приймаються всі елементи  $z_{ij}$  матриці  $Z$ . Загальний розв'язок системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь може бути отриманим навіть у випадку великої за розмірами матриці коефіцієнтів [4, 5]. Нехай  $W_1, W_2, \dots, W_r$  — знайдений базис. Можливими є три випадки.

1.  $r = 1$ . Тоді матриці не приводяться до блочно-діагонального вигляду.
2.  $r > 1$  й існує  $W_j$ , що має хоча б два різні власні числа. Тоді існує



перетворення для одночасного зведення матриць до блочно-діагонального вигляду. Матриці перетворення складаються з векторів канонічного базису  $W_j$ , розташованих у якості стовпців.

3.  $r > 1$ , але всі  $W_j$  не мають різних власних чисел. При довільних матрицях  $B_i$  цей випадок вимагає додаткового дослідження. Якщо ж матриці утворюють скінченну групу, то такої проблеми не виникає (теорема 2.5).

**Теорема 2.5.** *Нехай  $B_1, B_2, \dots, B_n$  — скінченна група матриць,  $\Lambda$  — централізатор розмірності  $r$  цієї групи в алгебрі матриць порядку  $n$ . Якщо  $r > 1$ , то існує перетворення подібності, яке приводить матриці  $B_i$  до однакового блочно-діагонального вигляду.*

**Д о в е д е н н я .** Нехай  $\{W_j\}$  — базис алгебри  $\Lambda$ . Слід розглянути випадок, коли кожна з матриць  $W_j$  має лише одне власне число  $\lambda(W_j)$ . Одиначна матриця  $E$  завжди належить до централізатора. Нехай, наприклад,  $W_1 = E$ . Позначимо  $U = W_2 - \lambda(W_2)E$ . Ця матриця належить до  $\Lambda$  і є нильпотентною. Тому існує нетривіальний підпростір  $L_1 = \{\xi: U\xi = \mathbf{0}\}$ , інваріантний щодо матриць  $B_i$ . Доведенням інваріантності є те, що з рівності  $U\xi = \mathbf{0}$  випливає  $UB\xi = BU\xi = B\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

Оскільки матриці  $B_i$  утворюють скінченну групу, існує інваріантне доповнення  $L_2$  [13, § 17, теорема 1]. З розкладу простору в пряму суму двох інваріантних підпросторів і випливає твердження теореми. ■

Укажемо обчислювальні алгоритми знаходження інваріантних підпросторів  $L_1$  і  $L_2$ , описаних при доведенні теореми. Підпростір  $L_1$  можна знайти як загальний розв'язок рівнянь  $Uy = \mathbf{0}$ . Нехай  $y_1, y_2, \dots, y_p$  — знайдений базис. Підпростір  $L_2$  є ортогональним доповненням  $L_1$  до всього простору  $L$ . Ортогональність тут розуміється щодо нового скалярного добутку, який використовує функціонал усереднення по групі

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (B_i \mathbf{x}, B_i \mathbf{y}), \quad (2.34)$$

де круглі дужки  $(\cdot)$  позначають старий скалярний добуток.

Вектор  $\mathbf{x} \in L_2$  повинен бути ортогональним усім  $\mathbf{y}_i$  у змісті нового скалярного добутку. Ця умова приводить до системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, загальний розв'язок якої і є підпростором  $L_2$ . Матрицю перетворення складаємо з векторів базисів підпросторів  $L_1$  і  $L_2$ , розташованих у якості стовпців.

Отже, для знаходження незвідного зображення групи  $G$  порядку  $n$  складається регулярне матричне зображення, що діє в просторі  $L$  розмірності  $n$ . Твірні елементи цієї групи матриць приводимо до блочно-діагонального вигляду за допомогою «методу комутуючої матриці». Кожен з отриманих наборів блоків, що стоять на головній діагоналі перетворених матриць, утворює зображення, що діє в підпросторі меншої розмірності. Далі ця операція повторюється для знов отриманих зображень, і т. д. При цьому порівняно легко долається можливий особливий випадок. Усі обчислювальні задачі зводяться до загальновідомих алгоритмів знаходження власних чисел і векторів матриць, а також до описаного в [5] алгоритму знаходження загального розв'язку системи рівнянь. З обчислювальної точки зору досить здійснити зведення до блочно-діагонального вигляду лише твірні елементи групи.

Розглянемо простий приклад: група  $C_3$  — повороти на кути, кратні  $120^\circ$ . Елементи групи:  $g_1, g_2$  — повороти на кути  $120^\circ$  і  $240^\circ$  відповідно,  $e$  — тотожне перетворення. Таблиця множення групи має вигляд

$$\begin{array}{c|ccc} & g_1 & g_2 & e \\ \hline g_1 & g_2 & e & g_1 \\ g_2 & e & g_1 & g_2 \\ e & g_1 & g_2 & e \end{array} .$$

З її допомогою одержуємо:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = E.$$

З умови  $B_1 Z = Z B_1$  одержуємо загальний вигляд матриці  $Z$ :

$$Z = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = aE + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = aW_1 + bW_2 + cW_3.$$

Умова  $B_2 Z = Z B_2$  виконується автоматично, оскільки  $B_2 = B_{12}$ . Матриця  $W_2$  має різні власні числа:  $\lambda_1 = 1$ ;  $\lambda_2 = u$ ;  $\lambda_3 = v$ , де  $u = -\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ ,  $v = -\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ$ . Знаходимо відповідні власні вектори:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ u \end{pmatrix}$$

і складаємо матрицю перетворення

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & u & v \\ 1 & v & u \end{pmatrix}.$$

Далі одержуємо:

$$\tilde{B}_1 = S^{-1}B_1S = \text{diag}(1, u, v); \quad \tilde{B}_2 = S^{-1}B_2S = \text{diag}(1, v, u); \quad \tilde{B}_3 = E.$$

Усі отримані блоки мають перший порядок. Відповідно до цього отримуємо такі незвідні зображення групи  $C_3$ :

$$\tau_1 = \{1, 1, 1\},$$

$$\tau_2 = \{u, v, 1\},$$

$$\tau_3 = \{v, u, 1\}.$$

За допомогою даного алгоритму можна скласти всі незвідні зображення заданої скінченної групи за допомогою ПЕОМ.

## 2.11. Декомпозиція математичних моделей керованих систем

У даному підрозділі розглянуто задачі декомпозиції рівнянь, які використовуються у теорії автоматичного керування. Установлено взаємозв'язок цієї задачі із задачею декомпозиції рівнянь руху механічної системи.

Розглянемо спочатку рівняння

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}, \quad (2.35)$$

де  $\mathbf{x} \in C^n$ ;  $\mathbf{u} \in C^m$ ;  $\mathbf{y} \in C^p$ ;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  — матриці відповідних розмірів.

Потрібно знайти заміну змінних

$$\mathbf{x} = S_1 \mathbf{x}', \mathbf{u} = S_2 \mathbf{u}', \mathbf{y} = S_3 \mathbf{y}', \quad (2.36)$$

після якої систему (2.35) буде приведено до підсистем меншого порядку. Для цього будемо використовувати множину розв'язків системи матричних рівнянь

$$H_1 A = A H_1, H_1 B = B H_2, H_3 C = C H_1, H_3 D = D H_2. \quad (2.37)$$

Відзначимо, що при ненульовій матриці  $B$  матриця  $H_2$  має власні числа, що збігаються з деякими власними числами  $H_1$  — інакше з того, що спектри матриць не перетинаються, виходило б, що  $B = 0$ . Аналогічна властивість притамана матриці  $H_3$ . Уважаємо, що власні числа матриць  $H_2$  і  $H_3$  пронумеровані в такий спосіб: спочатку ті з них, які збігаються із власними числами матриці  $H_1$ , у тому ж порядку, далі — співпадаючі власні числа матриць  $H_2$  і  $H_3$ , що відрізняються від власних чисел матриці  $H_1$ , потім — інші власні числа.

Як і раніше, через  $v(X)$  позначаємо матрицю, що приводить дану матрицю  $X$  до жорданової форми.

**Теорема 2.6.** Нехай  $\{H_i\}$  — розв'язок рівнянь (2.37);  $S_i = v(H_i)$ . Тоді після заміни змінних (2.36) матриці коефіцієнтів рівнянь (2.35) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} &= S_1^{-1} A S_1 = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_q) \\
 \hat{B} &= S_1^{-1} B S_2 = \begin{bmatrix} B_1 & & & \mathbf{0} & | & 0 \\ & B_2 & & & | & 0 \\ & & \cdot & & | & \cdot \\ & & & \cdot & | & \cdot \\ & & & & | & \cdot \\ \mathbf{0} & & & & B_q & | & 0 \end{bmatrix}, \\
 \hat{C} &= S_3^{-1} C S_1 = \begin{bmatrix} C_1 & & & & & \mathbf{0} \\ & C_2 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ \mathbf{0} & & & & & C_q \\ \hline 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}, \\
 \hat{D} &= S_3^{-1} D S_2 = \begin{bmatrix} D_1 & & & & & \mathbf{0} & | & 0 \\ & D_2 & & & & & | & 0 \\ & & \cdot & & & & | & \cdot \\ & & & \cdot & & & | & \cdot \\ & & & & \cdot & & | & \cdot \\ \mathbf{0} & & & & & & D_{q+r} & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Тут  $q$  — кількість різних власних чисел матриці  $H_1$ ; порядки  $n_k$  блоків  $A_k$  дорівнюють кратностям цих власних чисел; розміри блоків  $B_k$  (відповідно  $C_k$ ) дорівнюють  $n_k \times t_k$  ( $p_k \times n_k$ ), де  $t_k$  ( $p_k$ ) — кратність власного числа матриці  $H_2$  ( $H_3$ ), що збігається із власним числом матриці  $H_1$ , маючим номер  $k$ ; якщо це власне число є відсутнім, то в перетвореній матриці є відсутнім відповідний блок; число останніх нульових стовпців матриці  $\hat{B}$  (рядків матриці  $\hat{C}$ ) дорівнює сумарній кратності всіх власних чисел

матриці  $H_2$  (відповідно  $H_3$ ), що не збігаються з жодним із власних чисел матриці  $H_1$ . Розміри блоків  $D_k$  ( $k = \overline{1, q}$ ) дорівнюють  $p_k \times t_k$ . При  $k = \overline{q+1, q+r}$  розміри блоків  $D_k$  дорівнюють  $s_k \times t_k$ , де  $r$  — кількість співпадаючих власних чисел матриць  $H_2$  і  $H_3$ , що відрізняються від власних чисел матриці  $H_1$ ;  $s_k$  і  $t_k$  — відповідно кратності цих чисел для матриць  $H_2$  і  $H_3$ . Число останніх нульових стовпців матриці  $\hat{D}$  дорівнює сумарній кратності всіх власних чисел матриці  $H_2$ , що не збігаються з жодним із власних чисел матриць  $H_1$  і  $H_3$ , а число нижніх нульових рядків — сумарній кратності всіх власних чисел матриці  $H_3$ , що не збігаються з жодним із власних чисел матриць  $H_1$  і  $H_2$ .

Д о в е д е н н я . Рівняння (2.37) є еквівалентними таким:

$$\tilde{H}_1 \tilde{A} = \tilde{A} \tilde{H}_1, \quad \tilde{H}_1 \hat{B} = \hat{B} \tilde{H}_2, \quad \tilde{H}_3 \hat{C} = \hat{C} \tilde{H}_1, \quad \tilde{H}_3 \hat{D} = \hat{D} \tilde{H}_2,$$

де  $\tilde{A} = S_1^{-1} A S_1$ ,  $\hat{B} = S_1^{-1} B S_2$ ,  $\hat{C} = S_3^{-1} C S_1$ , а матриці  $\tilde{H}_i = S_i^{-1} H_i S_i$  приведені до своєї жорданової форми. Таким чином, виходить, що матриця  $\tilde{A}$  комутує з матрицею  $\tilde{H}_1 = \text{diag}\{H_{11}, \dots, H_{1q}\}$  і при  $i \neq j$  спектри блоків  $H_{1i}$ ,  $H_{1j}$  не перетинаються. Тому  $\tilde{A} = \text{diag}(A_1, \dots, A_q)$  й порядок блоків  $A_k$  дорівнює порядкам блоків  $H_{1k}$ . Матрицю  $\tilde{H}_2$  представимо у вигляді  $\tilde{H}_2 = \text{diag}(H_{21}, \dots, H_{2q}, H_{2q+1})$ , де блок  $H_{2q+1}$  поєднує всі жорданові клітки  $H_2$ , відповідні власним числам що не належать спектру  $H_1$ . Розіб'ємо матрицю  $\hat{B}$  на блоки відповідно до вигляду матриць  $\tilde{H}_2$  й  $\tilde{H}_1$ . Тоді рівність  $\tilde{H}_1 \hat{B} = \hat{B} \tilde{H}_2$  є еквівалентною такій  $H_{1j} \hat{B}_{ij} = \hat{B}_{ij} H_{2i}$ ,  $i = \overline{1, q+1}$ ,  $j = \overline{1, q}$ . З останніх рівностей при  $i \neq j$  випливає:  $\hat{B}_{ij} = 0$ , оскільки спектри матриць  $H_{1i}$  й  $H_{2i}$  не перетинаються. Аналогічним є доведення для матриць  $\hat{C}$  і  $\hat{D}$ . ■

*Наслідок.* Якщо хоча б одна з матриць  $H_k$  має не менше двох різних власних чисел, то заміна змінних (2.36) при  $S_k = v(H_k)$  приводить рівняння (2.35) до підсистем менших розмірів:

$$\dot{\mathbf{x}}_k = A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{y}_k = C_k \mathbf{x}_k + D_k \mathbf{u}_k, \quad k = \overline{1, q}, \quad \mathbf{y}_{q+1} = \mathbf{0}.$$

При цьому сума порядків  $n_k$  векторів  $\mathbf{x}_k$  дорівнює  $n$ , сума порядків  $m_k$  векторів  $\mathbf{u}_k$  не перевищує  $m$  і сума порядків  $p_k$  векторів  $\mathbf{y}_k$  з урахуванням вектора  $\mathbf{y}_{q+1}$  дорівнює  $p$ .

Таким чином, зменшення розмірів рівнянь (2.35) може бути досягнуто не лише через поділ на підсистеми, аналогічні (2.35), але й через зменшення розмірів вектора  $\mathbf{u}$  або через виділення підсистеми, що має вигляд  $\mathbf{y}_{q+1} = \mathbf{0}$ .

*Зауваження 2.1.* Вектор  $\mathbf{u}_{q+1}$  у перетворені рівняння не входить. Наявність такого вектора означає, що система рівнянь не залежить від керувань  $\mathbf{u}_{q+1}$ .

*Зауваження 2.2.* Як видно з виражень (2.38), матриці  $\hat{B}$  й  $\hat{C}$  не завжди є блочно-діагональними.

Розглянемо такі квадратні матриці порядку  $l = n + m + p$ :

$$C_1 = \text{diag}(E_n, 2E_m, 3Ep), \quad C_2 = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C & D & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

де  $E_k$  — одинична матриця порядку  $k$ .

**Теорема 2.7.** *Будь-яка матриця  $Z$ , комутуюча з матрицями (2.39), має вигляд  $Z = \text{diag}(H_1, H_2, H_3)$ , де  $\{H_1, H_2, H_3\}$  — розв'язок рівнянь (2.37).*

**Д о в е д е н н я .** Матриця  $Z$  має блочно-діагональний вигляд, оскільки вона комутує з  $C_1$ , що має такий вигляд із блоками, власні числа



яких різні. Виконання рівностей (2.37) перевіряється підстановкою виразу  $Z = \text{diag}(H_1, H_2, H_3)$  в рівність  $C_2 Z = Z C_2$ . ■

Таким чином, для знаходження загального розв'язку рівнянь (2.37) можна скористатися програмою знаходження множини матриць, комутуючих з даними (див. підрозділ 2.5).

**Теорема 2.8.** Система (2.35) приводиться до підсистем меншого порядку за допомогою перетворення (2.36) тоді й тільки тоді, коли матриці (2.39) приводяться одночасно до блочно-діагонального вигляду через перетворення подібності.

Д о в е д е н н я т е о р е м и 2.8.

а) Необхідність. Якщо  $C_1$  і  $C_2$  приводяться до блочно-діагонального вигляду, то існує комутуюча з ними матриця  $Z$ , що має хоча б два різні власні числа (теорема 1.3). Оскільки  $Z = \text{diag}(H_1, H_2, H_3)$ , виконується таке: якщо матриця  $H_1$  не має різних власних чисел, то хоча б одна з матриць  $H_2, H_3$  має власне число, що не належить спектру матриці  $H_1$ . У кожному із цих випадків система (2.35) приводиться до підсистем менших розмірів (теорема 2.6).

б) Достатність. Нехай рівняння (2.35) через заміну змінних (2.36) приводяться до підсистем менших розмірів, тобто Матриці їх коефіцієнтів приводяться до вигляду (2.38). Для перетворених матриць і матриць

$$\begin{aligned}\tilde{H}_1 &= \text{diag}(E_{n_1}, 2E_{n_2}, \dots, qE_{n_q}), \\ \tilde{H}_2 &= \text{diag}(E_{m_1}, 2E_{m_2}, \dots, (q+1)E_{m_{q+1}}), \\ \tilde{H}_3 &= \text{diag}(E_{p_1}, 2E_{p_2}, \dots, (q+1)E_{p_{q+1}})\end{aligned}$$

виконуються рівності, аналогічні (2.37). У цьому можна переконатися безпосередньою перевіркою. При зворотному перетворенні ці рівності зберігаються. Тому з матрицями (2.39) комутує матриця  $Z = \text{diag}(H_1, H_2, H_3)$

(де  $H_i = S_i \tilde{H}_i S_i^{-1}$ ), що має не менш. ніж два різні власні числа. Отже, матриці (2.39) приводяться до блочно-діагонального вигляду. ■

*Зауваження 2.3.* Можна встановити безпосередній зв'язок між матрицею  $S$  перетворення, що приводить матриці (2.39) до блочно-діагонального вигляду, й матрицями заміни змінних (2.36), а саме виконується рівність  $S \cup (\tilde{C}_1) = \text{diag}(S_1, S_2, S_3)$ , де  $\tilde{C}_1 = S^{-1} C_1 S$ .

Допоміжні матриці підібрані і для інших систем рівнянь. При цьому справедливими є твердження, аналогічні теоремам 2.7 і 2.8, а матриці заміни змінних складаються із власних векторів блоків, що розташовані на головній діагоналі матриці, комутуючої з допоміжними матрицями.

У роботі Г. В. Можаяєва [15] розглядається система керування із квадратичним критерієм якості. При виконанні деяких умов (наприклад, при виконанні умов існування й єдиності розв'язку задачі оптимізації) проблема декомпозиції приводиться до знаходження й використання розв'язку рівнянь  $H_1 A = A H_1$ ,  $H_1 B = B H_2$ ,  $H_1 C = C H_1$ ,  $H_2 D = D H_2$ . У цьому випадку допоміжні матриці такі:

$$C_1 = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 2E_m \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

В [24] розглянуто рівняння

$$\mathbf{y} = A(p)\mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - B(p)\mathbf{y},$$

де  $\mathbf{y}$  і  $\mathbf{f}$  — вектори порядку  $n$ , а  $\mathbf{x}$  і  $\mathbf{u}$  — вектори порядку  $k$ . У випадку, коли матриці  $A(p)$  і  $B(p)$  можуть бути представленими у вигляді

$$A(p) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(p) A_j, \quad B(p) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(p) B_j, \quad m < nk$$

(тут  $\varphi_j(p)$  — лінійно незалежні скалярні функції), задачу про розщеплення рівнянь можна замінити задачею зведення до блочно-діагонального вигляду матриць

$$C_1 = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 2E_k \end{bmatrix}, \quad C_{j+1} = \begin{bmatrix} 0 & A_j \\ B_j & 0 \end{bmatrix} \quad j = \overline{1, m}.$$

Проілюструємо вищевикладене на прикладі.

### Приклад 2.3.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 + u, \\ y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = 2x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Тут

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

Загальний вигляд матриць, що задовольняють рівнянням (2.37), у цьому випадку такий:

$$H_1 = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}, \quad H_2 = [x + y], \quad H_3 = \begin{bmatrix} x + y - 2b & b \\ 2(x + y - f) & f \end{bmatrix},$$

де  $x, y, b, f$  — вільні змінні.

Припустимо, що  $x = b = f = 0, y = 1$ . Тоді

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = 1, H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далі одержуємо матриці перетворення:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, S_2 = 1, S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Після заміни змінних одержуємо три окремі підсистеми:

- 1).  $\dot{x}'_1 = 4x'_1 + u', \quad y'_1 = 2x'_1,$
- 2).  $\dot{x}'_2 = 2x'_2,$
- 3).  $y'_3 = 0.$

Загальний розв'язок рівнянь (2.37) знайдено безпосередньо за рівняннями, а інший шлях — використання допоміжних матриць

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ \mathbf{0} & & & & 3 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Установлена вище відповідність між задачами розщеплення рівнянь і зведення квадратних матриць до блочно-діагонального вигляду є корисною

не лише з обчислювальної точки зору. На задачі розщеплення розглянутих вище систем рівнянь поширюються й теоретичні результати. Із цього випливає, що послідовне застосування зазначеного методу спочатку до початкової системи рівнянь, а потім до підсистем, що виходять, дозволяє одержати максимально можливу кількість незалежних підсистем і при цьому одержати підсистеми мінімального порядку. Звідси випливає також єдиність розкладу рівнянь на підсистеми й можливість складання групи симетрії, відповідної до знайденого розкладу.

Отже, отримано загальну методику декомпозиції рівнянь, що описують еволюцію системи автоматичного керування, через зведення допоміжних квадратних матриць до блочно-діагонального вигляду. Доведено, що різні типи таких задач можна формально звести до вирішеної в попередніх підрозділах обчислювальної задачі одночасного зведення декількох квадратних матриць до блочно-діагонального вигляду.

## **2.12. Спрощення задачі напівозначеного програмування**

У теперішній час напівозначене програмування є одним із наукових напрямків, що розвиваються найактивніше, [8, 10, 16, 28]. До цієї постановки задачі приводиться ряд нелінійних задач оптимізації. Для спрощення задач у роботах [25, 26, 27] запропоновано методи зведення матриць коефіцієнтів до блочно-діагонального вигляду. У даному підрозділі запропоновано менш громіздкі методи спрощення задачі оптимізації.

Декомпозиція систем із дійсними симетричними матрицями коефіцієнтів може бути корисною при розв'язанні задач напівозначеного програмування [25, 26, 27]. У такому випадку обов'язкова вимога — матриці перетворення повинні бути ортогональними. Ці самі методи є корисними при аналізі «традиційних» коливальних систем, тобто таких, де немає

гіроскопічних складових і немає позиційних неконсервативних сил, обумовлених взаємодією з зовнішнім середовищем.

Уведемо позначення. Нехай  $S^n$  позначає простір симетричних дійсних матриць порядку  $n$ . Нехай,  $S_+^n$  — підмножина  $S^n$ , що складається з невід'ємно означених (додатно означених, напівозначених) матриць. Скалярний (внутрішній) добуток двох квадратних матриць  $L$  і  $M$  порядку  $n$  визначається як сума всіх поелементних добутків. Іншими словами, це — слід матриці  $L^T M$ . Будемо використовувати позначення:

$$L \bullet M = \sum_{i,j=1}^n l_{ij} m_{ij} = \text{tr}(L^T M),$$

де  $l_{ij}$  й  $m_{ij}$  —  $(ij)$ -елементи відповідно матриць  $L$  і  $M$ .

Задача напівозначеного програмування полягає в такому [8, 27]: дано матриці  $A_p \in S^n$  ( $p = \overline{0, m}$ ) і стовпець  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T \in \mathbb{R}^m$ , потрібно знайти матрицю  $X \in S_+^n$ , що задовольняє таким умовам:

$$\begin{aligned} \min A_0 \bullet X, \\ A_i \bullet X = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Розглянемо проблему зменшення числа невідомих в (2.40).

Якщо зробити заміну змінних в (2.40):  $X = H^T \tilde{X} H$  ( $H$  — дійсна ортогональна матриця перетворення,  $\tilde{X}$  — нова невідома матриця порядку  $n$ ) і перетворити матриці  $A_p$  ( $p = \overline{0, m}$ ) за допомогою тої самої матриці перетворення  $A_p = H^T \tilde{A}_p H$ , то одержимо знову задачу напівозначеного програмування. Дійсно: симетричність матриць за таким перетворенням не

порушиться, крім того, це перетворення є перетворенням подібності й, отже, залишає незмінними власні числа матриці  $X$ , зберігаючи, таким чином, напівозначеність невідомої матриці.

Припустимо, матриці  $\widetilde{A}_p$  придбали однаковий блочно-діагональний вигляд:

$$\widetilde{A}_p = HA_p H^T = \begin{pmatrix} A_p^{(1)} & 0 \\ 0 & A_p^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

де  $A_p^{(1)} \in S^{n_1}$ ,  $A_p^{(2)} \in S^{n_2}$  і  $n_1 + n_2 = n$ . У цьому випадку задача (2.40) приводиться до такого вигляду [27]:

$$\begin{aligned} \min & A_0^{(1)} \bullet X^{(1)} + A_0^{(2)} \bullet X^{(2)}, \\ & A_i^{(1)} \bullet X^{(1)} + A_i^{(2)} \bullet X^{(2)} = b_i \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Тут  $X_p^{(1)} \in S_+^{n_1}$  і  $X_p^{(2)} \in S_+^{n_2}$  — діагональні блоки матриці  $\widetilde{X}$ .

Помітимо, що число змінних в (2.42) менше, ніж в (2.40). Ще краще отримати вираз, аналогічний (2.41), з максимально можливою кількістю блоків на головній діагоналі.

Отже, потрібно для даних матриць  $A_p$  ( $p = \overline{0, m}$ ) знайти таку матрицю  $H$ , за якою матриці  $\widetilde{A}_p = HA_p H^T$  будуть мати найкращий блочно-діагональний вигляд, або переконатися в тому, що для заданих матриць таке зведення є неможливим. Слово «найкращий» може означати максимальну кількість блоків або мінімальну сумарну кількість змінних у діагональних блоках матриці  $\widetilde{X}$ . Далі викладено розв'язок цієї проблеми й показано, що обидва критерія приводять до того самого результату.

Тут, так само як і в підрозділі 2.3, треба використати матрицю  $Z$ , комутуючу із заданими матрицями  $\{A_j\}$ . Точніше кажучи, використовується централізатор множини  $\{A_j\}$ , а саме розв'язок системи матричних рівнянь, аналогічних рівнянням (2.5). Далі використовуємо метод комутуючої матриці. Із множини  $\Lambda(A_j)$  вибираємо матрицю  $Z$ , що має хоча б два різні власні числа. Вектори її канонічного базису є стовпцями шуканої матриці перетворення  $H$ . Отже, матриці  $\tilde{A}_v = H^{-1}A_vH$  мають блочно-діагональний вигляд.

Особливість розв'язуваної нами проблеми в тому, що перетворені матриці повинні бути симетричними, і нова матриця невідомих  $\tilde{X}$  повинна залишатися додатно напівозначеною. Ці умови будуть виконуватися, якщо матриці перетворення  $H$  будуть ортогональними. Для цього із множини комутуючих матриць потрібно вибрати симетричну матрицю  $Z$ .

Слід звернути увагу на той факт, що разом із кожною матрицею  $Z$  до централізатора множини симетричних матриць входить і транспонована матриця  $Z^T$ . Дійсно, з рівності  $A_jZ = ZA_j$  випливає  $Z^T A_j^T = A_j^T Z^T$ , а оскільки матриця  $A_j$  є симетричною, то й  $Z^T A_j = A_j Z^T$ . Це й означає, що  $Z^T$  належить до централізатора. Виявлений факт можна використовувати при обчисленнях. Замість несиметричних (загалом кажучи) матриць  $Z$  можна використовувати свідомо симетричні матриці  $V = ZZ^T$  або  $V = Z + Z^T$ .

Для симетричної матриці завжди існує базис, що складається з ортогональних нормованих власних векторів. З таких векторів і складаємо ортогональну матрицю перетворення  $H$ .

Особливий випадок, коли  $r > 1$ , але всі матриці базису не мають різних власних чисел, при симетричних матрицях є виключеним. Дійсно: симетричні матриці мають діагональну жорданову форму. Якщо всі власні числа такої діагональної форми є однаковими, то матриця  $Z$  є кратною



одиничній  $i$  є єдиним елементом базису. Інакше — матриця  $Z$  має різні власні числа.

Зведення до блоків мінімального порядку здійснюється шляхом послідовного застосування методу комутуючої матриці спочатку до початкових матриць  $A_k$ , потім до блоків, що виходять, до знаходження блоків, що не розщеплюються. Теорема єдиності підтверджує, що це  $i$  є найкраще зведення. Для обчислень із більшими матрицями тут також, як і в загальному випадку, можуть використовуватися ефективні програми знаходження централізатора [5].

Якщо початкові матриці мали властивість невід'ємної визначеності, то цю властивість будуть мати й отримані блоки матриць, тому що при перетворенні подібності власні числа матриць не змінюються.

Викладений вище підхід призведе до менш громіздких обчислень, ніж використання скінченновимірних  $C^*$ -алгебр, як це зроблено в роботах [25-27].

### 2.13. Висновки до розділу 2

У даному розділі наведено методіку найкращого поділу системи рівнянь на незалежні підсистеми. Для цього потрібно спочатку скласти допоміжні матриці, а потім вирішити задачу про їхнє зведення до блочно-діагонального вигляду. Це досягається шляхом послідовного застосування методу комутуючої матриці спочатку до початкової системи рівнянь, потім до підсистем, отриманих на попередньому етапі. З доведених автором теорем випливає, що в такий спосіб можна одержати максимально можливу для даної системи рівнянь кількість незалежних підсистем. Одночасно з цим виходять підсистеми мінімально можливого порядку.

Слід звернути увагу, що в теоремах даного розділу ніде не поставлено обмежень, що полягають у скінченності або компактності групи симетрії системи або в напівпростоті використаної в розрахунках алгебри.

Розглянуто питання взаємозв'язку розроблених методів і існуючих методів обліку симетрії за допомогою теорії груп.

Розглянуто, також підхід, що дозволяє звести кілька симетричних матриць до однакового блочно-діагонального вигляду за допомогою ортогональної матриці перетворення. Це є корисним при розв'язанні задач напівозначеного програмування.

Для ілюстрації методу розглянуто приклад механічної системи. Обговорено питання можливості застосування розроблених методів для дослідження матричних макроекономічних моделей, а також керованих систем.

#### **2.14. Список використаних джерел до розділу 2**

1. Базилевич Ю. Н. Численные алгоритмы для разделения уравнений на независимые и слабо связанные подсистемы / Ю. Н. Базилевич // Нагруженность и надежность механических систем. — Киев: Наук. думка, 1987. — С. 53—55.
2. Базилевич Ю. Н. Точная декомпозиция линейных систем [Электронный ресурс] / Ю. Н. Базилевич // Электронный журнал "Исследовано в России", 018, стр. 182—190. — 2006. — Режим доступа к ресурсу: <http://www.scijournal.ru/articles/2006/018.pdf>
3. Базилевич Ю. Н. Наилучшее приведение матриц к блочно-треугольному виду для задач иерархической декомпозиции / Ю. Н. Базилевич // Кибернетика и системный анализ. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 145–153.
4. Базилевич Ю. Н. Компьютерная декомпозиция уравнений движения рельсовых экипажей / Ю. Н. Базилевич // IX Международная конференция:

- Проблемы механики железнодорожного транспорта: Динамика, надежность и безопасность подвижного состава. Тезисы докладов конф
5. Базилевич Ю. Н. Алгоритм нахождения общего решения системы линейных однородных алгебраических уравнений в случае сверхбольшой разреженной матрицы коэффициентов / Ю. Н. Базилевич, А. Л. Булдович // Математические модели и современные технологии. — Киев: И
  6. Базилевич Ю. Н. Вычислительный подход к задаче нахождения неприводимых представлений конечной группы / Ю. Н. Базилевич // Прикладные проблемы математического моделирования: Вестник Херсонского государственного технического университета, 1999. — С. 29—31
  7. Воеводин В. В. Развитие методов решения задач алгебры в вычислительном центре Университета / В. В. Воеводин // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. Математика и механика. — 1970. — № 2. — С. 69—82.
  8. Жадан В. Г. Об одном варианте допустимого аффинно-масштабирующего метода для полуопределенного программирования / В. Г. Жадан // Тр. ИММ УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 2. — С. 145–160.
  9. Кафи, О'Келли. Классические нормальные формы колебаний демпфированных линейных динамических систем. — Тр. Америк. О-ва инж.-мех. Серия Е. Прикладная механика, 1965, 32, п. 3. — С. 117—123.
  10. Косолап А. И. Полуопределенное программирование для решения задач комбинаторной оптимизации / А. И. Косолап, А. С. Перетяцько // Вісник Запорізького національного університету. Серія «Прикладна математика. Інформатика». — 2013. — № 2. — С.
  11. Кэртис Ч. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр / Ч. Кэртис, И. Райнер. — М.: Наука, 1969. — 668 с.
  12. Лазарян В. А. Определение собственных значений матриц высоких порядков при помощи QR-алгоритма / В. А. Лазарян, Л. А. Длугач,

- И. А. Зильберман и др. // Некоторые задачи механики скоростного рельсового транспорта. — Киев: Наук. думка,
13. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике: Курс лекций для физиков-теоретиков. Изд. 2 / Г. Я. Любарский. — М.: URSS, 2016 — 360 с.
14. Любарский Г. Я. Теория групп и физика / Г. Я. Любарский. — М.: Наука, 1986. — 224 с.
15. Можаяев Г. В. Об использовании симметрии в линейных задачах оптимального управления с квадратичным критерием качества / Г. В. Можаяев // Автоматика и телемеханика. — 1975. — № 6. — С. 22—30; № 7. — С. 23—31.
16. Перетяцько А. С. Напіввизначена оптимізація для розв'язування загальних квадратичних задач: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.05.02 / Анастасія Сергіївна Перетяцько. — Дніпропетровськ, 2015 — 181 с.
17. Резников Л. М. Свойства матриц эквивалентных моделей многомассовых диссипативных систем / Л. М. Резников // Динамические характеристики механических систем. — Киев: Наук. Думка, 1984. — С. 15—22.
18. Смирнов В. П. Перестановочно-инверсионная симметрия и факторизационные разложения групп в теории молекул и кристаллов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат наук: спец. 01.04.01 Теоретическая физика / В. П. Смирнов. — Л., 1987. — 32 с.
19. Удилов В. В. Применение методов абстрактной алгебры при исследовании многомерных систем автоматического управления / В. В. Удилов // Кибернетика и вычисл. техника. — 1974. — Вып. 23. — С. 20—27.
20. Уилкинсон Дж. Х. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра / Дж. Х. Уилкинсон, С. Райнш. — М.: Машиностроение, 1976. — 389 с.

21. Фейс К. Алгебра: Кольца, модули и категории: В 2 т / К. Фейс. — М.: Мир, 1977—1979. — Т. 1—2.
22. Форсайт Дж. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений / Дж. Форсайт, К. Молер. — М.: Мир, 1977. — 168 с.
23. Эварестов Р. А. Методы теории групп в квантовой химии твердого тела / Р. А. Эварестов, В. П. Смирнов. — Л.: Из-во Ленинград. Ун-та, 1987, — 472 с.
24. Якубович Е. Д. Построение систем замещения для некоторого класса многомерных линейных систем автоматического управления / Е. Д. Якубович // Изв. вузов. Радиофизика. — 1969. — 12, № 3. — С. 362—377.
25. de Klerk E. Numerical block diagonalization of matrix \*-algebras with application to semidefinite programming / Etienne de Klerk, Cristian Dobre, Dmitrii V. Pasechnik // Math. Program., Ser. B (2011) 129: 91–111.
26. Maehara T. A numerical algorithm for block-diagonal decomposition of matrix \*-algebras with general irreducible components / Takanori Maehara, Kazuo Murota // Japan J. Indust. Appl. Math. (2010) 27: 263–293.
27. Murota K. A numerical algorithm for block-diagonal decomposition of matrix \*-algebras with application to semidefinite programming / Kazuo Murota, Yoshihiro Kanno, Masakazu Kojima, Sadayoshi Kojima. // Japan J. Indust. Appl. Math. (2010) 27: 125–160.
28. Todd M. J. Semidefinite optimization / M. J. Todd // Acta Numerica. — 2001. — № 10. — P. 515-560.
29. UF Sparse Matrix Collection. [E-resource] // Tim Davis — 2015 — Access to the resource: [http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/list\\_by\\_id.html](http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/list_by_id.html)

### РОЗДІЛ 3

## СПРОЩЕННЯ РІВНЯНЬ ЧЕРЕЗ ЗВЕДЕННЯ МАТРИЦЬ КОЕФІЦІЄНТІВ ДО БЛОЧНО-ТРИКУТНОГО ВИГЛЯДУ (ІЄРАРХІЧНА ДЕКОМПОЗИЦІЯ)

Зведення матриць коефіцієнтів до блочно-трикутного вигляду дозволяє перетворити початкову систему рівнянь до допоміжних підсистем меншого порядку, які є еквівалентними початковій системі рівнянь із погляду стійкості руху. Якщо матриці коефіцієнтів є несиметричними, то число таких допоміжних підсистем може бути більшим, ніж максимально можливе число незалежних підсистем, до яких можливо зведення даної системи рівнянь. Несиметричність матриць коефіцієнтів, як було зазначено вище, є обумовленою наявністю неконсервативних позиційних або гіроскопічних сил.

Зведення матриць до блочно-трикутного вигляду відповідає ієрархічній декомпозиції [9]. Для цього існують також терміни «послідовна (вертикальна) декомпозиція», «приводимість». Раніше використовувався також термін «агрегування». В [7] використано термін «редукція».

Прикладна сторона питання викладено в підрозділах 3.3 і 3.5. В інших підрозділах цього розділу міститься теоретичне обґрунтування методу і його порівняння з іншими підходами до розглянутої задачі. При цьому використано досить глибокі результати загальної алгебри.

Усі теоретичні міркування в даному розділі проведено для випадку комплексних матриць, однак, при обчисленнях часто вдається не виходити за межі арифметики дійсних чисел.

### 3.1. Основні теореми

У деяких випадках може виявитися, що матриці коефіцієнтів системи

$$B_1 \ddot{\mathbf{q}} + B_2 \dot{\mathbf{q}} + B_3 \mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \quad (3.1)$$

ніяким невиродженим перетворенням  $\tilde{B}_v = HB_vS$  не приводяться до блочно-діагонального вигляду, але приводяться до блочно-трикутного. Про це свідчить такий приклад.

### Приклад 3.1. Матриці

$$B_1 = E, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

не можливо звести одночасно до блочно-діагонального вигляду, у чому легко переконатися, обчисливши відповідний централізатор. У той самий час ці матриці мають трикутний вигляд. Отже, становить інтерес задача одночасного зведення матриць до блочно-трикутного вигляду.

Нехай  $S$  і  $H$  — невироджені матриці перетворення координат, за якими перетворена система рівнянь має вигляд:

$$\tilde{B}_1 \ddot{\mathbf{y}} + \tilde{B}_2 \dot{\mathbf{y}} + \tilde{B}_3 \mathbf{y} = \mathbf{0},$$

де

$$\tilde{B}_v = HB_vS = \begin{bmatrix} B_{v11} & B_{v12} & \dots & B_{v1p} \\ 0 & B_{v22} & \dots & B_{v2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{vpp} \end{bmatrix}.$$

Допоміжні системи рівнянь складемо із блоків матриць  $\tilde{B}_{vij}$ , що є розташованими на головній діагоналі:

$$B_{1,jj}\ddot{\mathbf{z}}_j + B_{2,jj}\dot{\mathbf{z}}_j + B_{3,jj}\mathbf{z}_j = \mathbf{0}, \quad j = \overline{1, p}. \quad (3.2)$$

**Теорема 3.1.** *Розв'язок початкової системи рівнянь є асимптотично стійким тоді й тільки тоді, коли асимптотично стійкими є розв'язки всіх допоміжних систем (3.2).*

**Д о в е д е н н я .** Характеристичний визначник

$$\det(D(\lambda)) = \det(\lambda^2 \tilde{B}_1 + \lambda \tilde{B}_2 + \tilde{B}_3)$$

перетвореної системи (3.1) дорівнює добутку характеристичних визначників системи (3.2). Отже, множина власних чисел системи (3.1) дорівнює об'єднанню множин власних чисел систем (3.2), оскільки умови рівності нулю визначників  $\det(D(\lambda))$  і  $\det(HD(\lambda)S)$  збігаються при неособливих матрицях  $H$  і  $S$ . ■

Відзначимо, що у випадку зведення матриць до блочно-діагонального вигляду множина допоміжних підсистем є еквівалентною початковій системі рівнянь як з погляду асимптотичної стійкості, так і з погляду стійкості.

Далі розглядаємо перетворення не трьох, а довільного числа матриць. Це може знадобитися, наприклад, у випадку, коли матриці залежать від параметрів (розділ 2).

Ієрархічна декомпозиція може надати додаткове (стосовно декомпозиції на незалежні підсистеми) спрощення лише у випадку несиметричних матриць. Про це свідчить така теорема.

**Теорема 3.2.** *Якщо матриці  $B_v$ ,  $v = \overline{1, d}$ , є симетричними і приводяться одночасно до блочно-трикутного вигляду через перетворення*



подібності, то вони приводяться й до блочно-діагонального вигляду з тою самою кількістю блоків на головній діагоналі.

**Д о в е д е н н я .** Нехай матриці  $\tilde{B}_\nu = S^{-1}B_\nu S$  мають верхній блочно-трикутний вигляд. Проведемо ортонормування стовпців матриці  $S$ . Це можна зробити, помноживши справа матрицю  $S$  на верхню трикутну матрицю  $T$ . Отримана матриця  $U = ST$  буде ортогональною. Перетворення  $U^{-1}B_\nu U$  також приводить матрицю  $B_\nu$  до блочно-трикутного вигляду. Дійсно,  $\hat{B}_\nu = U^{-1}B_\nu U = T^{-1}S^{-1}B_\nu S T = T^{-1}\tilde{B}_\nu T$ . В останньому добутку всі три матриці мають однаковий блочно-трикутний вигляд, тому  $\hat{B}_\nu$  також є блочно-трикутними матрицями. При ортогональній перетворенні подібності симетричність матриць зберігається. Отже, блочно-трикутні матриці  $\hat{B}_\nu$  є симетричними, а виходить, і блочно-діагональними. ■

Розглянемо спочатку питання про зведення матриць до вигляду (3.1) через перетворення подібності, тобто у випадку, коли  $H = S^{-1}$ .

Загальновідомо, що для того щоб матриці  $B_\nu$  можна було звести до блочно-трикутного вигляду через перетворення подібності, необхідним і достатнім є існування нетривіального підпростору  $V \subset \mathbb{C}^n$ , інваріантного відносно  $B_\nu$ . Це впливає, наприклад, з теореми 1.4. Тому для можливості зведення матриць  $B_\nu$  до блочно-трикутного вигляду (3.1) з  $p$  блоками на головній діагоналі через перетворення подібності необхідним і достатнім є існування ланцюжка підпросторів  $\{\mathbf{0}\} = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_p = \mathbb{C}^n$ , інваріантних відносно матриць  $B_\nu$ , причому кожний підпростір  $L_{j+1}$  має розмірність, більшу за розмірність підпростору  $L_j$  на число, що дорівнює порядку блоку  $B_{\nu jj}$ .

Теорема 1.4 не дає обчислювальних алгоритмів для розв'язання задачі ієрархічної декомпозиції. Теорема 3.3 надає такий алгоритм в окремому випадку.

**Теорема 3.3.** *Якщо ранг централізатора  $\Lambda(B_\nu)$  матриць  $B_\nu$  більший за одиницю:  $r > 1$ , то матриці  $B_\nu$  приводяться до блочно-трикутного вигляду.*

**Д о в е д е н н я .** Виберемо базис  $W_1, \dots, W_r$  алгебри  $\Lambda(B_\nu)$ , в якому  $W_1 = E$ . Якщо матриця  $W_2$  має хоча б два різні власні числа, то матриці  $B_\nu$  приводяться до блочно-діагонального (а отже, і до блочно-трикутного) вигляду із блоками, що відповідають різним власним числам матриці  $W_2$ . Якщо ж матриця  $W_2$  має єдине власне число  $\lambda$ , то матриця  $G = W_2 - \lambda E$  є нильпотентною й задовольняє умовам теореми 1.4. Дійсно, підпростір  $L = \{\xi: G\xi = 0\}$  є нетривіальним, оскільки матриця  $G$  є нильпотентною й ненульовою. Крім того:  $GB_\nu\xi = B_\nu G\xi = B_\nu 0 = 0 \forall \xi$ . Тому існує перетворення, що приводить матриці  $B_\nu$  до блочно-трикутного вигляду. ■

Умова  $r > 1$  не є необхідною для зведення матриць до блочно-трикутного вигляду. Наприклад, базис централізатора матриць із прикладу 3.1 складається з однієї матриці  $E$ . Необхідні й достатні умови, придатні для побудови обчислювальних алгоритмів, наведено в підрозділі 3.2.

Перетворення  $HB_\nu S$  є узагальненням перетворення подібності. Уведемо позначення. Нехай  $l'(B_\nu, S)$  — кількість блоків на головній діагоналі матриць  $\tilde{B}_\nu = S^{-1}B_\nu S$ , наведених до блочно-діагонального вигляду, а

$$l(B_\nu) = \max_{S: \det S \neq 0} l'(B_\nu, S).$$

**Теорема 3.4.** *Дано матриці  $B_\nu$ ,  $\nu = \overline{1, d}$ , причому  $B_1 = E$ , тоді  $l(NB_\nu) \leq l(B_\nu)$ , де  $N$  — будь-яка неособлива матриця.*

Д о в е д е н н я . Нехай  $N_1$  і  $S_1$  — матриці, за допомогою яких дані матриці  $B_\nu$  приводяться до блочно-трикутного вигляду за формулою  $\hat{B}_\nu = S_1^{-1} N_1 B_\nu S_1$  й мають при цьому максимально можливу кількість  $l_1$  блоків на головній діагоналі. Зрозуміло, що в цьому випадку матриці  $\tilde{D}_\nu = (\hat{B}_1)^{-1} \hat{B}_\nu$  теж є блочно-трикутними із блоками тої самої розмірності. Згідно з теоремою 1.4, повинні існувати матриці  $G(\boldsymbol{\tau})$  ( $\boldsymbol{\tau} \in C^m$ ) такі, що

$$\begin{aligned} \tilde{G}^j(\boldsymbol{\tau}) \tilde{D}_\nu \tilde{L}_j &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \quad \forall \nu, \\ \{\mathbf{0}\} \equiv \tilde{L}_0 &\subset \tilde{L}_1 \subset \tilde{L}_2 \subset \dots \subset \tilde{L}_{l_1} \equiv C^n, \quad \dim \tilde{L}_{j+1} > \dim \tilde{L}_j, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де  $\tilde{L}_j = \{\tilde{\xi} : \tilde{G}^j(\boldsymbol{\tau}) \tilde{\xi} = 0\}$ .

Зробимо перетворення подібності  $D_\nu = S_1 \tilde{D}_\nu S_1^{-1}$ ,  $G(\boldsymbol{\tau}) = S_1 \tilde{G}(\boldsymbol{\tau}) S_1^{-1}$  і заміну векторів  $\tilde{\xi}$  на  $\xi = S_1 \tilde{\xi}$ . Співвідношення (3.3) при цьому зберігаються. Крім того,  $D_\nu = B_\nu$ :

$$D_\nu = S_1 \tilde{D}_\nu S_1^{-1} = S_1 (S_1^{-1} N_1 S_1)^{-1} (S_1^{-1} N_1 B_\nu S_1) S_1^{-1} = S_1 S_1^{-1} N_1^{-1} S_1 S_1^{-1} N_1 B_\nu S_1 S_1^{-1} = B_\nu.$$

Далі, використовуючи теорему 1.4, одержуємо  $l(B_\nu) \geq l_1$ . ■

Отже, для знаходження перетворення (3.1) з максимально можливою кількістю блоків на головній діагоналі достатньо розв'язати таку задачу за допомогою перетворення подібності для допоміжних матриць  $C_\nu = B_1^{-1} B_{\nu+1}$ ,  $\nu = \overline{1, \mu}$ ,  $\mu = d - 1$ . Розглянуто випадок, коли матриця  $B_1$  є неособливою.

Для задачі ієрархічної декомпозиції, так само як і для розщеплення, виконується теорема єдиності. Вона є наслідком теореми Жордана-Гьольдера (див. також [4]).

Достатня умова теореми (1.4) виконується й у випадку, коли існує одна матриця, для якої виконуються умови (1.13). Необхідна ж умова може не виконуватися, тобто існує приклад матриць (приклад 3.2), що мають блочно-трикутний вигляд, для яких не існує матриці  $G$ , що задовольняє умовам (1.13).

### Приклад 3.2. Матриці

$$\begin{aligned}
 B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

мають блочно-трикутний вигляд, і для них не існує матриці  $G$ , для якої виконуються умови (1.13).

Кожна з матриць  $G(\boldsymbol{\tau})$  у формулах (1.13) є нильпотентною. Це випливає з того, що  $L_p \equiv C^n$ , тобто рівняння  $G^p(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  має  $n$  лінійно незалежних розв'язків, що є можливим лише у випадку, коли  $G^p(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0}$ .

Помітимо, що матриці (3.4) мають вигляд

$$B_i = \left[ \begin{array}{c|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \hline 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} B_{i11} & B_{i12} \\ 0 & B_{i22} \end{bmatrix},$$

причому блоки  $B_{i22}$  не приводяться до трикутного вигляду одночасно. Це випливає з того, що матриці  $B_{422}, \dots, B_{722}$  утворюють базис повної матричної

алгебри порядку 2. Звідси за теоремою 1.4 випливає, що для матриць (3.4) є неможливим одержати більше двох блоків на головній діагоналі.

Припустимо, що існує відповідна матриця  $G$  така, що  $G^{k-1} \neq 0, G^k = 0, 3 \geq k > 1$  і виконуються рівності (1.13). Якщо  $k = 3$ , то по достатній умові теореми 1.4 для матриць (3.4) можна було б одержати три блоки на головній діагоналі. Тому  $k = 2$  і рівність (1.13) здобуває вигляд  $GB_i L_1 = 0, 0 \equiv L_0 \subset L_1 \subset L_2 \equiv C^n$ . Нехай  $0 \neq \xi \in L_1$ , де з рівності  $GB_k \xi = 0$  при  $k = 1, 2, 3$  одержуємо  $g_{k1} \xi_i = 0, i = \overline{1, 3}, k = \overline{1, 3}$ , де  $\xi_i$  — компоненти вектора  $\xi$ .

Звідси, враховуючи те, що  $\xi_i (i = \overline{1, 3})$  не дорівнюють нулю одночасно, одержуємо:

$$g_{k1} = 0, k = 1, 2, 3, \quad (3.5)$$

тобто перший стовпець матриці  $G$  є нульовим. Припустимо  $\text{rang} G = 2$ . Тоді з умови  $GG = 0$  отримаємо:  $g_{ij} = 0, i = 2, 3; j = 2, 3$ , а в цьому випадку матриця має два нульові рядки. Тому  $\text{rang} G < 2$ . Для будь-якого вектора  $\xi \in L_1$  виконується рівність  $G\xi = 0$ , або в скалярному записі

$$g_{i2} \xi_2 + g_{i3} \xi_3 = 0, i = \overline{1, 3}. \quad (3.6)$$

Оскільки  $\text{rang} G < 2$ , система рівнянь (3.6) має ненульовий розв'язок  $[\xi_2, \xi_3]$ , тобто  $\exists \xi \in L_1: \xi_k \neq 0, k = 2 \vee k = 3$ . Для вектора  $\xi$  виконуються рівності  $GB_i \xi = 0, i = \overline{1, 7}$ . Із цих рівностей з номерами  $i = 2 + 2k, 3 + 2k$  отримаємо:  $g_{j2} \xi_k = 0, g_{j3} \xi_k = 0, j = \overline{1, 3}$ . Оскільки

$\exists k: \xi_k \neq 0$ , то з врахуванням (3.5) знаходимо, що всі елементи матриці  $G$  є нульовими. Це суперечить первісному припущенню. ■

### 3.2. Знаходження загального інваріантного підпростору декількох матриць (метод інваріантного підпростору)

Для зведення матриць  $B_\nu$  до блочно-трикутного вигляду необхідно знайти їхній загальний нетривіальний інваріантний підпростір, тобто підпростір, що є інваріантним відносно всіх матриць одночасно.

Перший крок методу — **побудова алгебри з одиницею  $\varphi(B_\nu)$ , породженої даними матрицями**. Це можна зробити так: спочатку вибираємо лінійно незалежні елементи множини матриць  $\{E, B_\nu, \nu = \overline{1, \mu}\}$  і називаємо їх «передбачуваним базисом». Потім розглядаємо всі можливі добутки цих матриць. Як тільки черговий добуток не належить до лінійної оболонки «передбачуваного базису», додаємо його до цієї множини й розглядаємо добутки елементів нового «передбачуваного базису». Продовжуємо доти, поки не одержимо, що жодний із добутків не виходить за межі лінійної оболонки. Ознакою того, що елемент не належить до лінійної оболонки «передбачуваного базису», є те, що додавання нового вектору дає лінійно незалежну сукупність векторів. Перевірка лінійної незалежності є можливою за допомогою програми SLAU5 (розділ 3).

Критерій можливості зведення матриць до блочно-трикутного вигляду (приводимості алгебри): ранг алгебри  $\varphi(B_\nu)$  менший за  $n^2$ , де  $n$  — порядок матриць. Це впливає з теореми Бернсайда [5, 6, 11] (див. також [8] теорема 1').

Другий крок — **обчислення радикала алгебри (у випадку виконання критерію)**.

**Теорема 3.5.** *Якщо для даних матриць  $\{B_\nu\}$  ранг  $r$  алгебри  $\varphi(B_\nu)$  менший за  $n^2$  і централізатор  $\Lambda(B_\nu)$  не містить жодної матриці  $X$  з різними власними числами, то алгебра  $\varphi(B_\nu)$  є ненапівпростою.*

**Д о в е д е н н я .** Умова  $r < n^2$  означає, що алгебра  $\varphi(B_\nu)$  є звідною алгеброю [5, 11]. Звідна алгебра може бути напівпростою або ненапівпростою. Припустимо, що вона є напівпростою. У цьому випадку матриці алгебри (у тому числі й  $\{B_\nu\}$ ) можуть бути приведені до блочно-діагонального вигляду. Тоді множина  $\Lambda(B_\nu)$  містить матриці з різними власними числами, що суперечить умові теореми. Залишається другий випадок — ненапівпроста алгебра. ■

Ненапівпроста алгебра має нетривіальний радикал. Для його знаходження є розрахункові формули [13]: координати  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]^T$  будь-якого елемента радикала в цьому базисі задовольняють рівнянню

$$D\alpha = \mathbf{0}, D = \{d_{ij}\}, \quad (3.7)$$

де  $d_{ij} = \text{Sp}(W_i W_j)$ ,  $\text{Sp}$  — слід матриці,  $\{W_i\}$  — базис алгебри.

Загальний розв'язок рівнянь (3.7) можна одержати відомими методами. Можна, наприклад, скористатися програмою SLAU5. Отже, можна одержати базис радикала.

Третій крок методу — **знаходження інваріантного підпростору й побудова матриці перетворення.**

Назвемо  **$Z$ -множиною** переріз всіх ядер елементів радикала алгебри  $\varphi(B_\nu)$ . Іншими словами — це множина, що звертається в нуль усіма матрицями радикала. Знайти  $Z$ -множину (його базис) можна як загальний розв'язок відповідної системи алгебраїчних рівнянь.

**Теорема 3.6.**  *$Z$ -множина є підпростором простору  $C^n$ .*

**Д о в е д е н н я .** Цю множину може бути знайдено з використанням не всіх матриць радикала, а тільки елементів базису. Обчислення відповідає знаходженню розв'язку системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь. Загальний розв'язок такої системи, як відомо, є підпростором. ■

**Теорема 3.7.** *Якщо алгебра є ненапівпростою, то  $Z$ -множина є нетривіальним підпростором.*

**Д о в е д е н н я .** Ненульовий радикал матричної алгебри являє собою сімейство матриць  $G(\boldsymbol{\tau})$ , де  $\boldsymbol{\tau}$  — вектор параметрів. Радикал є нильпотентною підалгеброю, оскільки всі його елементи є нильпотентними (див. [13, § 7, теорема 2]). Отже,  $\exists k \geq 1: G^k(\boldsymbol{\tau}) \neq 0, G^{k+1}(\boldsymbol{\tau}) = 0$ . Нехай  $G_1$  — ненульова матриця із множини  $G^k(\boldsymbol{\tau})$ , а  $\xi_1$  — її ненульовий стовпець. Тоді  $G(\boldsymbol{\tau})\xi_1 = 0 \forall \boldsymbol{\tau}$ , оскільки  $G(\boldsymbol{\tau})(G^k(\boldsymbol{\tau})) = 0$ . Отже, рівняння  $G(\boldsymbol{\tau})\xi = \mathbf{0}$  має ненульові розв'язки. ■

**Теорема 3.8.**  *$Z$ -множина є інваріантним підпростором відносно матриць  $\{B_\nu\}$ .*

**Д о в е д е н н я .** Радикал  $G(\boldsymbol{\tau})$  алгебри  $\varphi(B_\nu)$  є її ідеалом. Матриці  $B_\nu$  належать алгебрі  $\varphi(B_\nu)$ . Тому  $\forall \boldsymbol{\tau}_1: G(\boldsymbol{\tau}_1)B_\nu \in \{G(\boldsymbol{\tau})\}$ . Звідси одержуємо

$$G(\boldsymbol{\tau}_1)B_\nu \xi = G(\boldsymbol{\tau}_2)\xi = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\tau}_1,$$

де  $\xi \in Z = \{\xi: G(\boldsymbol{\tau})\xi = \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{\tau}\}$ , тобто  $Z$ -множина є інваріантною відносно матриць  $\{B_i\}$ . ■

Таким чином, для випадку, коли матриці не приводяться до блочно-діагонального вигляду, але ранг алгебри  $\varphi(B_\nu)$  є меншим за  $n^2$ , ми маємо метод побудови нетривіального підпростору, інваріантного відносно цих



матриць. У наступному параграфі розглянуто обчислювальні аспекти цієї побудови.

Шукану матрицю перетворення  $S$  формуємо з векторів базисів цього підпростору й підпростору, що є прямим доповненням до нього. Розташовуємо вектор у якості стовпців (див. доведення теореми 3.3). Нехай  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_m$  — базис підпростору  $L_1$ . Знайдемо дальші вектори як доповнення перших до базису всього  $n$ -мірного простору. Це можна зробити, наприклад, так: знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, відповідних до умов  $\mathbf{s}_k \perp \mathbf{y}$  ( $k = \overline{1, m}$ ) (або іншими словами,  $\mathbf{s}_k^T \mathbf{y} = 0$  при  $k = \overline{1, m}$ ). Загальний розв'язок знаходиться як базис множини всіх розв'язків (див. вище). Вектори цього базису будуть відігравати роль векторів  $\mathbf{s}_{m+1}, \mathbf{s}_{m+2}, \mathbf{s}_{m+3}, \dots, \mathbf{s}_n$ , оскільки вони є ортогональними підпростору  $L_1$ . Матриця  $S$ , стовпцями якої є вектори  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$ , приводить матриці  $B_v$  до блочно-трикутного вигляду.

Застосовуючи викладений прийом спочатку до початкових матриць, потім до отриманих діагональних блоків, одержуємо максимально можливу кількість блоків на головній діагоналі. Єдиність такого зведення затверджує теорема єдиності.

### 3.3. Докладний опис алгоритму

У даному параграфі викладено конкретні обчислювальні алгоритми для зведення матриць  $B_v$ ,  $v = \overline{1, \mu}$ , до блочно-трикутного вигляду. Розглянуто випадок, коли зведення цих матриць до блочно-діагонального вигляду є неможливим. А якщо ні, то доцільно спочатку виконати таке зведення (див. розділ 2), а потім уже приводити отримані блоки до блочно-трикутного вигляду. Передбачено також, що хоча б одна з матриць  $B_v$  є несиметричною. Якщо всі матриці є симетричними, то після зведення до блочно-

діагонального вигляду з максимально можливим числом блоків подальше їхнє перетворення є недоцільним (теорема 3.2).

3.3.1. Перший крок — складання алгебри матриць  $\varphi(B_\nu)$ , породженої матрицями  $E, B_1, B_2, \dots, B_\mu$ . Це можна зробити у такий спосіб:

а. Уводимо  $B_0 = E$ .

б. Вибираємо базис у множині матриць  $\{B_{k-1}\}$ ,  $k = \overline{0, \mu+1}$ . Для цього можна звернутися до програми SLAU5. Нові матриці базису позначимо  $W_1, \dots, W_\mu$ .

с. Обчислюємо добутки  $W_j W_k$ , перевіряємо для кожного з них, чи є він лінійною комбінацією матриць  $\{W_k\}$ . Якщо ні, то оголошуємо добуток новим елементом множини  $\{W_k\}$ . Для цього:

(i) уважаємо  $r = \mu$ ;

(ii)  $j = 1$ ;

(iii)  $k = 1$ ;

(iv) обчислюємо  $Z = W_j W_k$ , перевіряємо лінійну залежність матриць  $W_1, W_2, \dots, W_r, Z$  (за допомогою програми SLAU5). Якщо вони є лінійно незалежними, уважаємо  $r := r + 1$ ,  $W_r = Z$  і вертаємося до п. (ii);

(v)  $k := k + 1$ , якщо  $k \leq r$  переходимо в п. (iv);

(vi)  $j := j + 1$ , якщо  $j \leq r$  переходимо до п. (iii).

Для економії машинного часу можна запам'ятовувати такі комбінації  $j$  і  $k$ , для яких п. (iv) виконувався, і, у випадку збільшення числа  $r$ , повторно не робити обчислення п. (iv) для цих комбінацій. У результаті розрахунків одержимо базис  $W_1, W_2, \dots, W_r$ . Зрозуміло, що  $r \leq n^2$ .

3.3.2. Якщо  $r = n^2$ , то, як було зазначено вище, зведення матриці  $B_\nu$  до блочно-трикутного вигляду є неможливим. Якщо ж  $r < n^2$ , то зведення є можливим за допомогою радикала алгебри, оскільки розглянуто випадок, коли зведення до блочно-діагонального вигляду (якщо таке можливе для початкових матриць) уже є виконаним.



## К о м е н т а р і

1. Матриця  $G^{(j)}$  — це  $j$ -й елемент базису радикала.
2. Пункти (iii), (iv) і (v) відповідають знаходженню  $Z$ -множини через розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} G^{(1)}\xi = \mathbf{0}, \\ G^{(2)}\xi = \mathbf{0}, \\ \dots\dots\dots \\ G^{(k)}\xi = \mathbf{0}. \end{cases}$$

3. Пункт (vi) відповідає доповненню базису  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\}$  підпростору  $L$  до базису всього простору  $C^n$ . Це пояснюється тим, що: а) ці вектори є лінійно незалежними; б) вони відігравали роль рядків матриці коефіцієнтів при знаходженні векторів  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ .

Загальний хід обчислень представлено на такій блок-схемі (рис. 3.1).

**Приклад 1.2 (продовження).**

У підрозділі 1.5 було отримано такі матриці:

$$\tilde{B}_1 = \left[ \begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \tilde{B}_2 = \left[ \begin{array}{cc|c} 5 & -4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 11 \end{array} \right].$$

Далі розглядаємо блоки  $B_{111} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_{211} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ . Для них множина всіх комутуючих матриць  $\Lambda(B_v)$  дорівнює  $\alpha E$ , де  $\alpha$  — довільне число. Значить зведення цих блоків до блочно-діагонального вигляду є неможливим. Перевіримо можливість ієрархічної декомпозиції. Матриці  $E$ ,  $B_{111}$  і  $B_{211}$  є лінійно незалежними. Добутки матриць на  $E$ , а також  $B_{111}^2$

належать лінійній оболонці перших трьох матриць. Розглянемо добуток  $U = B_{111} B_{211}$ . Безпосередньою перевіркою переконуємося, що з рівності  $\alpha E + \beta B_{111} + \gamma B_{211} + \lambda U = 0$  випливає  $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$ , тобто матриця  $U$  не належить лінійній оболонці перших трьох матриць. Одержуємо, що  $r = 4$  і умова  $r < n^2$  не виконується.

Подальше спрощення системи рівнянь є неможливим.



Рис. 3.1. Черговий крок зведення до блочно-трикутного вигляду

### Приклад 3.3.

$$B_1 = E; B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що відповідний централізатор складається лише з матриць вигляду  $\alpha E$ . Отже, зведення до діагонального вигляду матриць  $B_\nu$  є неможливим.

Складемо алгебру  $\varphi(B_\nu)$ . Матриці  $B_\nu$  є лінійно незалежними. Розглянемо всі можливі добутки матриць  $B_k B_j$  і перевіримо, чи є отримані матриці лінійною комбінацією початкових. Оскільки множення на  $B_1 = E$  не змінює матриць, залишається розглянути добутки  $B_k B_j$  для  $k, j = 2, 3$ .

Обчислюємо  $B_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ . Перевіримо, чи є ця матриця лінійною комбінацією перших двох:  $B_2^2 = \alpha B_1 + \beta B_2$ . Ця рівність відповідає системі рівнянь:

$$\begin{cases} 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1, \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0, \\ 3 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1, \\ 4 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2. \end{cases}$$

З останніх двох рівнянь одержуємо  $\beta = 3$ ,  $\alpha = -2$ , потім переконуємося, що ці значення задовольняють і першим двом рівнянням. Отже, матриця  $B_2^2$  є лінійною комбінацією матриць  $B_1$  і  $B_2$ . Далі обчислюємо:

$$B_2 B_3 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -7 & -4 \end{bmatrix} = B_3; \quad B_3 B_2 = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ -11 & -8 \end{bmatrix} = -6E + 3B_2 + 2B_3;$$

$$B_3^2 = \begin{bmatrix} 21 & 12 \\ -21 & -12 \end{bmatrix} = 3B_3.$$

Ми отримали, що всі добутки належать лінійній оболонці матриць  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ . Отже, ці матриці утворюють базис алгебри  $\varphi(B_v)$ , породженої матрицями  $B_v$ . Число елементів базису  $r = 3$ , тобто  $r < n^2 \equiv 2^2$ . Це означає, що зведення до трикутного вигляду є можливим.

Складемо матрицю  $D = \{\text{Sp}(B_j B_k)\}$ . Усі добутки  $B_j B_k$  вже обчислено. Одержуємо:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Можна переконатися, що  $\det D = 0$ . Складемо систему рівнянь  $Dy = \mathbf{0}$ :

$$\begin{aligned} 1) \quad & 2y_1 + 3y_2 + 3y_3 = 0, \\ 2) \quad & 3y_1 + 5y_2 + 3y_3 = 0, \\ 3) \quad & 3y_1 + 3y_2 + 9y_3 = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для знаходження загального розв'язку цієї системи зручно скористатися методом, описаним в 3.2. Хід обчислень наведено у табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Рівняння системи (3.8)	Коефіцієнт при невідомих		
	$y_1$	$y_2$	$y_3$
1)	2	3	3
2)	3	5	3
3)	3	3	9
1)' = 1)/2	1	1,5	1,5

$2)' = 2) - 3 \cdot 1)'$	0	0,5	-1,5
$3)' = 3) - 3 \cdot 1)'$	0	-1,5	4,5
$1)'' = 1)' - 1,5 \cdot 2)''$	1	0	6
$2)'' = 2)'/0,5$	0	1	-3
$3)'' = 3)' - (1,5 \times 2)''$	0	0	0

У результаті одержуємо:

$$\begin{cases} y_1 + 6y_3 = 0, \\ y_2 - 3y_3 = 0, \end{cases}$$

або, в іншому записі:  $y_1 = -6y_3$ ,  $y_2 = 3y_3$ , де  $y_3$  — вільна змінна. Поклавши  $y_3 = 1$ , одержуємо:  $\mathbf{y} = [-6 \ 3 \ 1]^T$ .

Обчислюємо матрицю  $G$ :

$$G = -6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Рівняння  $G\xi = 0$  мають вигляд:

$$\begin{cases} 4\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ -4\xi_1 - 4\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси  $\xi_1 = -\xi_2$ . Поклавши  $\xi_2 = 1$ , одержуємо, що базис у множині розв'язків цієї системи складається з вектора  $\mathbf{s}_1 = \xi = [-1 \ 1]^T$ . Цей вектор і вектор  $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0]^T$  є лінійно незалежними. Тому  $S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Далі одержуємо:



$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \tilde{B}_1 = S^{-1}ES = E; \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Усі матриці  $\{\tilde{B}_i\}$  мають верхній трикутний вигляд.

### 3.4. Різні підходи до задачі знаходження загального інваріантного підпростору декількох матриць

Питання про можливість зведення декількох матриць до блочно-трикутного вигляду зводиться до знаходження загального нетривіального інваріантного відносно цих матриць підпростору. З іншого боку, інваріантні підпростори кожної з матриць окремо є відомими після знаходження канонічного базису матриці. Постають питання: як знайти загальний інваріантний підпростір, якщо відомими є канонічні базиси матриць, чи завжди це є можливим? Розглянемо окремий випадок: матриць дві ( $B_1$  і  $B_2$ ), кожна з них має просту структуру, тобто існують базиси із власних векторів.

Труднощі, пов'язані зі спробою порівняння інваріантних підпросторів, виникають з таких причин:

1) підпростір інваріантного підпростору може бути неінваріантним.

Наприклад, матриця  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  має інваріантний підпростір, що є

лінійною оболонкою векторів  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  і  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , однак лінійна оболонка

вектора  $\mathbf{e}_1$  не є інваріантною відносно матриці  $A$ ;

2) розширення інваріантного підпростору може бути неінваріантним.

Так, вектор  $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  породжує інваріантний підпростір матриці  $A$  з

попереднього прикладу, але лінійна оболонка векторів  $\mathbf{e}_3$  і  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  не є

інваріантним підпростором;

3) у випадку кратних власних чисел базис інваріантного підпростору

вибирається неоднозначно. Наприклад, вектори  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  й  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  або  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  і  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  є

різними варіантами базису того самого інваріантного підпростору

матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Сформулюємо такі способи знаходження загального інваріантного підпростору, а потім перевіримо їх «універсальність».

**Спосіб 3.1.** Нехай  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  — це різні власні числа матриці  $B_1$ , а  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$  — це різні власні числа матриці  $B_2$ . Якщо при якій-небудь комбінації чисел  $\lambda_i$  і  $\mu_j$  система рівнянь

$$\begin{cases} (B_1 - \lambda_i E)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \\ (B_2 - \mu_j E)\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases}$$

має нетривіальні розв'язки, то множина цих розв'язків буде шуканим підпростором.

*Зауваження 3.1.* Спосіб 3.1 гарантує одержання результату у випадку, коли кожна з матриць не має кратних власних чисел. У загальному випадку шукані підпростори не завжди можна виявити за допомогою способу 3.1.

**Спосіб 3.2.** Нехай  $L_1, L_2, \dots, L_{m_1}$  — інваріантні підпростори матриці  $B_1$ , що відповідають її різним власним числам  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_1}$ , а  $M_1, M_2, \dots, M_{m_2}$  — аналогічні інваріантні підпростори матриці  $B_2$ . Складемо підпростори  $U_i = (L_1, \dots, L_{m_1}, L_1 + L_2, \dots, L_2 + L_3, \dots, L_2 + L_3 \dots + L_{m_1})$ , тобто прямі суми всіх різних комбінацій просторів  $L_v$ , крім усього  $\mathbb{C}^n$ . Нехай  $V_j$  — аналогічні інваріантні підпростори матриці  $B_2$ . Якщо існує така комбінація  $i$  та  $j$ , що  $U_i = V_j$ , то шуканий підпростір  $L = U_i$ .

**Приклад 3.4.**

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Тут матриці вже мають трикутний вид. Чи дозволяє спосіб 3.2 «побачити» інваріантний підпростір?

Власні числа матриць дорівнюють:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5, \mu_1 = 2, \mu_2 = 4, \mu_3 = 10,$$

відповідні власні вектори матриць дорівнюють:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тому

$$U_1 = L_1 = \{\alpha \mathbf{a}_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

де  $\alpha$  — вільна змінна.

Аналогічним чином одержуємо  $L_2$  й  $L_3$ . Далі:

$$U_4 = L_1 + L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad U_5 = L_1 + L_3, \quad U_6 = L_2 + L_3.$$

Простори  $V_j$  побудовані за допомогою векторів  $\mathbf{b}_k$ . Порівняння показує, що  $U_4 = V_4$ . Дійсно, довільний елемент підпростору  $U_4$  дорівнює  $\alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2$ , а підпростору  $V_4$  дорівнює  $\alpha' \mathbf{b}_1 + \beta' \mathbf{b}_2$ . Їхня рівність означає:

$$\alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2 = \alpha' \mathbf{b}_1 + \beta' \mathbf{b}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' + \beta' \\ \alpha' - \beta' \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Права частина співвідношень (3.9) надає формули переходу від одних вільних змінних до інших з неособливою матрицею перетворення:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}.$$

Таким чином, спосіб 3.2 дозволяє розв'язати приклад 3.4.

За допомогою способу 3.1 знайти цей двовимірний підпростір є неможливим, оскільки кожному із власних чисел  $\{\lambda_i\}$  і  $\{\mu_j\}$  відповідають одновимірні підпростори.

### Приклад 3.5.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тут матриці вже мають блочно-трикутний вигляд. Перший діагональний блок є другого порядку, а другий — першого. Загальним

інваріантним підпростором є множина векторів вигляду  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ , де  $\alpha$  і  $\beta$  —

довільні числа.

Перевіримо: чи дозволяє спосіб 3.2 знайти цей підпростір?

Власні числа й вектори матриць дорівнюють:

$$\lambda_1 = 1, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 2, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = 5, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\mu_1 = 2, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = \mu_3 = 4, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Помітимо, що зазначені тут вектори  $\mathbf{b}_2$  і  $\mathbf{b}_3$  — це лише один з можливих варіантів базису в підпросторі  $M_2 = \text{span}(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ , відповідному до власного числа  $\mu_2 = 4$ . Тут і далі  $\text{span}(\cdot)$  означає лінійну оболонку векторів.

Підпростори  $\{L_i\}$  матриці  $B_1$  такі:

$$L_1 = \text{span}(\mathbf{a}_1), \quad L_2 = \text{span}(\mathbf{a}_2), \quad L_3 = \text{span}(\mathbf{a}_3).$$

Відповідно інваріантні підпростори  $\{U_i\}$  дорівнюють:

$$U_1 = L_1, \quad U_2 = L_2, \quad U_3 = L_3, \quad U_4 = L_1 + L_2, \quad U_5 = L_1 + L_3, \quad U_6 = L_2 + L_3.$$

Підпростори  $\{V_i\}$  такі:

$$V_1 = \text{span}(\mathbf{b}_1), \quad V_2 = \text{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Перевіримо умову  $U_i = V_j$ . Спочатку розглянемо одновимірні підпростори. Підпростір  $V_1$  не збігається із жодним з підпросторів  $U_1, U_2, U_3$ .

Щоб двовимірний підпростір  $V_2$  збігався з підпростором обидва потрібно, щоб обидва вектори  $\mathbf{b}_2$  і  $\mathbf{b}_3$  належали лінійній оболонці векторів  $\mathbf{a}_1$  і  $\mathbf{a}_2$ . Це є неможливим, тому що у векторів  $\mathbf{a}_1$  і  $\mathbf{a}_2$  третя складова є нульовою, а у вектора  $\mathbf{b}_2$  — ні. В аналогічний спосіб вектор  $\mathbf{b}_3$  не належить лінійній оболонці векторів  $\mathbf{a}_1$  і  $\mathbf{a}_3$ , оскільки у цих векторів друга складова є нульовою. Отже,  $V_2 \neq U_5$ . Залишилося зіставити підпростори  $V_2$  і  $U_6$ . Припустимо  $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in U_6$ . Тоді повинні виконуватися рівності  $\mathbf{b}_2 = \alpha\mathbf{a}_2 + \beta\mathbf{a}_3$  й  $\mathbf{b}_3 = \gamma\mathbf{a}_2 + \delta\mathbf{a}_3$ . Друга рівність приводить до такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} 0 = \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 1; \\ 0 = \gamma \cdot 1 + \delta \cdot 0; \\ 1 = \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 1. \end{cases}$$

Ця система рівнянь є несумісною: перше рівняння суперечить третьому. Тому  $V_2 \neq U_6$ .

Отже, нетривіальний підпростір, інваріантний відносно матриць  $B_1$  і  $B_2$ , існує, однак способи 3.1 і 3.2 не дозволяють його знайти [1].

Інваріантні відносно матриць  $B_1$  і  $B_2$  підпростори зображено на рис. 3.2. Загальний інваріантний підпростір тут позначено як « $L_{\text{інв.}}$ ».

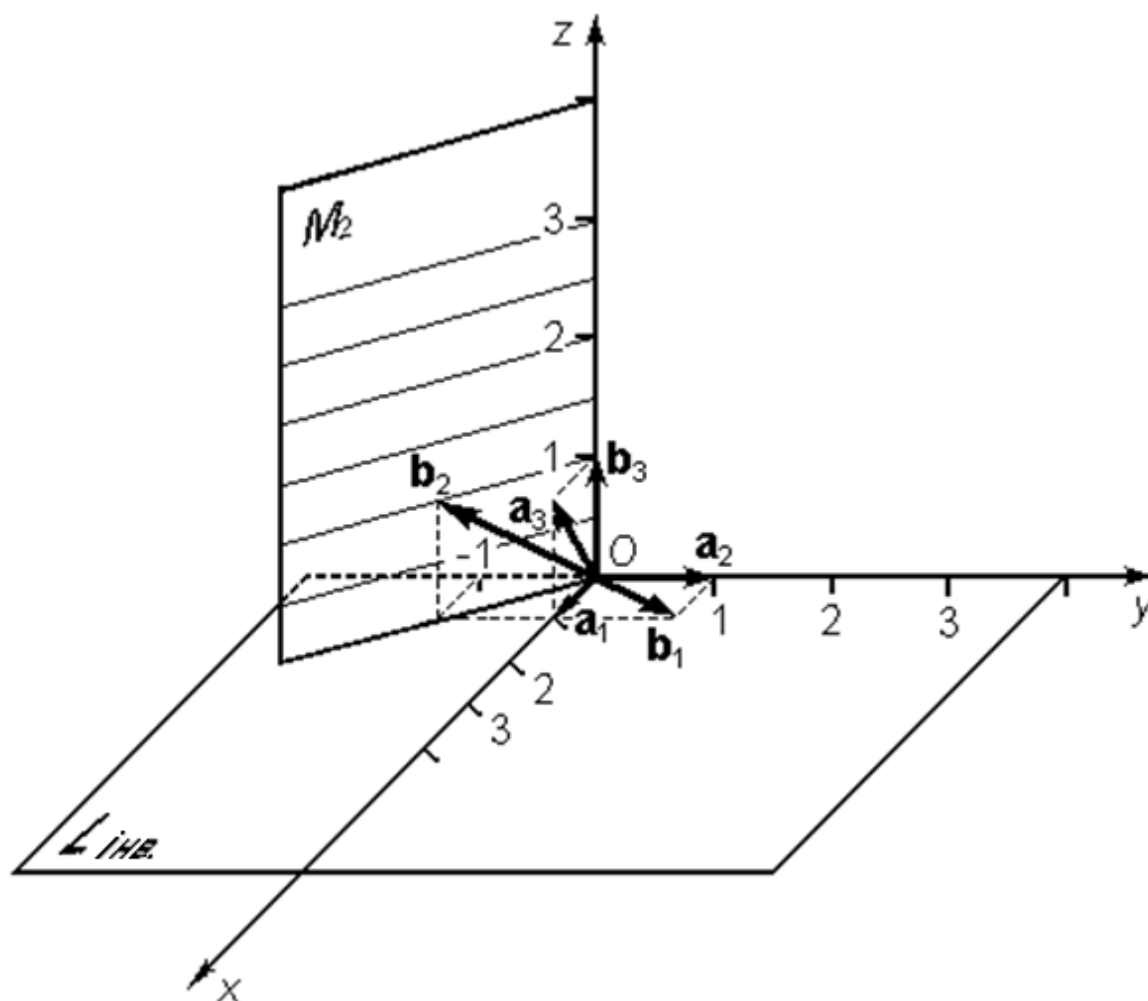


Рис. 3.2. Інваріантні підпростори матриць  $B_1$  і  $B_2$  (приклад 3.5)

Виходить, що знання інваріантних підпросторів кожної з матриць окремо не завжди дозволяє безпосередньо знайти загальний інваріантний підпростір. У загальному випадку для розв'язання задачі необхідно

використовувати алгебру, що породжена даними матрицями (підрозділ 3.2). Успішний розв'язок прикладу 3.5 наведено в підрозділі 3.7.

### 3.5. Ієрархічна декомпозиція рівнянь руху механічних систем

Розглянемо приклад системи, що має некомпактну групу симетрії.

#### Приклад 3.6.

Розглянемо механічну систему, що складається із двох тіл (рис. 3.3). Нехай обладнання керування створює силу  $P = -x_1$ , прикладену до другого тіла. Це приклад позиційної неконсервативної сили. Нехай  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $k = 1$ .

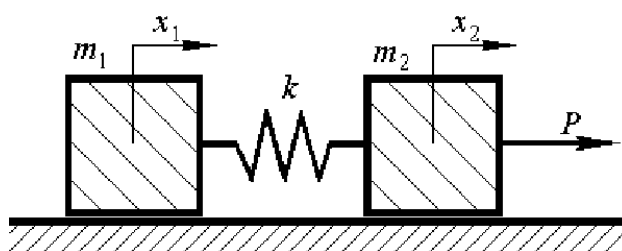


Рис. 3.3. Приклад системи, що має некомпактну групу симетрії

Виберемо такі узагальнені координати:  $q_1$  — переміщення центру мас;  $q_2$  — половина стиску пружини:

$$q_1 = (x_1 + x_2) / 2, \quad q_2 = (x_1 - x_2) / 2.$$

Рівняння руху мають таку форму:

$$2\ddot{q}_1 + q_1 + q_2 = 0, \quad 2\ddot{q}_2 - q_1 + 3q_2 = 0.$$

Матриці коефіцієнтів такі:



$$B_1 = 2E, B_2 = 0, B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Допоміжні матриці такі:

$$C_1 = E, C_2 = 0, C_3 = 0,5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Зрозуміло, що можна відразу звести матрицю  $C_3$  до її жорданової форми. Але розглянемо загальний підхід.

Ми повинні розв'язати задачу декомпозиції системи рівнянь із допоміжними матрицями, використовуючи тільки перетворення подібності.

Спочатку упевнімося, що зведення даної системи до блочно-діагональної форми є неможливим. Для цього знайдемо матрицю  $Z$ , комутуючу з матрицями  $C_i$  ( $i = 1, 3$ ). У результаті обчислень одержуємо:  $Z = \alpha E$ , де  $\alpha$  — довільний параметр. Оскільки матриця  $Z$  не має різних власних значень, зведення початкових матриць  $\{C_i\}$  до блочно-діагонального вигляду є неможливим (розділ 2).

Щоб з'ясувати, чи є можливим зведення матриць  $\{C_i\}$  до блочно-трикутного вигляду, ми будемо використовувати алгоритм, описаний вище.

Ми обчислюємо всі можливі добутки  $C_k C_j$  ( $k, i = 1, 3$ ) матриць і перевіряємо, чи є отримані матриці лінійною комбінацією початкових матриць.

Оскільки множення на  $C_1 = E$  не змінює матриці, то залишається розглянути добуток  $C_3^2$ . Ми обчислюємо  $C_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ . Перевіряємо, чи є ця матриця лінійною комбінацією попередніх матриць:  $C_3^2 = \alpha C_1 + \beta C_3$ ? Ця рівність відповідає системі рівнянь:

$$\begin{aligned}0 &= \alpha 1 + \beta 0,5, \\1 &= \alpha 0 + \beta 0,5, \\-1 &= \alpha 0 - \beta 0,5, \\2 &= \alpha 1 + \beta 1,5.\end{aligned}$$

Одержуємо що  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 2$ . Отже, матриця  $C_3^2$  це лінійна комбінація матриць  $C_1$  і  $C_3$ .

Усі добутки належать лінійній оболонці матриць  $C_1$  і  $C_3$ . Отже, ці матриці формують базис алгебри  $\varphi(C_i)$ , породженої матрицями  $\{C_i\}$ . Число  $r$  елементів базису дорівнює 2, тобто  $r < n^2 \equiv 22$ . Це означає, що зведення до трикутної форми є можливим.

Обчислюємо матрицю  $D = \{\text{Sp}(C_j C_k)\}$ . Усі добутки  $C_j C_k$  вже обчислено. Маємо:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Складаємо систему рівнянь  $Dy = \mathbf{0}$ :

$$\begin{aligned}2y_1 + 2y_2 &= 0, \\2y_1 + 2y_2 &= 0.\end{aligned}$$

У результаті ми одержуємо:  $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Ми обчислюємо матрицю  $G$ , яка є базисом радикала.

$$G = 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot 0,5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 0,5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Знаходимо  $Z$ -множину. Рівняння  $G\xi = \mathbf{0}$  має такий вигляд:

$$\xi_1 - \xi_2 = 0, \quad \xi_1 - \xi_2 = 0.$$

Ми одержали, що базис у множині розв'язків цієї системи складається з вектора  $s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Цей вектор і вектор  $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  є лінійно незалежними. Тому

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Далі:}$$

$$R^{-1} = 0,5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_1 = R^{-1}ER = E,$$

$$\tilde{C}_3 = 0,5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot 0,5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Після перетворень початкова система приводиться до підсистем:

- 1)  $\ddot{y}_2 + y_2 = 0,$
- 2)  $\ddot{y}_1 + y_1 - y_2 = 0.$

Звернемо увагу, що група  $G_1$  матриць  $g_k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (де  $k \in \mathbb{R}$ ) — це група симетрії перетвореної системи рівнянь. Ця група не є компактною. Дійсно, підпростір  $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$  (де  $\alpha$  — будь-яке число) є інваріантним підпростором

відносно групи  $G_1$  і не має прямого доповнення, інваріантного відносно групи  $G_1$ . Отже, початкова система рівнянь також має некомпактну групу симетрії.

Приклад 3.6 є підтвердженням того, що є можливим існування технічних систем, для яких ієрархічна декомпозиція дає додаткове спрощення рівнянь.

### 3.6. Умовна симетрія системи

Можливість або неможливість розщеплення системи рівнянь залежить від властивостей досліджуваної фізичної системи, точніше, від властивостей відповідної розрахункової схеми (див. підрозділи 2.9, 5.1-5.3, 6.1). Диференціальні рівняння, відповідні симетричній системі, можуть бути розділені на незалежні підсистеми. У цьому випадку матриці можуть бути приведені до блочно-діагонального вигляду. І навпаки: якщо є можливим поділ на підсистеми, то існує нетривіальна група симетрії (підрозділ 2.9).

Якщо ж для даних матриць є можливим зведення лише до блочно-трикутного вигляду, то досліджувана система не є симетричною у звичайному сенсі. Постає питання: як назвати й описати властивості досліджуваної системи в цьому випадку?

Слід урахувати, що група, побудована в підрозділі 2.9, не буде групою симетрій системи в розглянутому випадку.

В. І. Фущичем [12] введене поняття «умовна симетрія», що означає інваріантність сукупності рівнянь руху системи й додаткової умови.

Нехай матриці коефіцієнтів приведені до верхнього блочно-трикутного вигляду:

$$\tilde{B}_1 = E, \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \tilde{B}_3 = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}.$$

Додаткову умову складемо з верхніх недіагональних блоків матриць. Воно буде мати вигляд:

$$A_{12}\dot{\mathbf{y}}_2 + D_{12}\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}.$$

При виконанні цієї умови група матриць із твірними елементами

$$T_1 = S \begin{bmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} S^{-1}, \quad T_2 = S \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{bmatrix} S^{-1}$$

буде групою симетрії системи (3.1).

Таким чином, можливість зведення системи рівнянь до блочно-трикутного вигляду відповідає умовній симетрії цієї системи.

Повернемося до прикладу 3.6:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 0,5x_1 + 0,5x_2 = 0; \\ \ddot{x}_2 - 0,5x_1 + 1,5x_2 = 0. \end{cases}$$

За допомогою заміни змінних  $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2; \\ x_2 = -y_1 + y_2 \end{cases}$  ця система приводиться

до системи  $\begin{cases} \ddot{y}_2 + y_2 = 0; \\ \ddot{y}_1 + y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$  із трикутними матрицями  $\tilde{B}_i$ :

$$\tilde{B}_1 = E, \quad \tilde{B}_2 = 0, \quad \tilde{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Відповідно до вищесказаного одержуємо таку додаткову умову

$$y_2 = 0. \quad (3.10)$$

Зворотнє перетворення має вигляд:

$$\begin{cases} y_1 = 0,5x_1 - 0,5x_2; \\ y_2 = 0,5x_1 + 0,5y_2. \end{cases}$$

Тому умова (3.10) у початкових змінних має вигляд:

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Фізичний зміст умови — закріпити друге тіло.

Викладений тут підхід дозволяє скласти додаткові умови й групу симетрії, відповідні до умовної симетрії досліджуваної системи [2, 3]. Це можна назвати розв'язком «зворотньої» задачі.

Становить інтерес така «пряма» задача: як використовувати апріорну інформацію щодо умовної симетрії лінійної системи для виконання ієрархічної декомпозиції цієї системи? У випадку «звичайної» (не умовної) симетрії лінійних систем така задача є вирішеною: це застосування точкових груп при вивченні коливань молекул, кристалів й ін. (див. розділ 5).

### **3.7. Виконання розрахунків за допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP**

Система комп'ютерної алгебри GAP [10] (*Groups, Algorithms and Programming*) існує з 1986 року. Від самого початку систему GAP було задумано як інструмент комбінаторної теорії груп — розділ алгебри, що

вивчає групи, задані елементами, що породжують, й визначальними співвідношеннями. У теперішній час GAP є унікальним всесвітнім спільним науковим проектом, що поєднує фахівців в області алгебри, теорії чисел, математичної логіки, інформатики й ін. наук з різних країн світу. GAP є вільно розповсюджуваною, відкритою й розширюваною системою.

Якщо програму скласти мовою алгебраїчного програмного комплексу GAP, то основні задачі — знаходження централізатора декількох матриць, складання алгебри, породженої даними матрицями, й обчислення її радикала — будуть записані лише в кілька рядків. Наприклад, команда для складання алгебри з одиницею, породженої матрицями  $M1$  і  $M2$ , записується в такий спосіб:

```
A:= Algebrawithone( Rationals, [ M1, M2 ] );
```

Слово *Rationals* означає, що матриці сприймаються як матриці, що містять раціональні числа (не дійсні), і всі обчислення будуть зроблені в арифметиці раціональних чисел. «Дійсної арифметики» тут немає.

Обчислення в арифметиці раціональних чисел має свої гідності й недоліки. З одного боку — повна відсутність помилок округлення. Тобто результат виходить абсолютно точним. З іншого боку — не можна ввести нараховані заздалегідь матриці. Потрібно безпосередньо в програмі мовою GAP задати початкові дані з точністю до трьох (наприклад) значущих цифр і трактувати їх як дробові числа; потім у цій самій програмі виконати формування матриць, відповідних досліджуваній системі. Тобто уникнути громіздких обчислень не вдасться. Виявлення систем, близьких до звідних систем у такий спосіб є неможливим. Проте, такий принципово новий підхід потрібно «мати на озброєнні».

Далі розглянуто розв'язання прикладів 1.2 і 3.3 за допомогою системи GAP.

### Приклад 1.2 (продовження).

Спочатку задаємо початкові матриці B2 і B3. Обчислюємо їхній централізатор і розглядаємо базис централізатора. Це робиться за допомогою таких команд:

```
B2:= [ [ 0, 0, 0 ], [ 0, 0, 0 ], [ 0, 0, 5 ] ];;
B3:= [ [ 3, 2, -1 ], [ 32, 3, 4 ], [ 8, -2, 5 ] ];;

A:= Centralizer(Fullmatrixalgebra(Rationals, 3), [B2, B3 ] );
b:=Basis( A );
Display(b);
```

Один із варіантів роботи із програмою такий: запустити програму, після появи запрошення програми скопіювати у вікно DOS заздалегідь підготовлений текст розв'язку задачі (клавіші SHIFT + INS або контекстне меню, потім PASTE).

Розглянемо діалог із програмою GAP. Тут жирним шрифтом виділено запрошення програми і її відповіді.

```
gap> B2:= [ [ 0, 0, 0 ], [ 0, 0, 0 ], [ 0, 0, 5 ] ];;
gap> B3:= [ [ 3, 2, -1 ], [ 32, 3, 4 ], [ 8, -2, 5 ] ];;
gap>
gap> A:= Centralizer(Fullmatrixalgebra(Rationals, 3), [B2, B3 ]
);
<algebra-with-one of dimension 2 over Rationals>
gap> b:=Basis( A );
Semiechelonbasis( <algebra-with-one of dimension 2 over
Rationals>, ... )
gap> Display(b);
```



```
Semiechelonbasis( Algebrawithone( Rationals, ... ), [ [ [ 1,
1/4, 0 ], [ 4, 1, 0 ], [ 0, 0, 0 ] ],
[ [ 0, 1, 0 ], [ 16, 0, 0 ], [ 0, 0, -4 ] ] ] )
```

Отже, базисом централізатора є такі дві матриці:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Матриця  $W_1$  відрізняється від матриці  $Z$ , знайденої в підрозділі 1.5, множителем 4. Власні вектори таких матриць збігаються. Тому матриця перетворення — та сама. Збігаються й отримані підсистеми. Далі потрібно перевірити можливість зведення блоків

$$B_{111} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{211} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

до блочно-діагонального або (хоча б) до блочно-трикутного вигляду. Знаходимо централізатор для цих блоків:

```
gap> B111:= [ [ 5, 0 ], [ 0, 0 ] ];;
gap> B211:= [ [ 5, -4 ], [ 4, -5 ] ];;
gap>
gap> A:= Centralizer(Fullmatrixalgebra(Rationals, 2), [B111,
B211 ] );
<algebra-with-one of dimension 1 over Rationals>
gap> b:=Basis( A );
Semiechelonbasis( <algebra-with-one of dimension 1 over
Rationals>, ... )
gap>
```

```
gap> Display(b);
Semiechelonbasis( Algebrawithone( Rationals, ... ), [ [ [ 1, 0
1, [ 0, 1 ] ] ] ] )
```

Звідси видно, що базис централізатора складається лише з однієї  
 одиничної матриці  $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Це означає, що зведення до діагонального  
 вигляду є неможливим. Перевіряємо можливість зведення блоків до  
 трикутного вигляду. Для цього складаємо алгебру з одиницею, породжену  
 матрицями  $B_{111}$  і  $B_{211}$ :

```
gap> # алгебра з одиницею, породжена даними матрицями
gap> A:= Algebrawithone( Rationals, [B111, B211] );
<algebra-with-one over Rationals, with 2 generators>
gap> b:=Basis( A );
Basis( <algebra-with-one of dimension 4 over Rationals>, ... )
gap> Display(b);
Basis( Algebrawithone( Rationals, [ [ [ 5, 0 ], [ 0, 0 ] ], [ [
5, -4 ], [ 4, -5 ] ] ] ),
[ [ [ 1, 0 ], [ 0, 1 ] ], [ [ 0, 0 ], [ 0, 1 ] ], [ [ 0, 1 ], [
-1, 0 ] ], [ [ 0, 0 ], [ 1, 0 ] ] ] )
```

Ми одержали, що розмір алгебри  $\phi(B_v)$  дорівнює 4, тобто умова  $r < n^2$   
 не виконується. Зведення до трикутного вигляду є неможливим.

**Приклад 3.3 (продовження).** Задаємо початкові матриці  $B_2$  і  $B_3$ .  
 Обчислюємо їхній централізатор і розглядаємо базис централізатора.

```
gap> B2:= [ [ 1, 0 ], [ 1, 2 ] ];;
gap> B3:= [ [ 7, 4 ], [ -7, -4 ] ];;
gap>
gap> A:= Centralizer(Fullmatrixalgebra(Rationals, 2), [B2, B3]);
```

```

<algebra-with-one of dimension 1 over Rationals>
gap> b:=Basis( A );
Semiechelonbasis( <algebra-with-one of dimension 1 over
Rationals>, ... )
gap> Display(b);
Semiechelonbasis( Algebrawithone( Rationals, ... ), [ [ [ 1, 0
], [ 0, 1 ] ] ] )

```

Видно, що базис централізатора складається лише з одиничної матриці. Зведення до діагонального вигляду є неможливим. Складаємо алгебру з одиницею, породжену початковими матрицями:

```

gap> # алгебра з одиницею, породжена даними матрицями
gap> A:= Algebrawithone( Rationals, [B2, B3] );
<algebra-with-one over Rationals, with 2 generators>
gap> b:=Basis( A );
Basis( <algebra-with-one of dimension 3 over Rationals>, ... )
gap> Display(b);
Basis( Algebrawithone( Rationals, [ [ [ 1, 0 ], [ 1, 2 ] ], [ [
7, 4 ], [ -7, -4 ] ] ] ),
[ [ [ 1, 0 ], [ 0, 1 ] ], [ [ 0, 0 ], [ 1, 1 ] ], [ [ 0, 1 ], [
0, -1 ] ] ] )

```

Ранг алгебри  $\varphi(B_v)$  дорівнює 3, умова  $r < n^2$  виконується. Зведення до трикутного вигляду є можливим. Обчислюємо радикал алгебри:

```

gap> # радикал алгебри
gap> R:= Radicalofalgebra( A );
<algebra of dimension 1 over Rationals>
gap> Display(R);
Algebra( Rationals, [ [ [ 1, 1 ], [ -1, -1 ] ] ] )

```

Одержуємо базис радикала:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ця матриця відрізняється від матриці, знайденої в підрозділі 3.3, множителем 0,25. Подальше розв'язання прикладу збігається з розв'язанням, наведеним у підрозділі 3.3.

### Розв'язання прикладу 3.5.

Спочатку для матриць  $B_1$  і  $B_2$  знаходимо централізатор, тобто загальний розв'язок рівнянь (2.5). Відповідний фрагмент діалогу із програмою GAP такий:

```
gap> B1:=[ [ 1, 0, 4 ], [ 0, 2, 0 ], [ 0, 0, 5 ] ];;
gap> B2:=[ [ 3, -1, 0 ], [ -1, 3, 0 ], [ 0, 0, 4 ] ];;
gap>
gap> A:= Centralizer(Fullmatrixalgebra(Rationals, 2), [B1, B2]);
<algebra-with-one of dimension 1 over Rationals>
gap> b:=Basis( A );
Semiechelonbasis( <algebra-with-one of dimension 1 over
Rationals>, ... )
gap>
gap> Display(b);
Semiechelonbasis( Algebrawithone( Rationals, ... ), [ [ [ 1, 0,
0 ], [ 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 1 ] ] ] )
```

Одержуємо, що базис централізатора складається з одиничної матриці. Отже, зведення до блочно-діагонального вигляду є неможливим.

Далі знаходимо алгебру з одиницею  $\phi(B_v)$ , породжену початковими матрицями.

```
gap> # алгебра з одиницею, породжена даними матрицями
gap> A:= Algebrawithone( Rationals, [B1, B2] );
```

```

<algebra-with-one over Rationals, with 2 generators>
gap> b:=Basis( A );
Basis( <algebra-with-one of dimension 7 over Rationals>, ... )
gap> Display(b);
Basis( Algebrawithone( Rationals, [ [ [ 1, 0, 4 ], [ 0, 2, 0 ],
[ 0, 0, 5 ] ],
[ [ [ 3, -1, 0 ], [ -1, 3, 0 ], [ 0, 0, 4 ] ] ] ), [ [ [ 1, 0, 0
], [ 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 1 ] ] ],
[ [ [ 0, 0, 1 ], [ 0, 1/4, 0 ], [ 0, 0, 1 ] ] ], [ [ [ 0, 1, 0 ], [
1, 0, 0 ], [ 0, 0, -1 ] ] ],
[ [ [ 0, 0, 0 ], [ 1, 0, -4 ], [ 0, 0, 3 ] ] ], [ [ [ 0, 0, 0 ], [
0, 1, 0 ], [ 0, 0, 0 ] ] ],
[ [ [ 0, 0, 0 ], [ 0, 0, 1 ], [ 0, 0, -3/4 ] ] ], [ [ [ 0, 0, 0 ], [
0, 0, 0 ], [ 0, 0, 1 ] ] ] ] )

```

Ми одержали, що ранг (розмір) алгебри  $\varphi(B_v)$  дорівнює 7, тобто умова  $r < n^2$  виконується. Зведення до блочно-трикутного вигляду є можливим.

Базис алгебри складається з таких семи матриць:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, W_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, W_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \\
W_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3/4 \end{pmatrix}, W_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Знаходимо радикал алгебри:

```

gap> # радикал алгебри
gap> R:= Radicalofalgebra( A );

```

`<algebra of dimension 2 over Rationals>`

`gap> Display(R);`

`Algebra( Rationals, [ [ [ 0, 0, 3/4 ], [ 0, 0, 1 ], [ 0, 0, 0 ] ], [ [ 0, 0, -1 ], [ 0, 0, 0 ], [ 0, 0, 0 ] ] ] )`

Отже, базис радикала — це дві матриці:

$$G^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо  $Z$ -множину, яка є інваріантним підпростором відносно матриць  $\{B_v\}$ . Для цього потрібно розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} G^{(1)}\xi = \mathbf{0}, \\ G^{(2)}\xi = \mathbf{0}. \end{cases}$

Нехай  $\xi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ , тоді в результаті розв'язання системи рівнянь одержуємо, що

$\gamma = 0$ , а  $\alpha$  й  $\beta$  — вільні змінні, тобто одержуємо той розв'язок, який зазначено в підрозділі 3.4.

### 3.8. Підвищення ефективності алгоритму

При виконанні розрахунків з ієрархічної декомпозиції для розв'язання практичних задач довелося використовувати подвійну точність. Виникли також проблеми при спробі виконати наближену декомпозицію, аналогічну виконаної в 3.3.

Причину недостатньої ефективності існуючого алгоритму пов'язано з таким: незважаючи на те що поняття лінійної незалежності є якісним (залежними або незалежними є вектори), з обчислювальної точки зору ця

незалежність може проявлятися більш-менш чітко. Наприклад, два вектори на площині, розташовані під гострим кутом один до одного будуть лінійно незалежними, якщо цей кут не дорівнює нулю. Але коли кут є порівняно малим, комп'ютерна програма, що працює з обмеженою точністю, може визнати ці вектори за лінійно залежні.

В існуючому алгоритмі при складанні алгебри, породженої даними матрицями, проводяться багаторазові перевірки лінійної залежності матриць. Перевіряється сукупність «передбачуваного базису» і додаткової матриці. При цьому відсутність ортогоналізації й нормування елементів «передбачуваного базису» призводить до нагромадження похибок і до можливих помилок. Тут  $n \times n$ -матриця розглядається як вектор довжиною  $n^2$ . З іншого боку сама перевірка виконується за допомогою програми SLAU5 (підрозділ 3.1), яка перетворює перші частини векторів «передбачуваного базису» в одиничні вектори довжини  $m$ , де  $m$  — це кількість векторів цього «базису». Для цих векторів властивість лінійної незалежності буде проявлятися більш чітко. Далі такий базис будемо називати поліпшеним.

Тому в алгоритм слід внести таку зміну: після формування чергового варіанта «передбачуваного базису» і встановлення його лінійної незалежності за допомогою програми SLAU5, треба замінити ці вектори на ті, які використовувалися програмою як проміжний результат. Така зміна надасть також деяке збільшення швидкодії, оскільки операції з векторами, що містять багато нулів, будуть виконуватися швидше.

Помітного скорочення часу роботи алгоритму можна досягти, якщо змінити порядок перегляду всіх можливих добуток матриць. Звичайна організація циклів тут не є ефективною тому що при додаванні нового елемента до базису процес треба починати заново з новою довжиною циклу. Отже, потрібно організувати перебір усіх можливих комбінацій індексів  $i$  та  $j$  від одиниць до деякого значення  $r$ , величина якого заздалегідь не відома.

Змінений алгоритм складання алгебри матриць такий:

а) до матриць системи  $\{B_k\}$  додаємо матрицю  $B_0 = E$ ;  
 б) вибираємо поліпшений базис у множині матриць, нові матриці базису позначаємо  $W_1, W_2, \dots, W_\mu$ ;

в) обчислюємо добутки матриць  $W_i W_j$ . Якщо яке-небудь із них не є лінійною комбінацією матриць  $\{W_k\}$ , то приймаємо його новим елементом множини  $\{W_k\}$ . Докладніше:

(i) уважаємо  $r := \mu$ ;  $m := 1$ ;

(ii) для значень  $i = 1, j = 1$  виконуємо пункт (iv), після чого переходимо до пункту (vi);

(iii) уважаємо  $i := m$ , потім для всіх значень  $j$  від 1 до  $m - 1$  виконуємо пункт (iv), після чого переходимо до пункту (v);

(iv) обчислюємо  $Z := W_i W_j$ , перевіряємо лінійну залежність матриць  $W_1, W_2, \dots, W_r, Z$ . Якщо вони є лінійно незалежними, уважаємо  $r := r + 1$ ,  $W_r := Z$  і заміняємо базис множини  $\{W_k\}$  на поліпшений;

(v)  $j := m$ ; потім для всіх значень  $i$  від 1 до  $m$  повторюємо виконання пункту (iv);

(vi)  $m := m + 1$ , якщо  $m \leq r$ , вертаємося до пункту (iii).

У результаті одержуємо базис  $W_1, W_2, \dots, W_r$  алгебри з одиницею, породженої початковими матрицями  $\{B_k\}$ .

На рис. 3.4 показано номери добутків матриць  $W_i W_j$ , що обчислюються відповідно до вищенаведеного алгоритму, і відповідні номери індексів  $i$  та  $j$ .

		$j$		
		1	2	3
$i$	1	1	3	7
	2	2	4	8
	3	5	6	9
	4	10	...	

Рис. 3.4. Послідовність обчислення добутків



### 3.9. Проблема ієрархічної декомпозиції рівнянь із прямокутними матрицями коефіцієнтів

Далі як приклад системи рівнянь із прямокутними матрицями коефіцієнтів будемо розглядати рівняння

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad (3.11)$$

що є аналогічними (2.35).

Різні підходи до проблеми точної декомпозиції приводять до таких алгебраїчних задач.

1. Одночасне зведення декількох квадратних матриць до блочно-діагонального вигляду через перетворення подібності  $\tilde{B}_i = S^{-1}B_iS$ . При цьому потрібно одержати максимально можливу кількість блоків на головній діагоналі.
2. Аналогічна задача, але для зведення до блочно-трикутного вигляду.
3. Зведення до блочно-діагонального вигляду квадратної матриці  $A$  і прямокутної (загалом кажучи) матриці  $B$  за допомогою перетворення

$$\tilde{A} = S^{-1}AS; \quad \hat{B} = S^{-1}BH, \quad (3.12)$$

де  $S$  і  $H$  — неособливі матриці відповідних порядків.

4. Зведення матриць  $A$  і  $B$  через перетворення (3.12) до блочно-трикутного вигляду.

Розглядається також варіант декомпозиції, при якому поза діагональними блоками стоять малі числа. Позначимо ці задачі відповідно 1'), 2'), 3') й 4').

Схематично задачі 1) і 3) зображено на рис. 3.5а, задачі 2) і 4) — на рис. 3.5б. Задачам 1') і 3') відповідає рис. 3.5в, а 2') й 4') — рис. 3.5г.

$$\text{а) } \left[ \begin{array}{c|c} \text{///} & 0 \\ \hline 0 & \text{///} \end{array} \right] \quad \text{б) } \left[ \begin{array}{c|c} \text{///} & \text{\\} \\ \hline 0 & \text{///} \end{array} \right] \quad \text{в) } \left[ \begin{array}{c|c} \text{///} & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \text{///} \end{array} \right] \quad \text{г) } \left[ \begin{array}{c|c} \text{///} & \text{\\} \\ \hline \varepsilon & \text{///} \end{array} \right]$$

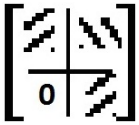
Рис. 3.5. Схематичне зображення перетворених матриць

Як було зазначено вище, задачі 1), 2), 3) й 1') вирішено, розроблено відповідні комп'ютерні програми й вирішено ряд прикладних задач. Стан задач на сьогоднішній день характеризує табл. 3.2.

Таблиця 3.2.

#### Список задач точної декомпозиції

Варіанти декомпозиції	Декомпозиція різних систем	
	Зведення квадратних матриць через перетворення подібності $\tilde{B}_i = S^{-1} B_i S$ .	Зведення квадратної матриці $A$ і прямокутної матриці $B$ через перетворення $\tilde{A} = S^{-1} A S$ ; $\hat{B} = S^{-1} B H$ .
Зведення до блочно-діагонального вигляду (декомпозиція)	$\left[ \begin{array}{c c} \text{///} & 0 \\ \hline 0 & \text{///} \end{array} \right]$ Задачу вирішено повністю	Задачу вирішено повністю

<p>Зведення до блочно- трикутного вигляду (ієрархічна декомпозиція)</p> 	<p>Задачу вирішено, але розробляються нові обчислювальні алгоритми</p>	<p>Задача в процесі розв'язання</p>
---	--	---

Це означає, що з теоретичних задач невирішеною залишилася лише задача ієрархічної декомпозиції рівнянь (3.11) й інших, аналогічних цим.

Розглянемо це питання докладніше. В окремому випадку, коли матриця  $B$  є квадратною ( $m = n$ ) і неособливою можна вибрати перетворення (3.12) з такою матрицею  $S$ , яка приводить матрицю  $A$  до жорданової форми:  $S = v(A)$ . При цьому  $H = B^{-1}S$ . Тоді система розпадеться на блоки, відповідні до жорданових блоків матриці  $A$ . При матриці  $A$  простої структури виходять окремі рівняння першого порядку.

Однак матриця  $B$ , як правило, є прямокутною. Отримано таку умову зведення матриць системи (3.11) перетворенням (3.12) до блочно-трикутного вигляду із двома (як мінімум) блоками на головній діагоналі, що мають розміри  $n_1 \times n_1$  і  $n_2 \times n_2$  для матриці  $\tilde{A}$ ;  $m_1 \times n_1$  і  $m_2 \times n_2$  для матриці  $\hat{B}$ .

Будемо розрізняти загальну постановку задачі редукції й редукцію до невивроджених підсистем. У першому випадку перетворення вважається успішним, якщо  $n_2 + m_2 < n + m$ . Другий випадок відрізняється додатковою умовою:  $n_2 \neq 0$ ,  $m_2 \neq 0$ .

**Теорема 3.9.** Для можливості редукції до невивроджених підсистем рівнянь (3.11) через заміну змінних (3.12) необхідним і достатнім є існування нетривіальних підпросторів  $L_x \subset \mathbb{C}^n$ ,  $L_u \subset \mathbb{C}^m$ . При цьому  $L_x$  є інваріантним відносно  $A$ :  $AL_x \subset L_x$  і виконується умова  $BL_u \subset L_x$ .

Д о в е д е н н я .

А. Необхідність. Нехай матриці  $\tilde{A} = S^{-1}AS$  й  $\hat{B} = S^{-1}BH$  мають блочно-трикутний вигляд. Нехай  $Y$  — підпростір простору  $\mathbb{C}^n$ , що складається з векторів вигляду  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ . Із правил перемножування матриць випливає, що підпростір  $Y$  є інваріантним відносно  $\tilde{A}$ :  $\mathbf{y} \in Y \Rightarrow \tilde{A}\mathbf{y} \in Y$ . При переході до іншого базису властивість інваріантності зберігається. У такий спосіб  $L_x$  складається з усіх векторів вигляду  $\mathbf{z} = S\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y} \in Y$ . Тоді  $\mathbf{z} \in L_x \Rightarrow A\mathbf{z} = S\tilde{A}S^{-1} \cdot S\mathbf{y} = S\tilde{A}\mathbf{y} = S\mathbf{y}_1 \in L_x$ . Тут  $\mathbf{y}_1 = \tilde{A}\mathbf{y} \in Y$ .

Аналогічним чином визначимо підпростір  $V \subset X^n$ , що складається з векторів вигляду  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ , де  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^m$ . Оскільки матриця  $\hat{B}$  є блочно-трикутною, одержуємо:  $\hat{B}V \subset Y$ . Нехай  $L_u$  складається із усіх векторів вигляду:  $\mathbf{q} = H\mathbf{v}$ . Тоді з  $\hat{B} = S^{-1}BH$  випливає:  $\mathbf{q} \in L_u \Rightarrow B\mathbf{q} = S\hat{B}H^{-1} \cdot H\mathbf{v} = S\hat{B}\mathbf{v} = S\mathbf{y}_2 \in L_u$ . Тут  $\mathbf{y}_2 = \hat{B}\mathbf{v} \in Y$ .

Б. Достатність. Нехай існують нетривіальні підпростори  $L_x$  і  $L_u$ , що задовольняють умовам теореми. Уведемо позначення:  $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{n_1}\}$  — базис підпростору  $L_x$ , а  $\{\mathbf{s}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{s}_n\}$  — його доповнення до базису всього  $\mathbb{C}^n$ . Перетворення подібності  $\tilde{A} = S^{-1}AS$  для матриці  $A$  з матрицею перетворення  $S$ , стовпцями якої є вектори  $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n\}$ , відповідає переходу до іншого базису. З формули  $\tilde{A} = S^{-1}AS$  випливає  $AS = S\tilde{A}$ . Далі:

$$A\mathbf{s}_r = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{kr} \mathbf{s}_k, \quad r = \overline{1, n}, \quad (3.13)$$

де  $\tilde{a}_{kr}$  — елементи матриці  $\tilde{A}$ .

Умова інваріантності підпростору  $L_x$  означає, що кожний з елементів базису  $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{n_1}\}$  після множення на матрицю  $A$  залишається в підпросторі  $L_x$  і тому є лінійною комбінацією елементів  $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{n_1}\}$ :

$$A\mathbf{s}_r = \sum_{k=1}^{n_1} \tilde{a}_{kr} \mathbf{s}_k, \quad r = \overline{1, n_1}. \quad (3.14)$$

Порівнюючи (3.13) і (3.14) з урахуванням лінійної незалежності векторів  $\mathbf{s}_r$ , одержуємо  $\tilde{a}_{kr} = 0, k = \overline{n_1 + 1, n}$ , ці рівності виконуються при всіх  $r = \overline{1, n_1}$ . Отже, відповідні елементи матриці  $\tilde{A}$  дорівнюють нулю, тобто матриця має блочно-трикутний вигляд.

Аналогічним чином з умови  $\hat{B} = S^{-1}BH$  одержуємо  $BH = S\hat{B}$  й далі:

$$B\mathbf{h}_r = \sum_{k=1}^n \hat{b}_{kr} \mathbf{s}_k, \quad r = \overline{1, m}, \quad (3.15)$$

де  $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{m_1}\}$  — базис підпростору  $L_u$ ,  $\{\mathbf{h}_{m_1}, \mathbf{h}_{m_1+1}, \dots, \mathbf{h}_m\}$  — його доповнення до базису всього  $C^m$ ,  $\hat{b}_{kr}$  — елементи матриці  $\hat{B}$ .

З умови  $BL_u \subset L_x$  одержуємо:

$$B\mathbf{h}_r = \sum_{k=1}^{n_1} \hat{b}_{kr} \mathbf{s}_k, \quad r = \overline{1, m_1}, \quad (3.16)$$

Порівнюючи (3.15) і (3.16) з урахуванням лінійної незалежності векторів  $\mathbf{h}_r$ , одержуємо  $\hat{b}_{kr} = 0$  при  $k = \overline{n_1 + 1, n}$ ,  $r = \overline{1, m_1}$ . Отже, матриця  $\hat{B}$  також має блочно-трикутний вигляд. ■

Тут, на відміну від попереднього випадку (підрозділ 7.2), немає алгоритму знаходження підпросторів  $L_x$  й  $L_u$ .

### 3.10. Висновки до розділу 3

Вперше отримано необхідні й достатні умови існування такого перетворення подібності, що приводить одночасно кілька матриць до блочно-трикутного вигляду. Розроблено алгоритм обчислення матриці цього перетворення.

Вперше вирішено задачу про найкращу ієрархічну декомпозицію системи рівнянь через «перетворення еквівалентності», тобто через множення матриць коефіцієнтів зліва і справа на неособливі матриці для зведення початкових матриць до блочно-діагонального вигляду.

На відміну від «звичайної» декомпозиції, в ієрархічній декомпозиції ще не вирішені такі задачі:

- виявлення систем, близьких до таких, для яких ієрархічна декомпозиція є можливою;
- узагальнення методу на системи рівнянь, до складу яких входять прямокутні матриці (див. підрозділ 2.11);
- практичне застосування цих методів для нових прикладних задач.

Можливим є також таке продовження робіт: задачі з несамопряженими операторами, некомпактні групи симетрії.

З погляду загальної алгебри цікавим є розповсюдження розробленого методу на випадок, коли матриці є заданими не над полем комплексних чисел, а над довільним кільцем.

### 3.11. Список використаних джерел до розділу 3

1. Апроянц А. Р. Различные подходы к задаче нахождения общего инвариантного подпространства нескольких матриц / А. Р. Апроянц, Ю. Н. Базилевич, Н. В. Чехранов // Вісник Дніпропетровського університету. Математика. 2005, № 6. — С. 3—6.
2. Базилевич Ю. Н. Расщепление уравнений движения экипажа на электромагнитном подвешивании / Ю. Н. Базилевич // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. №1, 2016. — С. 5 — 11.
3. Базилевич Ю. Н. Группа симметрии декомпозуемой системы / Ю. Н. Базилевич // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. — 2016, вип. 1 (20). — С. 3 — 10.
4. Белозеров В. Е. О единственности решения задач декомпозиции и агрегирования линейных систем автоматического управления / В. Е. Белозеров, Г. В. Можаяев // Теория сложных систем и методы их моделирования. — М.: ВНИИСИ, 1982. — С.
5. Ван дер Варден. Алгебра / Ван дер Варден. — М.: Наука, 1976, 648 с.
6. Дрозд Ю. А. Конечномерные алгебры / Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко. — Киев: Вища шк., 1980.— 192 с.
7. Елкин В. И. Основы геометрической теории нелинейных управляемых систем / В. И. Елкин. — М.: Физматлит, 2014. — 204 с.
8. Лопатин А. К. Об алгебраической приводимости систем линейных дифференциальных уравнений / А. К. Лопатин // Дифференц. уравнения. — 1968. — 4, № 3. — С. 439—445.
9. Павловский Ю. Н. Проблема декомпозиции в математическом моделировании / Ю. Н. Павловский, Т. Г. Смирнова. — М.: ФАЗИС, 1998. VI+266 с.

10. Сайт Украинской группы пользователей GAP [Электронный ресурс].  
Режим доступа к ресурсу: <http://www.gap-system.org/ukrgap/>
11. Фейс К. Алгебра: Кольца, модули и категории: В 2 т / К. Фейс. — М.: Мир, 1977—1979. — Т. 1—2.
12. Фушич В. І. Вибрані праці / В. І. Фушич. — Київ: Наук. думка, 2005. — 448 с.
13. Чеботарев Н. Г. Введение в теорию алгебр / Н. Г. Чеботарев. — М. ; Едиториал УРСС, 2003. — 88 с.



## РОЗДІЛ 4

### ГОЛОВНІ КООРДИНАТИ Й ФОРМИ КОЛИВАНЬ НЕКОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

У даному розділі розглянуто «ідеальний» випадок, коли систему рівнянь завідомо може бути приведено до окремих рівнянь. У цьому випадку за допомогою власних векторів матриці складено ефективні розрахункові формули для розв'язання задач оптимізації, аналізу форм коливань складних систем, для оцінки області притягання розв'язків, а також для аналізу макроекономічних систем.

#### 4.1. Зведення рівнянь руху неконсервативної системи до головних фазових координат

Рівняння вигляду

$$B_1\ddot{\mathbf{x}} + B_2\dot{\mathbf{x}} + B_3\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

де  $\mathbf{x} \in R^n$ ;  $B_i$  — квадратні дійсні матриці, не завжди приводяться до звичайних головних координат. Таке зведення є можливим у випадку, коли дві з матриць  $B_i$  є симетричними, причому одна з них є додатно визначеною, а третя є лінійною комбінацією перших двох. У такому випадку зведення до діагонального вигляду перших двох матриць означає і зведення третьої. Виконати це перетворення, як правило, простіше, ніж застосувати загальну методику зведення системи рівнянь до максимально можливої кількості підсистем (див. розділ 2). Але результат у другому випадку вийшов би той самий:  $n$  окремих рівнянь другого порядку.

Лінійна залежність матриць не є необхідною умовою того, щоб рівняння приводилися до головних координат. Наприклад, матриці  $B_1 = E$ ,  $B_2 = \text{diag}(1, 0, 0)$ ,  $B_3 = \text{diag}(1, 2, 3)$  є лінійно незалежними й у той самий час мають діагональний вигляд. Відповідна система рівнянь уже зведена до головних координат.

Приведемо рівняння (4.1) до нормальної форми Коші

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in R^m. \quad (4.2)$$

Якщо  $A$  — матриця простої структури, то рівняння (4.2) через заміну змінних  $\mathbf{u} = S \boldsymbol{\rho}$  приводяться до окремих рівнянь першого порядку

$$\dot{\rho}_k = \lambda_k \rho_k, \quad k = \overline{1, m}. \quad (4.3)$$

Тут  $S = \nu(A)$  — це матриця, стовпцями якої є власні вектори матриці  $A$ .

Змінні  $\rho_k$ , як правило, є комплексними. Вони називаються *головними* (власними, нормальними) *фазовими координатами*. Розв'язки  $u_k = c_k e^{\lambda_k t}$  рівнянь (4.3) — це *головні коливання* (*головні рухи*) досліджуваної системи. Загальний розв'язок рівнянь (4.2) має вигляд

$$\mathbf{u} = S \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \dots \\ c_m e^{\lambda_m t} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m c_k e^{\lambda_k t} \mathbf{a}_k,$$

де  $\mathbf{a}_k$  — власні вектори матриці  $A$ ;  $c_k$  — вільні змінні, що залежать від початкових умов. Тому у випадку неконсервативної системи *формами коливань* називають власні вектори  $\mathbf{a}_k$  матриці  $A$ , а *коефіцієнтами розподілу*

амплітуд — елементи цих векторів (іноді — абсолютні величини цих елементів).

#### 4.2. Аналіз форм коливань неконсервативної коливальної системи

Суттєво неконсервативними будемо називати механічні системи, у яких діють неконсервативні позиційні сили [13]. Багато практичних задач призводять до необхідності дослідження суттєво неконсервативних систем. До таких задач, наприклад, відноситься дослідження бічних коливань рейкових екіпажів [9], стійкості гнучких валів з регульованим числом обертів, нестійкості роторів у магнітнім полі [6]. В останні роки велику увагу приділено задачам стійкості пластин й оболонок, обтічних з великими надзвуковими швидкостями. Вони становлять інтерес у зв'язку з вібрацією обшивки сучасних літальних апаратів («панельний флатер») [6].

Лінеаризовані рівняння руху автономної суттєво неконсервативної системи записуються у вигляді

$$M\ddot{\mathbf{x}} + H\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (4.4)$$

де  $\mathbf{x}$  — вектор-стовпець узагальнених координат;  $M$ ,  $H$ ,  $K$  — матриці порядку  $n$  з постійними дійсними елементами. Наявність неконсервативних позиційних сил обумовлює несиметричність матриці  $K$ .

Перейдемо від системи рівнянь другого порядку (4.4) до системи рівнянь першого порядку. Уведемо вектор  $\mathbf{u}$  з  $2n$  компонентами:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Уважаючи, що матриця  $M$  є неособливою і враховуючи (4.5), систему (4.4) запишемо так:

$$\dot{\mathbf{u}} = B\mathbf{u}, \quad (4.6)$$

де матриця  $B$  має  $2n$  рядків і  $2n$  стовпців і у вигляді блокової матриці записується так:

$$B = \begin{bmatrix} -M^{-1}H & -M^{-1}K \\ E & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

де  $E$  — одинична матриця.

Частинний розв'язок рівняння (4.6) представимо в такий спосіб:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{\lambda t}. \quad (4.8)$$

Тоді вектор амплітуд  $\mathbf{u}_0$  задовольняє рівнянню

$$-\lambda \mathbf{u}_0 + B\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \quad (4.9)$$

а власне число  $\lambda$  визначається з характеристичного рівняння

$$|-\lambda E + B| = 0. \quad (4.10)$$

Матриця  $B$  має дійсні елементи, тому коріння алгебраїчного рівняння (4.10) порядку  $2n$  будуть або дійсними, або комплексно-спряженими. Для дійсних коренів компоненти власного вектора розв'язку рівняння (4.9) будуть дійсними. Для комплексних коренів компоненти

власного вектора також будуть комплексними. Нехай нам відомо всі  $\lambda_j$  й  $\mathbf{u}_{0j}$  для деякої суттєво неконсервативної системи. Оскільки вектори  $\mathbf{u}_{0j}$  мають у загальному випадку комплексні компоненти, кожний з них можна зобразити набором радіус-векторів на комплексній площині. Тоді  $2n$  радіус-векторів на комплексній площині, зображуючих компоненти одного власного коливання, утворюють єдину «зірочку» [15] у тому розумінні, що кути між радіус-векторами не змінюються, а відносні значення модулів зберігають незмінними свої величини. Цю «зірочку» можна назвати формою власного коливання [15]. Під коефіцієнтами розподілу амплітуд для даного власного коливання будемо розуміти вектор

$$\boldsymbol{\eta} = (r_{1j}, r_{2j}, r_{3j}, \dots, r_{2nj})^T, \quad (4.11)$$

що складається з модулів комплексних компонентів вектора  $\mathbf{u}_{0j}$ , які у свою чергу є «нормованими» таким чином, що один з них дорівнює 1.

Для визначення коефіцієнтів розподілу амплітуд необхідно знати власні числа матриці  $B$  та її власні вектори. Якщо рівняння складної динамічної системи вдається розділити на підсистеми, то для визначення власних чисел зручно використовувати матриці  $\{B_j\}$  отриманих підсистем. Це дозволяє заощаджувати машинний час й водночас уникнути нагромадження похибок у процесі обчислень. Покажемо, як матриці  $\{B_j\}$  можна використовувати для обчислення власних векторів матриці  $B$  коефіцієнтів початкової системи рівнянь. Зробимо лінійну заміну координат у рівняннях (4.6)

$$\mathbf{u} = R\mathbf{w}, \quad (4.12)$$

де  $R$  — матриця перетворення;  $\mathbf{w}$  — вектор-стовпець узагальнених координат. Тоді нова матриця коефіцієнтів має вигляд

$$\tilde{B} = R^{-1}BR = \text{diag}(B_1, \dots, B_m). \quad (4.13)$$

Нехай  $\mathbf{b}_{kS}$  — власний вектор матриці  $B_k$ , відповідний до власного числа  $\lambda_{kS}$ , тобто виконується рівність

$$B_k \mathbf{b}_{kS} = \lambda_{kS} \mathbf{b}_{kS}. \quad (4.14)$$

Оскільки  $B_k$  — блок матриці  $\tilde{B}$ , що стоїть на  $k$ -м місці, вектор  $\mathbf{c}_{kS} = (0 \dots 0 \mathbf{b}_{kS}^T 0 \dots 0)^T$ , що містить на  $k$ -м місці елементи вектора  $\mathbf{b}_{kS}$ , є власним вектором  $\tilde{B}$ . З рівності  $\tilde{B}\mathbf{c}_{kS} = \lambda_{kS}\mathbf{c}_{kS}$  одержуємо

$$R^{-1}BR\mathbf{c}_{kS} = \lambda_{kS}\mathbf{c}_{kS} \Rightarrow B(R\mathbf{c}_{kS}) = \lambda_{kS}(R\mathbf{c}_{kS}). \quad (4.14')$$

Остання рівність означає, що вектор  $R\mathbf{c}_{kS}$  є власним вектором матриці  $B$ . Таким чином, для знаходження власних векторів початкової матриці необхідно кожний з векторів розщеплених підсистем доповнити нулями й помножити на матрицю перетворення.

Визначення власних чисел і векторів матриць — це складна обчислювальна задача. Нагромадження похибок при її розв'язанні нерідко призводить до неправильних результатів [7]. Тому контроль отриманого розв'язку є важливою складовою частиною розрахунків. Для цих цілей можна використовувати обчислення похибки

$$A\mathbf{a}_0 = \lambda\mathbf{a}_0. \quad (4.15)$$

Якщо  $\mathbf{a}$  — обчислений власний вектор матриці  $A$ , відповідний до власного числа  $\lambda$ , то похибка  $N$  визначається як відношення норм

$$N = \frac{\|A\mathbf{a} - \lambda\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Вираз для обчислення похибки у випадку комплексного власного вектора  $\mathbf{a}$  має такий вигляд:

$$N = \sqrt{\sum_{i=1}^n (R_{1i}^2 + R_{2i}^2) / \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re} a_i)^2 + (\operatorname{Im} a_i)^2}, \quad (4.16)$$

де

$$\begin{aligned} R_1 &= (A - \operatorname{Re} \lambda E) \operatorname{Re} \mathbf{a} + \operatorname{Im} \lambda \cdot \operatorname{Im} \mathbf{a}, \\ R_2 &= (A - \operatorname{Re} \lambda E) \cdot \operatorname{Im} \mathbf{a} - \operatorname{Im} \lambda \cdot \operatorname{Re} \mathbf{a}. \end{aligned}$$

### **4.3. Стабілізація неконсервативних коливальних систем алгебраїчними методами**

При визначенні значень параметрів, що забезпечують максимальний запас стійкості складної динамічної системи, ефективним є застосування чисельних методів оптимізації [8, 11]. У цьому випадку при використанні першого наближення Ляпунова розглядається система звичайних автономних лінійних диференціальних рівнянь, яка в матричному вигляді записується так:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{y})\mathbf{x}, \quad (4.17)$$

де  $\mathbf{x} \in R^n$ ;  $\mathbf{y}$  — вектор варіюваних параметрів ( $\mathbf{y} \in R^m$ ). Потрібно мінімізувати функцію мети  $L(\mathbf{y})$ , рівну найбільшій дійсній частини власних чисел матриці  $A(\mathbf{y})$ :

$$\min_y L(\mathbf{y}), \quad L(\mathbf{y}) = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i.$$

Обчислення функції мети часто є пов'язаним з визначенням власних чисел матриць порівняно високих порядків [11].

Розв'язання цієї задачі можна спростити, якщо при використанні методу якнайшвидшого спуску обчислювати градієнт функції мети за допомогою формули, що визначає чутливість власних чисел матриці до зміни елементів цієї матриці [10]:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y_j} = \frac{\mathbf{b}_i^* \left( \frac{\partial A(\mathbf{y})}{\partial y_j} \right) \mathbf{a}_i}{\mathbf{b}_i^* \mathbf{a}_i}.$$

Тут \* — знак ермітового спряження;  $\mathbf{a}_i$  — власний вектор матриці  $A(\mathbf{0})$ , відповідний до власного числа  $\lambda_i$ ;  $\mathbf{b}_i$  — власний вектор спряженої матриці  $A^*(\mathbf{0})$ , відповідний до власного числа  $\overline{\lambda_i}$ . Якщо параметри  $\{y_j\}$  входять у вираз  $A(\mathbf{y})$  лінійно, тобто якщо ця матриця може бути представленою у вигляді:

$$A(\mathbf{y}) = A_0 + y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots + y_m A_m, \quad (4.18)$$



то матриці  $\frac{\partial A(\mathbf{y})}{\partial y_i} = A_i$  може бути складеною до початку процесу оптимізації, а не обчислюватися на кожному кроці. Одержуємо формулу для обчислення градієнта:

$$\text{grad } L(\mathbf{y}) = \text{Re} \left\{ \frac{\mathbf{b}_1^* A_k \mathbf{a}_1}{\mathbf{b}_1^* \mathbf{a}_1} \right\}_1^m.$$

Для визначеності вважаємо, що власні числа занумеровано в порядку спадання їх дійсних частин:  $\text{Re} \lambda_{i-1} \geq \text{Re} \lambda_i \quad (i = \overline{2, n})$ .

Певні труднощі виникають, якщо на черговому кроці оптимізації  $\text{Re} \lambda_2 \approx \text{Re} \lambda_1$ , а градієнти, що відповідають  $\text{Re} \lambda_1$  і  $\text{Re} \lambda_2$ , не збігаються (або, при комплексних власних числах,  $\text{Re} \lambda_2 = \text{Re} \lambda_1$ ,  $\text{Re} \lambda_3 \approx \text{Re} \lambda_1$  і градієнти, що відповідають  $\text{Re} \lambda_1$  і  $\text{Re} \lambda_3$ , не збігаються).

Тому при виконанні умови  $\text{Re} \lambda_1 \approx \text{Re} \lambda_2$  слід враховувати вплив другого власного числа (другої пари комплексно спряжених чисел) [2, 4]. Для цього необхідно вибрати таку довжину чергового кроку, щоб після нього виконувалася рівність

$$\text{Re} \lambda_2 = \text{Re} \lambda_1, \quad (4.19)$$

якщо при цьому крок не буде перевищувати заздалегідь заданої величини  $k_{max}$ , а потім знаходити напрямок наступного кроку з урахуванням формули (4.19). Такий підхід на відміну від загальних яружних методів дозволяє не робити додаткові кроки, оскільки напрямок і місце розташування яру можна визначити, заздалегідь обчисливши чутливість величин  $\text{Re} \lambda_1$  і  $\text{Re} \lambda_2$  до зміни параметрів.

Уведемо позначення.

$$a_i(\mathbf{y}) = \operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{y}); \quad a_{i0} = a_i(\mathbf{0});$$

$$q_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial y_j} \equiv \operatorname{Re} \frac{\partial \lambda_j}{\partial y_j}; \quad \mathbf{q}_i = (q_{i1} q_{i2} \dots q_{im})^T.$$

Напрямок наступного кроку виконується уздовж прямої в  $(n+1)$ -мірному просторі, обумовленої рівняннями

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^* - k \mathbf{q}_1,$$

$$L = a_{10} + \mathbf{q}_1^T \mathbf{y}.$$

Тут  $k$  — довжина кроку,  $\mathbf{y}^*$  — початкова точка чергового кроку градієнтного методу.

Геометрично питання про знаходження довжини кроку  $k$  позначає знаходження відстані до точки перетинання цієї прямої з гіперплощиною

$$L = a_{20} + \mathbf{q}_2^T \mathbf{y}.$$

Переносимо початок координат у початкову точку чергового кроку й одержуємо умову перетинання:  $a_{10} - a_{20} = -(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)^T (-k \mathbf{q}_1)$ . Звідси:

$$k = \frac{a_{10} - a_{20}}{\mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_2}, \quad 0 \leq k \leq k_{\max}. \quad (4.20)$$

На дальшому кроці виконується рівність  $a_{20} = a_{10}$ . Залишилося перевірити: чи дійсно ця точка перебуває на дні «яру». Інший випадок

означає, що спуск у бік, протилежний градієнту однієї з функцій  $a_1(\mathbf{y})$ ,  $a_2(\mathbf{y})$  одночасно дає зменшення й іншій функції (рис. 4.1).

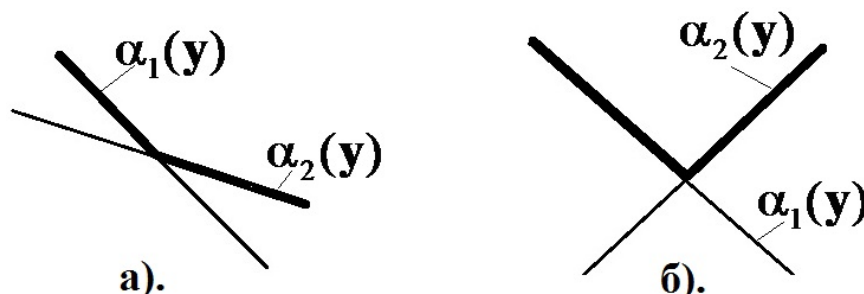


Рис 4.1. Взаємне розташування площин  $a_1(\mathbf{y})$ ,  $a_2(\mathbf{y})$ . Жирною лінією показано функцію  $L(\mathbf{y}) = \max_i \alpha_i(\mathbf{y})$ . а). Нема «яру». б). «Яр» є.

Переносимо початок координат у початкову точку чергового кроку. Робимо переміщення, відповідне до градієнта  $\mathbf{q}_2$  функції  $a_2(\mathbf{y})$ :  $\mathbf{y} = -\varepsilon \mathbf{q}_2$ . Зміна величини  $a_1(\mathbf{y})$  буде такою (використано лінійне наближення):

$$a_1(\mathbf{y}) = -\sum_{i=1}^m q_{1i} y_i = -\mathbf{q}_1^T \mathbf{y} = -\varepsilon \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_2.$$

Звідси видно, що одночасне зменшення величин  $a_1(\mathbf{y})$ ,  $a_2(\mathbf{y})$  (тобто відсутність «яру») буде при

$$\mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_2 > 0. \quad (4.21)$$

А якщо ні, то необхідно спускатися вздовж многовиду, відповідного перетинанню гіперплощин;  $L = a_{10} + \mathbf{q}_1^T \mathbf{y}'$  і  $L = a_{20} + \mathbf{q}_2^T \mathbf{y}'$  ( $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \mathbf{y}^{(k)}$ ).

Для цього записуємо умову перетинання гіперплощин у просторі параметрів:

$$\sum_{i=1}^m y'_i \delta_i = 0; \delta_i = q_{1i} - q_{2i}.$$

За допомогою методу множників Лагранжа одержуємо новий напрямок якнайшвидшого спуска:

$$-\mathbf{q} = -(\mathbf{q}_1 + \mu \boldsymbol{\delta}), \quad \mu = -\frac{\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{q}_1}{\boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\delta}}. \quad (4.22)$$

При  $m$  рівному 2, ці міркування легко проілюструвати (рис. 4.2).

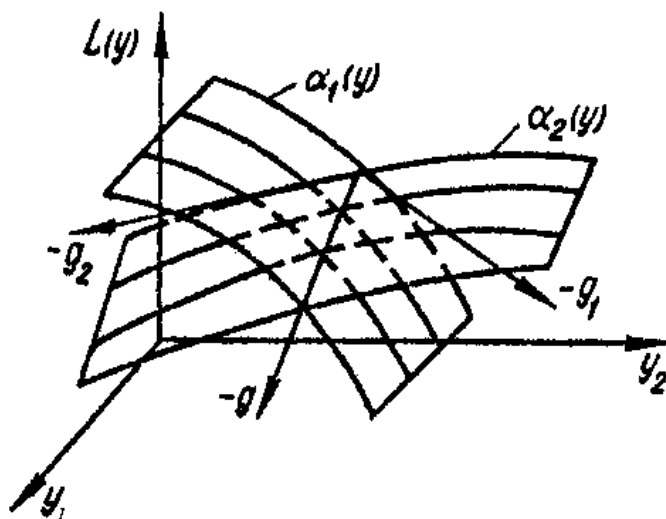


Рис. 4.2. Напрямок найшвидшого спуска у випадку власних чисел з однаковою дійсною частиною

Як приклад розглянемо систему вигляду (4.17), де

$$A(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_2 & -y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - y_1 + 0,5y_2 \end{pmatrix}.$$

Початкове значення вектора змінних  $\mathbf{y}^{(0)} = (3; 4)$ . При цьому власні числа дорівнюють  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -5$ . Функція мети  $L(\mathbf{y}) = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i = 5$ .

Власні вектори:  $\mathbf{q}_1 = (0,6; 0,8)^T$ ,  $\mathbf{q}_2 = (-1; 0,5)^T$ . Довжину кроку  $k$  визначимо за формулою (4.20):  $k = 4,16$ . Одержуємо нове значення вектора змінних

$$\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{y}^{(0)} - k\mathbf{q}_1 = (0,5; 0,667)^T,$$

при якому  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,843$ ,  $\lambda_3 = -0,843$ ,  $L = 0,843$ , а значення векторів  $q_1$  і  $q_2$  залишаються колишніми. Оскільки умова (4.21) не виконується, складаємо вираз (4.22):

$$\delta_1 = 1,6; \delta_2 = 0,3; y_2 = -\frac{1}{0,3}1,6y_1.$$

Тоді, вибравши  $k = \frac{0,4}{3,67}$ , на дальшому кроці одержуємо

$$\lambda_1 = 0,733; \lambda_2 = 0,467; \lambda_3 = -0,733, L = 0,733.$$

Слід зазначити, що застосування яружних методів дозволяє не лише прискорити процес оптимізації, але і знайти місце розташування «яру», у якому перебуває область значень параметрів, близьких до оптимальних.

Розрахунки по оптимізації параметрів електровозу наведено в підрозділі 5.6.

До оптимізації параметрів в аналогічних випадках можливим є й інший підхід, пов'язаний з розв'язанням на кожному кроці допоміжної задачі лінійного програмування:

$$\begin{aligned} & \min L, \\ & L \geq \operatorname{Re} \lambda_i + \mathbf{q}_i^T \mathbf{y} \quad (i = \overline{1, r}), \\ & -k_{\max} \leq y_j \leq k_{\max} \quad (j = \overline{1, r}). \end{aligned}$$

Тут  $r$  — кількість власних чисел, дійсні частини яких є близькими до максимального значення. Якщо є необхідність враховувати обмеження на параметри, то додається ще кілька відповідних нерівностей.

Можна використовувати також похідні другого порядку. Формула для обчислення виводиться аналогічно формулам теорії збурювань [10, 12]. Приведемо остаточний результат для випадку простих елементарних дільників матриці  $A$ . Нехай вектори  $\mathbf{a}_i$  і  $\mathbf{b}_i$  є нормованими так, що  $\mathbf{b}_i^* \mathbf{a}_i = 1$ , тоді

$$\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y_i \partial y_j} = \sum_{k=2}^n \frac{A_{k1}^{(i)} A_{1k}^{(i)} + A_{k1}^{(j)} A_{1k}^{(j)}}{\lambda_1 - \lambda_k}, \quad (4.23)$$

де  $A_{ks}^{(i)} = \mathbf{b}_k^* A_i \mathbf{a}_s$  (див. вираз (4.18)).

За допомогою других похідних можна застосовувати метод Ньютона, що дає швидку збіжність. У цьому випадку ітерації ведуться за схемою

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} - [L''(\mathbf{y}^{(k)})]^{-1} L'(\mathbf{y}^{(k)}),$$

у якій  $L'(\mathbf{y})$  — градієнт;  $L'(\mathbf{y}) = \left\{ \frac{\partial L}{\partial y_i} \right\}_1^m$ ;  $L''(\mathbf{y})$  — матриця других похідних

(матриця Гессе):  $L''(\mathbf{y}) = \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial y_j} \right\}_1^m$ .

Розглянемо випадок, коли спектр матриці складається із двох частин: одна частина спектра є розташованою поблизу уявної осі, інша містить власні числа з великою за абсолютною величиною від'ємною дійсною частиною (рис. 4.3). Тоді має сенс скористатися запропонованим в [1] (§ 3.6) способом виділення власних чисел з максимальною дійсною частиною. Він дозволяє знайти допоміжні прямокутні матриці  $S$  і  $S_1$  такі, що власні числа матриці низького порядку  $A'_1 = S_1 A S$  збігаються з першою частиною спектра матриці  $A$ .

Матриці  $S$  і  $S_1$  знаходяться за допомогою ітераційного алгоритму, що полягає в одночаснім використанні конформного перетворення  $\varpi = e^{\theta z}$ , у результаті якого власні числа з максимальною дійсною частиною стають найбільшими за абсолютною величиною, і степеневого методу, що виділяє найбільші за абсолютною величиною власні числа зі своїми векторами.

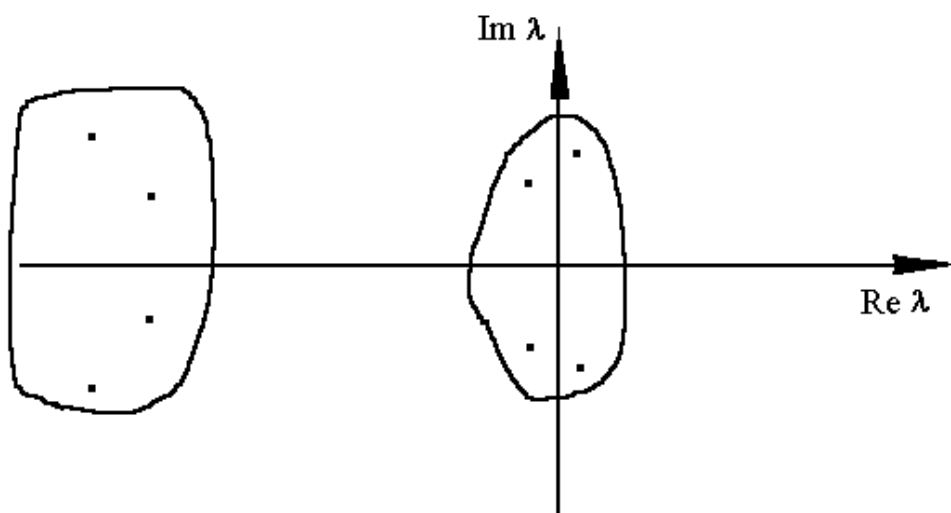


Рис. 4.3. Розташування власних чисел на комплексній площині

Нехай  $S$  і  $S_1$  — відповідні допоміжні матриці, знайдені для  $A_0$  (див. (4.18)). Перетворимо матрицю  $A(y)$ :

$$A'(y) = A'_0 + y_1 A'_1 + \dots + y_m A'_m, \quad A'_i = S_1 A_i S.$$

Неважко довести, що для чергового кроку градієнтного методу можна скористатися отриманими матрицями низького порядку. Позначимо знайдене на певному кроці значення вектора  $\mathbf{y}$  через  $\mathbf{y}^{(k)}$ .

Для дальшого кроку необхідно знову визначити матриці  $S$  і  $S_1$ . Швидкий результат за допомогою ітераційного алгоритму можна одержати, якщо в якості початкового наближення використовувати власний вектор матриці  $A(\mathbf{y}^{(k)})$ , який можна приблизно обчислити за формулою, що визначає чутливість власного вектора матриці до зміни її параметрів. Розрахункові формули такі [10]:

$$\mathbf{a}^{(k)} = S(\mathbf{a}'^{(k-1)} + \sum \mathbf{y}_s f_s); f_s = \sum_{j=2}^{n_1} \frac{A_{1j}}{\lambda_1 - \lambda_j}.$$

Тут  $\mathbf{a}'^{(k-1)}$  — є власний вектор матриці  $A'(\mathbf{y}^{(k-1)})$ ;  $n_1$  — його розмір; інші позначення є такими, як у формулі (4.23). За таким обчисленням другу частину спектра матриці  $A(\mathbf{y}^{(k-1)})$  не враховуємо. Це є можливим, тому що відповідні множники  $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_j}$  є досить малими за абсолютною величиною.

#### 4.4. Оцінка області притягання розв'язку за допомогою власних векторів матриці першого наближення

При дослідженні складних механічних систем запас стійкості нерідко характеризується величиною  $h = -L$ , де  $L = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k$ ,  $\lambda_k$  — власні числа матриці рівнянь першого наближення (див., наприклад, [11]). Природним є припущення про те, що при зміні параметрів механічної системи з метою збільшення числа  $h$  ми одночасно прагнемо збільшення області притягання



розв'язку. Задачу про одержання оцінки цієї області за допомогою числа  $h$  було поставлено В. А. Лазаряном і його співробітниками [11].

Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (4.24)$$

де  $\mathbf{x}$  —  $n$ -мірний дійсний вектор;  $A$  — постійна дійсна матриця порядку  $n$ ;  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [F_1(\mathbf{x}) \ F_2(\mathbf{x}) \ \dots \ F_n(\mathbf{x})]^T$  — вектор-функція,  $T$  — знак транспонування. Вважаємо, що функції  $F_k(\mathbf{x})$  є визначеними в деякій області  $D$ , що містить початок координат. Крім того, в області  $D$  виконується нерівність

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| \leq M \cdot \|\mathbf{x}\|^{1+\alpha}, \quad (4.25)$$

де  $M$  і  $\alpha$  — додатні числа;  $\|\cdot\|$  — евклідова норма:  $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_k |x_k|^2$ . Областю притягання нульового розв'язку для даної області  $D$  (відповідно до [5]) будемо називати таку область, в якій всі траєкторії, що починаються в її точках, існують при  $0 < t < \infty$  і прагнуть до початку координат при  $t \rightarrow \infty$ .

Розглянемо нормальну форму матриці [14], яка відрізняється від жорданової форми тим, що у відповідних місцях верхньої наддіагоналі замість одиниць розташовано числа  $\delta$ , відмінні від нуля. Нехай  $\delta$  — досить малі додатні числа (якщо матриця  $A$  має діагональну жорданову форму, то вважаємо  $\delta = 0$ ). Тобто замість звичайних жорданових блоків використовуються такі блоки:

$$G_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

Позначимо через  $B$  таку нормальну форму матриці  $A$ , а через  $P$  — матрицю відповідного перетворення подібності, тобто  $B = P^{-1}AP$ . Матриця перетворення  $P$  у цьому випадку складається із власних і приєднаних векторів. При цьому власні вектори визначаються, як звичайно, з рівності  $A\mathbf{b}_i^{(0)} = \lambda_i\mathbf{b}_i^{(0)}$ , а для відповідних приєднаних векторів замість рівностей  $A\mathbf{b}_i^{(j)} = \lambda_i\mathbf{b}_i^{(j)} + \mathbf{b}_i^{(j-1)}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$  використовуються рівності  $A\mathbf{b}_i^{(j)} = \lambda_i\mathbf{b}_i^{(j)} + \delta\mathbf{b}_i^{(j-1)}$ ,  $j = \overline{1, m_i}$ . Тут  $m_i + 1$  — розмір  $k$ -го жорданового блоку.

Зробивши заміну змінних  $\mathbf{x} = P\mathbf{z}$  в (4.24), одержимо

$$\dot{\mathbf{z}} = B\mathbf{z} + \Phi(\mathbf{z}), \quad (4.26)$$

де  $\Phi(\mathbf{z}) = P^{-1}\mathbf{F}(P\mathbf{z})$ . Для функції  $\Phi(\mathbf{z})$  виконується нерівність  $\|\Phi(\mathbf{z})\| \leq N \cdot \|\mathbf{z}\|^{1+\alpha}$ , що є аналогічною нерівності (4.25), причому  $N \leq \|P^{-1}\| \cdot M \cdot \|P\|^{1+\alpha}$ . Тут у якості матричної норми потрібно використовувати матричну норму, погоджену з векторною нормою. Таку норму називають також підлеглою матричною нормою, або індукованою, або операторною нормою. Тому використовується «спектральна» норма матриці [16, 17], тобто найбільше з її сингулярних чисел (узагальнених власних чисел). У якості норми комплексного вектора використовуємо таку векторну норму:  $\|\mathbf{z}\|^2 = \sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i = \mathbf{z}^* \mathbf{z}$ , де зірочка — знак ермітового спряження.

Черговому блоку системи (4.26) відповідає підсистема

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_k = \lambda_k \mathbf{z}_k + \delta \mathbf{z}_{k+1} + \Phi_k(\mathbf{z}), \\ \dot{\mathbf{z}}_{k+1} = \lambda_k \mathbf{z}_{k+1} + \delta \mathbf{z}_{k+2} + \Phi_{k+1}(\mathbf{z}), \\ \dots \\ \dot{\mathbf{z}}_{k+m_k} = \lambda_k \mathbf{z}_{k+m_k} + \Phi_{k+m_k}(\mathbf{z}). \end{cases} \quad (4.26')$$

Розглянемо функцію  $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{z}\|^2 = \mathbf{x}^* (P^{-1})^* P^{-1} \mathbf{x}$ . Величина  $\|\mathbf{z}\|^2$  завжди є дійсною. Крім того матриця  $(P^{-1})^* P^{-1}$  є симетричною. Тому функція  $V(\mathbf{x})$  — це квадратична форма з дійсними коефіцієнтами.

Виконаємо оцінку похідної одного доданка функції  $V(\mathbf{x})$  з урахуванням (4.26'):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\bar{z}_i z_i) &= \dot{\bar{z}}_i z_i + \bar{z}_i \dot{z}_i = (\bar{\lambda}_i \bar{z}_i + \delta \bar{z}_i + \bar{\Phi}_i(\mathbf{z})) z_i + \bar{z}_i (\lambda_i z_i + \delta z_i + \Phi_i(\mathbf{z})) = \\ &= 2(\operatorname{Re}(\lambda_i) + \delta) \|z_i\|^2 + \bar{\Phi}_i(\mathbf{z}) z_i + \Phi_i(\mathbf{z}) \bar{z}_i. \end{aligned}$$

Позначимо:  $\alpha_i = \operatorname{Re}(\lambda_i)$ ,  $h = -\max \alpha_i$ . Вважаємо, що виконуються умови теореми Ляпунова про стійкість по першому наближенню й, отже,  $h > 0$ . Підсумувавши обчислені похідні, одержуємо:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (2(\operatorname{Re}(\lambda_i) + \delta) \|z_i\|^2 + \bar{\Phi}_i(\mathbf{z}) z_i + \Phi_i(\mathbf{z}) \bar{z}_i) \leq -2(h - \delta) \|\mathbf{z}\|^2 + \langle \mathbf{z}, \Phi(\mathbf{z}) \rangle + \langle \Phi(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle.$$

Тут  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i b_i$  — скалярний добуток.

Розглянемо останні два доданки.

$$\langle \mathbf{z}, \Phi(\mathbf{z}) \rangle + \langle \Phi(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{z}, \Phi(\mathbf{z}) \rangle + \overline{\langle \mathbf{z}, \Phi(\mathbf{z}) \rangle} = 2 \operatorname{Re}(\langle \mathbf{z}, \Phi(\mathbf{z}) \rangle) \leq 2 |\operatorname{Re}(\langle \mathbf{z}, \Phi(\mathbf{z}) \rangle)| \leq 2 |\langle \mathbf{z}, \Phi(\mathbf{z}) \rangle|.$$

Скориставшись нерівністю Коші — Буняковського й нерівністю  $\|\Phi(\mathbf{z})\| \leq N \cdot \|\mathbf{z}\|^{1+\alpha}$ , одержуємо:

$$|\langle \mathbf{z}, \Phi(\mathbf{z}) \rangle| \leq \|\mathbf{z}\| \cdot \|\Phi(\mathbf{z})\| \leq \|\mathbf{z}\| \cdot N \cdot \|\mathbf{z}\|^{1+\alpha} = N \cdot \|\mathbf{z}\|^{2+\alpha}.$$

Тому:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -2(h-\delta)\|\mathbf{z}\|^2 + 2N\|\mathbf{z}\|^{2+\alpha} = -2\left((h-\delta) - N\|\mathbf{z}\|^\alpha\right)\|\mathbf{z}\|^2 = -2\left((h-\delta) - N\|\mathbf{z}\|^\alpha\right)V(\mathbf{x}).$$

Отже, при  $h > 0$  функція  $V(\mathbf{x})$  є функцією Ляпунова для системи (4.24) й виконується умова леми Ляпунова про асимптотичну стійкість в області  $G$ , що визначається нерівністю  $(h-\delta) - N\|\mathbf{z}\|^\alpha > 0$ , або

$$V(\mathbf{x}) < \left(\frac{h-\delta}{N}\right)^{2/\alpha}. \quad (4.27)$$

При цьому функція  $V(\mathbf{x})$  є від'ємно-визначеною в області  $G$ . Область  $G$  являє собою внутрішність  $n$ -мірного еліпсоїда з центром на початку координат. Нехай  $\sigma = G \cap D$ . Для оцінки області притягання, згідно [5], потрібно знайти мінімум  $l$  функції  $V(\mathbf{x})$  на межі області  $\sigma$ ; шуканою областю є множина, обумовлена нерівністю  $V(\mathbf{x}) < l$ . У випадку  $G \subset D$  множина  $\sigma$  збігається з  $G$ , й область  $G$  (тобто множина, обумовлена нерівністю (4.27)) належить області притягання.

Область  $G$  за допомогою нерівності (4.27) неважко визначити навіть для системи рівнянь високого порядку. Дійсно, всі обчислення тут зводяться до визначення власних чисел і канонічних базисів матриць. Це можна

здійснити за допомогою алгоритмів, що добре зарекомендували себе (наприклад,  $QR$ -алгоритма й метода зворотних ітерацій).

Зрозуміло, що величину  $\delta$  потрібно вибирати з умови  $\delta < h$ . Питання про найкращий вибір цієї величини вимагає окремого вивчення.

Для випадку, коли матриця  $A$  має діагональну жорданову форму й область  $D$  є досить великою, отриманий результат можна сформулювати так: якщо для системи рівнянь (4.24) виконуються умови теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням, то будь-який розв'язок системи (4.24) з початковими умовами  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , що задовольняють нерівності

$$\mathbf{x}_0^* (P^{-1})^* P^{-1} \mathbf{x}_0 < \left( \frac{-\max \operatorname{Re} \lambda_k}{\|P^{-1}\| \cdot M \cdot \|P\|^{1+\alpha}} \right)^{2/\alpha}, \quad (4.28)$$

прагне до нуля. Тут  $\lambda_i$  — власні числа матриці  $A$ ;  $P$  — матриця, стовпцями якої є власні вектори матриці  $A$ ;  $M$  і  $\alpha$  — константи нерівності (4.25). Це також є поліпшенням оцінки, отриманої в [3]. Отриману область позначимо  $G$ .

**Зауваження.** Результати без зміни переносяться й на неавтономну систему рівнянь  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \Phi(t, \mathbf{z})$ .

#### Приклад 4.1.

$$\ddot{s} + 2H\dot{s} + s - 2bs^3 = 0; \quad b > 0; \quad 1 > H > 0. \quad (4.29)$$

Таким рівнянням описано рух матеріальної точки під дією сили тяжіння по напрямній, зображеній на рис. 4.7, при наявності в'язкого тертя.

Напряму описано рівнянням  $y = \frac{1}{2g}(s^2 - bs^4)$ , де  $s$  — довжина дуги кривої.

Вважаємо, що маса матеріальної точки  $m = 1$ , а величина в'язкого тертя визначається за формулою  $P_{\text{опору}} = -2H\dot{s}$ .

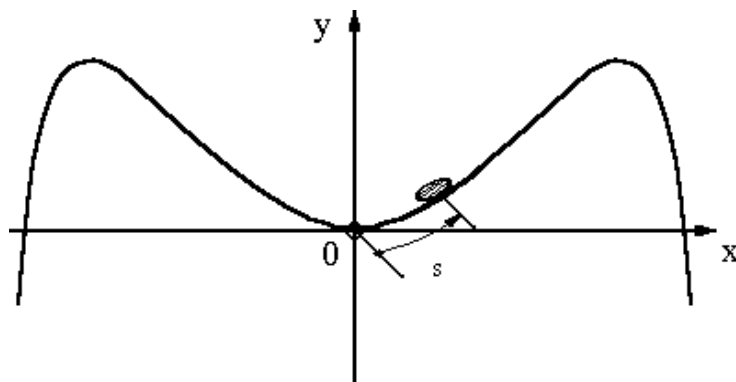


Рис. 4.7. Приклад механічної системи

Приведемо рівняння (4.29) до нормальної форми Коші, поклавши  $x_1 = s$ ;  $x_2 = \dot{s}$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2Hx_2 + 2bx_1^3. \end{cases} \quad (4.30)$$

Звідси

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2H \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2bx_1^3 \end{pmatrix}; \quad \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| \leq 2b\|\mathbf{x}\|^{1+2}.$$

Знаходимо власні числа матриці  $A$ :  $\lambda_{1,2} = -H \pm iv$ , де  $v^2 = 1 - H^2$ . Тому  $h = -\max_k \operatorname{Re} \lambda_k = H$  (при  $H < 1$ ). Складаємо матрицю  $P$  із власних векторів матриці  $A$  і обчислюємо  $P^{-1}$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -H + iv & -H - iv \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{2v} \begin{pmatrix} v - Hi & -i \\ v + Hi & i \end{pmatrix}.$$

Далі користуємося формулою (4.28). Обчислюємо вектор  $\mathbf{z} = P^{-1}\mathbf{x}$ .

Одержуємо:  $\mathbf{z} = \frac{1}{2v} \begin{pmatrix} (v - Hi)x_1 - ix_2 \\ (v + Hi)x_1 + ix_2 \end{pmatrix}$ . Звідси ліва частина нерівності (4.28)

дорівнює:  $\mathbf{x}_0^* (P^{-1})^* P^{-1} \mathbf{x}_0 = \mathbf{z}^* \mathbf{z} = \frac{1}{2v^2} (x_1^2 + 2Hx_1x_2 + x_2^2)$ .

Спектральна норма матриці  $P$  — це найбільше з її сингулярних чисел, якими є квадратне коріння власних чисел матриці  $P^*P$ . Обчислюємо:

$P^*P = \begin{pmatrix} 2 & 2H^2 + 2Hvi \\ 2H^2 - 2Hvi & 2 \end{pmatrix}$ . Власні числа цієї матриці дорівнюють:

$\mu_{1,2} = 2 \pm 2H$ . Звідси:  $\|P\| = \sqrt{2(1+H)}$ . Таким самим шляхом знаходимо

$\|P^{-1}\| = \frac{\sqrt{1+H}}{\sqrt{2}v}$ . Підставивши ці величини в (4.28), одержуємо:

$$x_1^2 + 2Hx_1x_2 + x_2^2 < \frac{Hv^3}{2b(1+H)^2}.$$

На рис. 4.8 зображено область  $G$  для випадку  $H = 0,5$ ;  $b = 1$ . Рівняння межі області в цьому випадку має вигляд:

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0,0722.$$

З фізичних міркувань зрозуміло, що при нульовій початковій

швидкості  $\dot{s}(0)=0$  згасання коливань буде забезпечено у випадку, коли початкове положення  $s(0)$  матеріальної точки буде між максимальними значеннями функції  $y = \frac{1}{2g}(s^2 - bs^4)$  (рис. 4.7), тобто коли буде виконуватися нерівність:

$$s(0) < \frac{1}{\sqrt{2b}}. \quad (4.31)$$

Хрестиками на рис. 4.8 позначено границі значень  $s(0)$  з нерівності (4.31).

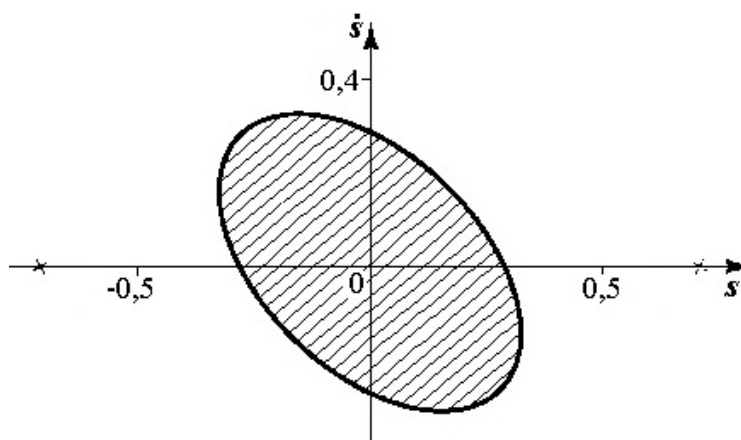


Рис. 4.8. Результати розв'язання прикладу

### Приклад 4.2.

$$\dot{x} = -x + x^2.$$

Це рівняння має розв'язок:  $x = \frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)\exp(t - t_0)}$ , звідки видно, що



розв'язок безперервно прагне до нуля лише при  $x_0 < 1$ .

Одержимо оцінку за допомогою нерівності (4.28). Тут  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|^2 = 1 \cdot \|\mathbf{x}\|^{1+1}$ , тому  $M = 1$ ,  $\alpha = 1$ . Оскільки рівняння має перший порядок, вважаємо  $s = 1$ . У підсумку одержуємо  $x_0^2 < 1$ , інакше  $|x_0| < 1$ .

Отже, гідністю запропонованих оцінок (4.27) і (4.28) є їхня порівняльна простота й застосовність до системи досить високого порядку, недоліком — те, що сама оцінка може вийти заниженою [3].

#### 4.5. Висновки до розділу 4

Удосконалено способи зведення рівнянь руху неконсервативної коливальної системи до головних фазових координат й аналізу форм коливань такої системи. Удосконалено способи стабілізації неконсервативних коливальних систем методами теорії чутливості. Отримано нову оцінку області притягання розв'язку.

#### 4.6. Список використаних джерел до розділу 4

1. Базилевич Ю. Н. Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики / Ю. Н. Базилевич. — Киев: Наук. думка, 1987. — 156 с.
2. Базилевич Ю. Н. О применении методов теории чувствительности для стабилизации сложных динамических систем / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, В. А. Татарина // Теория инвариантности и её применение. Ч. 2. — Киев: Наук. Думка, 1979. —
3. Базилевич Ю. Н. Оценка области притяжения решения уравнений движения с помощью собственных чисел / Ю. Н. Базилевич // Колебания и динамические качества механических систем. — Киев: Наук. думка, 1983. — С. 14—17.

4. Базилевич Ю. Н. Оптимизация параметров механических систем при овражном характере целевой функции / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, В. А. Татарина // Динамика и прочность сложных механических систем. — Киев: Наук. думка, 1977. — С.
5. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова / Е. А. Барбашин. — М.: Наука, 1970. — 240 с.
6. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). — М.: Машиностроение, 1978 — 1979 — Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978. — 352 с.
7. Воеводин В. В. Развитие методов решения задач алгебры в вычислительном центре Университета / В. В. Воеводин // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. Математика и механика. — 1970. — № 2. — С. 69—82.
8. Городецкий В.И. Методы теории чувствительности в автоматическом управлении / В.И. Городецкий, Ф.М. Захарин, Е.Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов; под. ред. Е.Н. Розенвассера и Р.М. Юсупова. — JL: Энергия, 1971.—344 с.
9. Демин Ю. В. Автоколебания и устойчивость движения рельсовых экипажей / Ю. В. Демин, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко и др. — Киев: Наук. думка, 1984. — 160 с.
10. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
11. Лазарян В. А. Устойчивость движения рельсовых экипажей / В. А. Лазарян, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко. — Киев: Наук. думка, 1972. — 199 с.
12. Ландау Л. Д. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948. — 568 с.
13. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. — М.: Наука, 1971. — 312 с.

14. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. — М.: Наука, 1970. — 279 с.
15. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний / С. П. Стрелков. — М.: Наука, 1964. — 440 с.
16. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989, 655 с.
17. Шарый С. П. Курс вычислительных методов / С. П. Шарый. — Новосибирск: Ин-т вычислительных технологий СО РАН, 2014, — 507 с.

## РОЗДІЛ 5

### РОЗЩЕПЛЕННЯ РІВНЯНЬ ОБУРЕНОГО РУХУ РЕЙКОВИХ ЕКІПАЖІВ

У даному розділі розглянуто застосування викладених вище методів до рівнянь руху рейкових екіпажів. Ці системи є прикладами механічних систем з позиційними неконсервативними силами [1, 6, 12, 13, 14, 15].

Рівняння руху рейкових екіпажів зазвичай складаються як рівняння Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i,$$

де  $\Pi$  — потенційна енергія, що є квадратичною формою координат;  $T$  та  $\Phi$  — кінетична енергія й функція розсіювання, що є квадратичними формами швидкостей;  $\{Q_i\}$  — горизонтальні сили, взаємодії коліс і рейка, що виникають у результаті псевдоковзання.

Нерідко складні механічні системи характеризуються наявністю сил, що лінійно залежать від координат і мають кососиметричну матрицю коефіцієнтів. Такі сили називають суттєво неконсервативними, або неконсервативними позиційними, циркуляційними силами, силами радіальної корекції, властиво неконсервативними силами, псевдогіроскопічними, силами обмеженого демпфірування тощо.

Якщо механічна система містить такі сили, то при використанні груп симетрії слід розглядати вже не інваріантність відповідних квадратичних форм, як це іноді робиться, а інваріантність матриць коефіцієнтів системи. Природно, що при цьому група симетрії, яка допускається консервативними силами, звужується.

Дослідження стійкості руху рейкових екіпажів ускладнено наявністю сил псевдоковзання (сил крипу), що є сумою дисипативних і суттєво неконсервативних сил (див. Лазарян В. А. [13]). При коченні колеса по рейці виникає явище псевдоковзання, викликуване місцевими деформаціями рейки й колеса в зоні контакту. Це пояснюється тим, що візок рейкового екіпажа, що поєднує дві (іноді три) колісні пари з конічними колесами, не може рухатися без «прослизання», коли вон є зміщеним щодо положення рівноваги. Виникаючі при цьому сили, згідно з теорією Картера, вважають пропорційними відносним «прослизанням» [13, 18, 19]:

$$Q_i = -F\varepsilon_i,$$

де  $\varepsilon_i$  — відносне «прослизання», відповідне до узагальненої координати  $q_i$ ;  $F$  — коефіцієнт, обумовлений експериментально й названий коефіцієнтом псевдоковзання.

Розглянуто застосування теорії груп до розрахункових схем чотиривісного й восьмивісного рейкових екіпажів з одинарним ресорним підвісом, а також до розрахункової схеми тепловоза трохи незвичайної конструкції.

Питання практичного застосування методів теорії груп розглянуто на прикладі розрахункових схем рейкових екіпажів. Ці системи характеризуються високим порядком матриць коефіцієнтів. Для них характерним є також наявність неконсервативних сил псевдоковзання, завдяки яким матриці коефіцієнтів стають несиметричними. Усе це викликає певні труднощі як при складанні груп симетрії, так і при виконанні обчислень.

### 5.1. Декомпозиція рівнянь руху чотиривісного вагона з подвійним ресорним підвісом

Розглянемо застосування методу комутуючої матриці до системи рівнянь, що описує рух чотиривісного вагона з подвійним ресорним підвісом (рис. 5.1). Рівняння, що представляють інтерес із погляду стійкості руху, становлять систему зв'язаних рівнянь 34-го порядку:

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0. \quad (5.1)$$

Тут вектор  $x$  складається з таких елементів:

$$\theta, y, \psi, \theta_1, \theta_2, y_1, y_2, \psi_1, \psi_2, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, \psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{21}, \psi_{22},$$

де  $\theta, y, \psi$  — переміщення кузова;  $\theta_i, y_i, \psi_i$  — переміщення рами  $i$ -го візка;  $y_{ij}, \psi_{ij}$  — переміщення колісної пари з номером  $ij$ ,  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2$  (рис. 5.1). Змінні  $\psi, \psi_i, \psi_{ij}$  — це кути поворотів у горизонтальній площині.

Ненульові елементи матриць  $A, B$  та  $C$  такі:

$$\begin{aligned} a_{11} &= J_x; a_{22} = m; a_{33} = J_z; a_{44} = a_{55} = J_{x1}; a_{66} = a_{77} = m_1; a_{88} = a_{99} = J_{z1}; \\ a_{10\ 10} &= a_{11\ 11} = a_{12\ 12} = a_{13\ 13} = m_{11}; a_{14\ 14} = a_{15\ 15} = a_{16\ 16} = a_{17\ 17} = J_{z11}; \\ b_{11} &= 4b_1^2 \beta_0 + 4h^2 \beta_1; b_{12} = b_{21} = -4h\beta_1; b_{14} = b_{15} = b_{41} = b_{51} = -2b_1^2 \beta_0; \\ b_{16} &= b_{17} = b_{61} = b_{71} = 2h\beta_1; b_{22} = 4\beta_1; b_{26} = b_{27} = b_{62} = b_{72} = -2\beta_1; b_{33} = 4l^2 \beta_1; \\ b_{36} &= b_{63} = -2l\beta_1; b_{37} = b_{73} = 2l\beta_1; b_{44} = b_{55} = 2b_1^2 \beta_0 + 4b_1^2 \beta_2; b_{66} = b_{77} = 2\beta_1; \\ b_{10\ 10} &= b_{11\ 11} = b_{12\ 12} = b_{13\ 13} = 2F/V; b_{14\ 14} = b_{15\ 15} = b_{16\ 16} = b_{17\ 17} = 2F d_1^2 / V; \\ c_{11} &= 4b_1^2 k_0 + 4h^2 k_1; c_{12} = c_{21} = -4hk_1; c_{14} = c_{15} = c_{41} = c_{51} = -2b_1^2 k_0; \\ c_{16} &= c_{17} = c_{61} = c_{71} = 2hk_1; c_{22} = 4k_1; c_{26} = c_{27} = c_{62} = c_{72} = -2k_1; c_{33} = 4l^2 k_1; \end{aligned}$$

$$c_{36} = c_{63} = -2lk_1; c_{37} = c_{73} = 2lk_1; c_{44} = c_{55} = 2b_1^2 k_0 + 4b_1^2 k_2; c_{66} = c_{77} = 2k_1 + 4k_3;$$

$$c_{610} = c_{611} = c_{712} = c_{713} = c_{106} = c_{116} = c_{127} = c_{137} = -2k_3;$$

$$c_{88} = c_{99} = 4a^2 k_3 + 4b_1^2 k_4; c_{810} = c_{912} = c_{108} = c_{129} = -2ak_3;$$

$$c_{811} = c_{913} = c_{118} = c_{139} = 2ak_3;$$

$$c_{814} = c_{815} = c_{916} = c_{917} = c_{148} = c_{158} = c_{169} = c_{179} = -2b_1^2 k_4;$$

$$c_{1010} = c_{1111} = c_{1212} = c_{1313} = 2k_3; c_{1014} = c_{1115} = c_{1216} = c_{1317} = -2F;$$

$$c_{14} = c_{1515} = c_{1616} = c_{1717} = 2b_1^2 k_4; c_{1410} = c_{1511} = c_{1612} = c_{1713} = 2Fd_1\mu/r.$$

Через  $m$  і  $J$  з відповідними номерами й індексами позначено маси й моменти інерції кузова, візків і колісних пар;  $\beta_i$  й  $k_i$  — коефіцієнти в'язкості демпферів і твердості пружин, наведених на малюнку;  $V$  — швидкість руху;  $2\mu$  й  $r$  — конічність і радіус круга катання колеса;  $h$  — відстань від центру мас кузова до площини, що проходить через верхні точки пружин центрального підвісу. Інші геометричні розміри зазначено на рис. 5.1.

Спочатку було розглянуто конструкцію рейкового екіпажа із пружно-дисипативними зв'язками між рамами візків і кузовом.

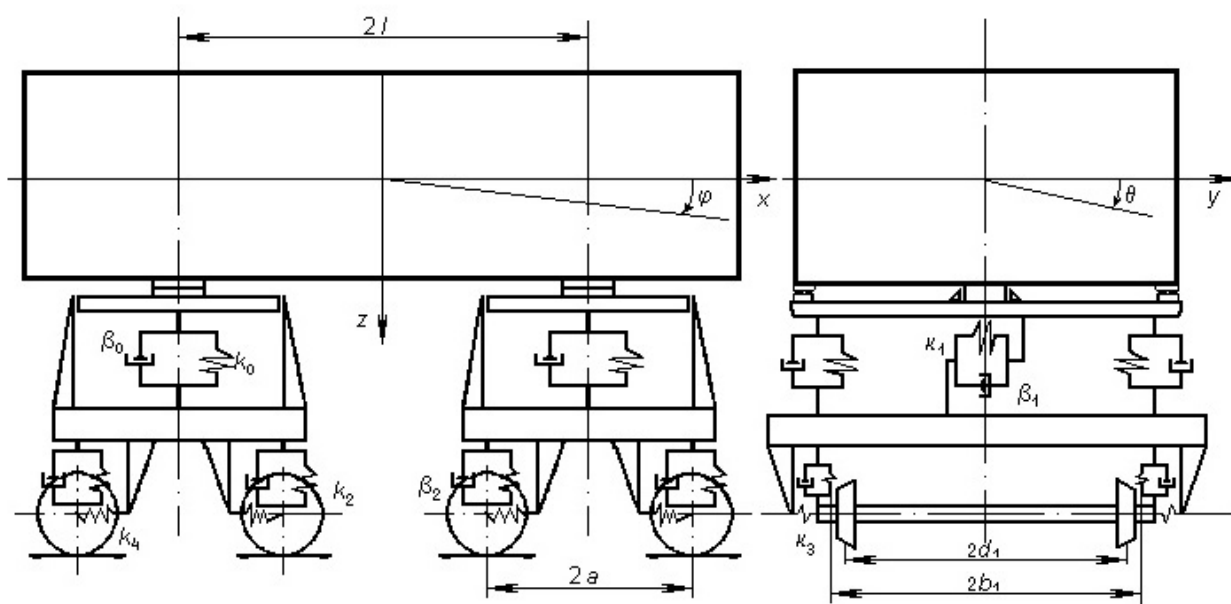


Рис. 5.1. Чотиривісний вагон із подвійним ресорним підвісом

Загальний розв'язок системи (2.26) має вигляд:

$$Z = \alpha E_{17} + \beta \Delta, D = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & \mathbf{0} & & 1 & -1 & \mathbf{0} \\ & & & -1 & 1 & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right],$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  — довільні числа. При  $\alpha = 0$  і  $\beta = 1$  власні числа матриці  $Z$  такі:  $\lambda_1 = 2$ ;  $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{17} = 0$ . Тому початкова система рівнянь розпадається на дві підсистеми, що складаються із 1-го й 16-ти рівнянь. Власні вектори блоку

$$D^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ такі: } \mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ і } \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Тому } S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Далі:}$$

$$S^{-1} = 0,5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Отже, заміна змінних така;}$$

$$q_4 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2), \quad q_5 = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2).$$

За допомогою цієї заміни змінних початкову систему 34-го порядку може бути наведено до двох підсистем 32-го й 2-го порядків. При цьому рівняння 2-го порядку, відповідне змінної  $q_5$ , не бере участь у дослідженні стійкості руху й може бути відкинуто.

Отримані підсистеми розщепити далі є неможливим. Це впливає з того, що відповідні комутуючі матриці є кратними одиничним матрицям. Відповідно до теорем розділу 2, отриманий результат означає, що для даної



системи рівнянь знайдено максимально можливу кількість незалежних підсистем.

У випадку відсутності пружно-дисипативних зв'язків, що перешкоджають поворотам рам візків щодо кузова, отримано підсистеми другого, чотирнадцятого й вісімнадцятого порядків. Ці рівняння збігаються з тими, що використано в [15] (там інакше пронумеровано узагальнені координати). У рівняння, що представляють інтерес із погляду стійкості його незбуреного руху, входять шістнадцять узагальнених координат  $q_i$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_3 = \theta; \quad q_4 = y; \quad q_5 = \psi; \quad q_{10} = (\theta_1 + \theta_2) / 2; \\ q_{12} = (y_1 + y_2) / 2; \quad q_{13} = (y_1 - y_2) / 2; \quad q_{14} = (\psi_1 + \psi_2) / 2; \\ q_{15} = (\psi_1 - \psi_2) / 2; \quad q_{16} = (y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22}) / 4; \\ q_{17} = (y_{11} + y_{12} - y_{21} - y_{22}) / 4; \quad q_{18} = (y_{11} - y_{12} + y_{21} - y_{22}) / 4a; \\ q_{19} = (y_{11} - y_{12} - y_{21} + y_{22}) / 4a; \quad q_{20} = (\psi_{11} + \psi_{12}) / 2; \\ q_{21} = (\psi_{11} - \psi_{21}) / 2; \quad q_{22} = (\psi_{12} + \psi_{22}) / 2; \\ q_{23} = (\psi_{12} - \psi_{22}) / 2. \end{array} \right.$$

При обраних узагальнених координатах рівняння розщеплюються на дві незалежні підсистеми:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{55}\ddot{q}_5 + \beta_{55}\dot{q}_5 + c_{55}q_5 + \beta_{513}\dot{q}_{13} + c_{513}q_{13} = 0; \\ a_{1313}\ddot{q}_{13} + \beta_{513}\dot{q}_5 + c_{513}q_5 + \beta_{1313}\dot{q}_{13} + c_{1313}q_{13} + c_{1317}q_{17} = 0; \\ a_{1515}\ddot{q}_{15} + c_{1515}q_{15} + c_{1519}q_{19} + c_{1521}q_{21} + c_{1323}q_{23} = 0; \\ a_{1717}\ddot{q}_{17} + c_{1317}q_{13} + c_{1717}q_{17} + h_{1717}\dot{q}_{17}v^{-1} + f_{1721}q_{21} + f_{1723}q_{23} = 0; \\ a_{1919}\ddot{q}_{19} + c_{1519}q_{15} + c_{1919}q_{19} + h_{1919}\dot{q}_{19}v^{-1} + f_{1921}q_{21} + f_{1923}q_{23} = 0; \\ a_{2121}\ddot{q}_{21} + c_{1521}q_{15} + c_{2121}q_{21} + h_{2121}\dot{q}_{21}v^{-1} + f_{2117}q_{17} + f_{2119}q_{19} = 0; \\ a_{2323}\ddot{q}_{23} + c_{1523}q_{15} + c_{2323}q_{23} + h_{2323}\dot{q}_{23}v^{-1} + f_{2317}q_{17} + f_{2319}q_{19} = 0. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_{33}\ddot{q}_3 + \beta_{33}\dot{q}_3 + c_{33}q_3 + \beta_{34}\dot{q}_4 + c_{34}q_4 + \beta_{310}\dot{q}_{10} + c_{310}q_{10} + \beta_{312}\dot{q}_{12} + \\
 + c_{312}q_{12} = 0; \\
 a_{44}\ddot{q}_4 + \beta_{34}\dot{q}_3 + c_{34}q_3 + \beta_{44}\dot{q}_4 + c_{44}q_4 + \beta_{412}\dot{q}_{12} + c_{412}q_{12} = 0; \\
 a_{1010}\ddot{q}_{10} + \beta_{103}\dot{q}_3 + c_{310}q_3 + \beta_{1010}\dot{q}_{10} + c_{1010}q_{10} = 0; \\
 a_{1212}\ddot{q}_{12} + \beta_{312}\dot{q}_3 + c_{312}q_3 + \beta_{412}\dot{q}_4 + c_{412}q_4 + \beta_{1212}\dot{q}_{12} + c_{1212}q_{12} + \\
 + \beta_{312}\dot{q}_{12} + c_{1216}q_{16} = 0; \\
 a_{1414}\ddot{q}_{14} + c_{1414}q_{14} + c_{1418}q_{18} + c_{1420}q_{20} + c_{1422}q_{22} = 0; \\
 a_{1616}\ddot{q}_{16} + c_{1216}q_{12} + c_{1616}q_{16} + h_{1616}v^{-1}\dot{q}_{16} + f_{1620}q_{20} + f_{1822}q_{22} = 0; \\
 a_{1818}\ddot{q}_{18} + c_{1418}q_{14} + c_{1818}q_{18} + h_{1818}v^{-1}\dot{q}_{18} + f_{1820}q_{20} + f_{1822}q_{22} = 0; \\
 a_{2020}\ddot{q}_{20} + c_{1420}q_{14} + c_{2020}q_{20} + h_{2020}v^{-1}\dot{q}_{20} + f_{2016}q_{16} + f_{2018}q_{18} = 0; \\
 a_{2222}\ddot{q}_{22} + c_{1422}q_{14} + c_{2222}q_{22} + h_{2222}v^{-1}\dot{q}_{22} + f_{2216}q_{16} + f_{2218}q_{18} = 0.
 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Значення коефіцієнтів цих систем рівнянь наведено в [15] (с. 167-168).

Для кожної з підсистем з матрицями 7-го й 9-го порядків було виконано розрахунки із знаходженням централізатора матриць (програма CENTER). І перший, і другий розрахунки для кожної з систем показали, що подальше спрощення систем є неможливим. Виходить, що для розглянутої математичної моделі вибір узагальнених координат, виконаний на інтуїтивному рівні, є найкращим. Новим фактом тут є доведення того, що подальше спрощення систем є неможливим.

У наступних підрозділах застосовано запропонований вище підхід у комбінації з використанням інформації щодо симетрії розрахункової схеми.

Було складено програму ALG [7, 8], що реалізує метод зведення матриць до блочно-трикутного вигляду. Текст програми ALG наведено в додатку Г.

Для перевірки програми було підготовлено тестовий приклад матриць 7-го порядку, що мають приблизно такий самий вигляд і такі самі порядки коефіцієнтів, що й у задачах з дослідження стійкості руху рейкових екіпажів. За допомогою програми ALG вдалося одержати результат лише при

розрахунках з подвійною точністю. Результат є позитивним: матриці приводяться до блочно-трикутного вигляду із блоками на головній діагоналі 6-го й 1-го порядків.

Далі було розглянуто математичну модель рейкового екіпажа (5.2), (5.3).

Для кожної з підсистем з матрицями 7-го й 9-го порядків було виконано розрахунки за програмою ALG. І перший і другий розрахунки для кожної з систем показали, що подальше спрощення систем є неможливим.

## **5.2. Поділ на підсистеми рівнянь обуреного руху восьмивісного вагона з несиметричним завантаженням**

При дослідженні стійкості руху восьмивісного напіввагона з несиметричним завантаженням беруться до уваги такі його координати (див. [15]):

$$y, \psi, \theta_{k1}, \theta_{k2}, \theta_{c1}, \theta_{c2}, \psi_{c1}, \psi_{c2}, y_{bi}, \psi_{bi}, \psi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

де  $y, \theta, \psi$  позначають відповідно бічний зсув і кути бічної хитавиці й виляння, індекси  $k1$  і  $k2$  відносяться до частин кузова,  $ci$  — до сполучних балок,  $bi$  — до бічних рам візків,  $i$  — до надресорних балок.

Оскільки центр ваги кузова є зміщеним, то відбиття вагона щодо поперечної центральної площини з відповідними відбиттями візків уже не будуть перетворенням симетрії. Першим твірним елементом  $g_1$  групи симетрії є відбиття першої сполучної балки з візками щодо площини п'ятникового перетину й одночасне відбиття візків щодо їхніх поперечних площин симетрії, другим — аналогічне відбиття  $g_2$  другої сполучної балки.

Перетворення  $g_1$  і  $g_2$  можна розглядати окремо. При першому перетворенні координати змінюються так:

$$\Psi_{c1} \rightarrow -\Psi_{c1}, \quad y_{61} \rightarrow y_{62}, \quad y_{62} \rightarrow y_{61}, \quad \Psi_{61} \rightarrow \Psi_{62}, \quad \Psi_{62} \rightarrow \Psi_{61}, \quad \Psi_1 \rightarrow \Psi_2, \quad \Psi_2 \rightarrow \Psi_1.$$

Інші координати не змінюються. Таким чином, матриця перетворення координат  $T(g_1)$  має вигляд:

$$T(g_1) = E_6 \dot{+} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{+} E_3 \times \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} E_2 \right],$$

де  $\dot{+}$  й  $\times$  — знаки прямих суми й добутку матриць,  $E_k$  — одинична матриця  $k$ -го порядку. Інваріантні підпростори зображень підгрупи  $G = \{g_1, e\}$  визначаються власними векторами матриці  $T(g_1)$ , тому в цьому випадку можна не прибїгати до загальної методики знаходження інваріантних підпросторів.

Власні вектори блоку  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  такі:  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Це відповідає

сумам і різницям координат  $y_{61}$  і  $y_{62}$ ,  $\Psi_{61}$  і  $\Psi_{62}$ ,  $\Psi_1$  і  $\Psi_2$ . Власному числу  $\lambda = -1$  відповідають різниці цих координат і координата  $\Psi_{c1}$ . Таким чином, рівняння для чотирьох координат виділяються в окрему підсистему. Рівняння для іншої сполучної балки також виділяються в окрему підсистему. Одержуємо такі множини узагальнених координат:

$$\Psi_{c1}, y_{61} - y_{62}, \Psi_{61} - \Psi_{62}, \Psi_1 - \Psi_2; \quad (5.4)$$

$$\Psi_{c2}, y_{63} - y_{64}, \Psi_{63} - \Psi_{64}, \Psi_3 - \Psi_4; \quad (5.5)$$

$$y, \psi, \theta_{k1}, \theta_{k2}, \theta_{c1}, \theta_{c2}, y_{b1} + y_{b2}, y_{b3} + y_{b4}, \psi_{b1} + \psi_{b2}, \psi_{b3} + \psi_{b4}, \psi_1 + \psi_2, \psi_3 + \psi_4. \quad (5.6)$$

Системи рівнянь, що відповідають першій і другій множинам координат, відрізняються одна від одної лише коефіцієнтами псевдоковзання. Тому можна враховувати лише одну з них — ту, коефіцієнт псевдоковзання якої є меншим. Для симетрично завантаженого вагона група симетрії ширше. Діючи за загальною методикою [16], з'ясуємо, що третій набір координат розбивається ще на дві частини:

$$y, \theta_{k1} + \theta_{k2}, \theta_{c1} + \theta_{c2}, y_{b1} + y_{b2} + y_{b3} + y_{b4}, \quad (5.6a)$$

$$\psi_{b1} + \psi_{b2} + \psi_{b3} + \psi_{b4}, \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4;$$

$$\psi, \theta_{k1} - \theta_{k2}, \theta_{c1} - \theta_{c2}, y_{b1} + y_{b2} - y_{b3} - y_{b4}, \quad (5.6b)$$

$$\psi_{b1} + \psi_{b2} - \psi_{b3} - \psi_{b4}, \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4.$$

Отже, при симетричному завантаженні замість системи рівнянь 40-го порядку одержуємо дві однакові підсистеми 8-го і дві підсистеми 12-го порядку.

При деяких спрощеннях розрахункова схема з симетричним навантаженням збігається з розрахунковою схемою, розглянутою в [9]. Рівняння для спрощеної розрахункової схеми розбиваються на такі самі підсистеми, причому подальший поділ на підсистеми вже є неможливим. Це впливає з того, що множина  $\Lambda$  для кожної з підсистем складається з матриць, кратних одиничної.

### 5.3. Вибір узагальнених координат локомотива із трьома візками з урахуванням симетрії його розрахункової схеми

Розглянемо можливість визначення узагальнених координат дванадцятивісного локомотива типу ВЛ15 або ВЛ65, відповідних до симетрії їх розрахункових схем [5]. Зазначений локомотив має дві шостивісні секції, у кожній з яких кузов опирається на три двовісні візки (рис. 5.2). Перший й останній візки кожної секції мають ідентичну конструкцію ресорного підвісу, у якій відновлюючі сили при горизонтальному поперечному переміщенні візків щодо кузова забезпечуються колісковим ресорним підвісом, що також створюють відновлюючий момент при вилянні (повороти в горизонтальній площині) візків щодо кузова. Для того, щоб забезпечити значні горизонтальні переміщення середніх візків щодо кузова при проходженні кривих, кузов опирається на середні візки за допомогою хитних опор із пружними елементами.



Рис. 5.2. Макет локомотива із трьома візками

Розрахункову схему однієї секції локомотива зображено на рис. 5.3. Спочатку досліджуємо розрахункову схему без урахування сил псевдоковзання, а потім окремо проаналізуємо їхній вплив. Якщо не враховувати сили псевдоковзання, то перетвореннями симетрії будуть

відбиття вагона щодо площин  $Oxz$  і  $Oyz$ , поворот на  $180^\circ$  навколо осі  $Oz$ , відбиття візків щодо їхніх поперечних площин симетрії, а також різні комбінації цих перетворень. Якщо беруться до уваги пружні елементи, що перешкоджають поворотам візків у горизонтальній площині щодо кузова, то відбиття візків уже не будуть перетвореннями симетрії.

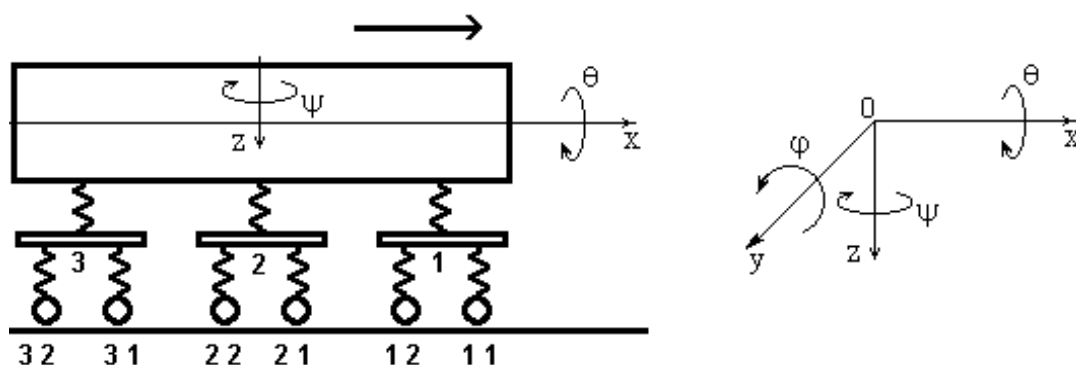


Рис. 5.3. Розрахункова схема локомотива із трьома візками

Початкові узагальнені координати локомотива, що відповідають прийнятій розрахунковій схемі, такі:

$$x, y, z, \varphi, \theta, \psi, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, \\ y_{31}, y_{32}, \psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{21}, \psi_{22}, \psi_{31}, \psi_{32},$$

де  $x, y, z, \theta, \varphi, \psi$  — переміщення й кути повороту кузова,  $y_i, z_i, \varphi_i, \theta_i, \psi_i$  — відповідні переміщення  $i$ -го візка ( $i = 1, 2, 3$ ),  $y_{ij}$  і  $\psi_{ij}$  — відповідно бічний зсув і вилання  $j$ -ї колісної пари  $i$ -го візка ( $j = 1, 2, i = 1, 2, 3$ ). Сили псевдоковзання, що діють на колісну пару, мають вигляд:

$$Q_{y_{ij}} = -2Fv^{-1} \dot{y}_{ij} + 2F\psi_{ij}, \quad Q_{\psi_{ij}} = -2Fs^2v^{-1} \dot{\psi}_{ij} - 2F\mu sr^{-1} y_{ij},$$

де  $v$  — швидкість руху;  $F$  — коефіцієнт псевдоковзання,  $2s$  — відстань між кругами катання коліс,  $\mu$  — конічність поверхні кочення колеса. Тут використано лінеаризовану (відповідно до теореми А. М. Ляпунова про стійкість за першим наближенням) залежність зміни радіуса колеса від його поперечного переміщення щодо рейки й лінійну теорію крипу.

Обраним узагальненим координатам відповідає система диференціальних рівнянь 66-го порядку. Оскільки досліджувана система є симетричною, використовуємо теорію груп (як формалізований спосіб урахування симетрії) і знаходимо нові узагальнені координати.

Сили псевдоковзання є не інваріантними відносно тих з, наведених вище перетворень, при яких змінюється орієнтація візків за напрямком руху, але інваріантними відносно інших перетворень. Наприклад, при відбитті першого візка відносно його поперечної площини симетрії координати, що входять у вираз узагальнених сил, змінюються так:

$$y'_{11} = y_{12}, y'_{12} = y_{11}, \psi'_{11} = -\psi_{12}, \psi'_{12} = -\psi_{11},$$

тут штрихом позначено нові координати.

Відповідні зміни узагальнених сил такі:

$$Q'_{y_{11}} = -2Fv^{-1} \dot{y}_{12} - 2F\psi_{12} \neq Q_{y_{12}},$$

$$Q'_{y_{12}} = -2Fv^{-1} \dot{y}_{11} - 2F\psi_{11} \neq Q_{y_{11}},$$

$$Q'_{\psi_{11}} = 2Fsv^{-1} \dot{\psi}_{12} - 2F\mu sr^{-1} y_{12} \neq -Q_{\psi_{12}},$$

$$Q'_{\psi_{12}} = 2Fsv^{-1} \dot{\psi}_{11} - 2F\mu sr^{-1} y_{11} \neq -Q_{\psi_{11}}.$$

Таким чином, у результаті залишаються лише ті перетворення, при яких не змінюється орієнтація візків за напрямком руху, а саме (група  $C_{2h}$ ):



$g_1$  — дзеркальне відбиття всієї системи відносно площини  $Oyz$  і одночасне відбиття візків відносно їхніх поперечних площин симетрії;

$g_2$  — дзеркальне відбиття відносно площини  $Oxz$ ;

$g_3$  — поворот усієї системи на  $180^\circ$  відносно осі  $Oz$  і одночасне відбиття візків відносно їхніх поперечних площин симетрії;

$g_4$  — тотожне перетворення.

За наявності додаткових пружних елементів залишаються лише перетворення  $g_2$  і  $g_4$ .

Отримана група має таку таблицю множення:

	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$
$e$	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$
$g_1$	$g_1$	$e$	$g_3$	$g_2$
$g_2$	$g_2$	$g_3$	$e$	$g_1$
$g_3$	$g_3$	$g_2$	$g_1$	$e$

( $g_4 = e$ )

Незвідні зображення  $\tau_j(g_i)$  цієї групи такі [16]:

	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$
$\tau_1$	1	1	1	1
$\tau_2$	1	-1	1	-1
$\tau_3$	1	1	-1	-1
$\tau_4$	1	-1	-1	1

При дзеркальній відбитті відносно площини  $Oyz$  і відбитті візків координати змінюються так:

$$x' = -x, y' = y, z' = z, \varphi' = -\varphi, \theta' = \theta, \psi' = -\psi, y'_1 = y_3, y'_2 = y_2, y'_3 = y_1,$$



$E_3$ :  $y, \theta, (y_1 + y_3) / 2, y_2, (\theta_1 + \theta_3) / 2, \theta_2, (\psi_1 + \psi_3) / 2, \psi_2, (y_{11} + y_{31}) / 2, (y_{12} + y_{32}) / 2, y_{21}, y_{22}, (\psi_{11} + \psi_{31}) / 2, (\psi_{12} + \psi_{32}) / 2, \psi_{21}, \psi_{22}$ ;

$E_4$ :  $\psi, (y_1 - y_3) / 2, (\theta_1 - \theta_3) / 2, (\psi_1 - \psi_3) / 2, (y_{11} - y_{31}) / 2, (y_{12} - y_{32}) / 2, (\psi_{11} - \psi_{31}) / 2, (\psi_{12} - \psi_{32}) / 2$ .

Кожному з цих наборів відповідає окрема система диференціальних рівнянь.

За наявності пружних елементів, що перешкоджають поворотам візків у горизонтальній площині відносно кузова, рівняння руху локомотива розділяються лише на дві підсистеми, перша з яких описується узагальненими координатами із множин  $E_1$  і  $E_2$  (або їх комбінаціями), а друга — іншими узагальненими координатами.

Таким чином, систему диференціальних рівнянь 66-го порядку розділено на підсистеми 10-го, 8-го, 32-го й 16-го порядків (у другому випадку — 18-го й 48-го порядків).

За допомогою методу комутуючої матриці доведено, що подальше спрощення отриманих підсистем є неможливим.

#### 5.4. Аналіз форм коливань восьмивісної цистерни

Розглянемо восьмивісну цистерну, розрахункову схему якої представлено у вигляді механічної системи з 23-х твердих тіл: котла з «замороженою» рідиною, двох сполучних балок, чотирьох надресорних балок, восьми бічних рам і восьми колісних пар [10]. З урахуванням зв'язків, накладених на систему, число ступенів вільності дорівнює 27, вектор  $\mathbf{x}$  узагальнених координат має вигляд

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{27})^T. \quad (5.7)$$

У системі діють такі сили псевдоковзання [10]:

$$\begin{aligned} Q_i &= f_1 x_{i+12} - h_1 \dot{x}_i / v & (i = 12, 15), \\ Q_i &= -h_2 \dot{x}_i / v & (i = 19, 23), \\ Q_i &= -f_2 x_{i-12} - h_3 \dot{x}_i / v & (i = 24, 27), \end{aligned} \quad (5.8)$$

де  $v$  — швидкість руху;  $f_i$  й  $h_i$  — деякі коефіцієнти [11]. У сили псевдоковзання входять неконсервативні позиційні й дисипативні складові [11].

Для спрощення розв'язання задачі зробимо лінійне перетворення координат так, щоб система лінійних диференціальних рівнянь, що описує рух восьмивісної цистерни, розділилася на підсистеми [11]. Згрупувавши зв'язані між собою рівняння, одержимо дві системи четвертого порядку, одну систему двадцять другого й три — восьмого порядку. Перші дві системи описують загасаючі коливання підскакування й галопування котла цистерни й галопування сполучних балок.

Найбільший інтерес при розв'язанні питання про стійкість незбуреного руху становлять система двадцять другого порядку й три системи восьмого порядку. Визначення коефіцієнтів розподілу амплітуд початкової системи в цьому випадку полягає в знаходженні власних векторів матриці коефіцієнтів (4.7). Визначивши ці вектори, легко одержати коефіцієнти розподілу амплітуд вигляду (4.11).

При розв'язанні повної проблеми власних значень матриць використання програми, що реалізує  $QR$ -алгоритм [17], викликало переповнення розрядної сітки ЕОМ. Це було обумовлено великим розкидом параметрів системи. Застосування програми *AEGID*, що реалізує  $QR$ -алгоритм із подвійною точністю [146], дозволило уникнути переповнення й зробити обчислення до кінця. Однак перевірка похибки за формулою (4.16)

показала, що ряд власних векторів було обчислено зі значною похибкою (значення похибки досягало 1). Реалізація методу зворотних ітерацій [17] з подвійною точністю дозволила обчислити ці вектори з похибкою, що дорівнює  $10^{-12}$ . Подальші розрахунки проводилися за таким алгоритмом. Для власних векторів підсистем, отриманих за допомогою програми *AEGID*, обчислюється похибка. Ті з них, для яких похибка перевищує величину  $10^{-10}$ , перераховуються по методу зворотних ітерацій. Потім по власних векторах матриць підсистем перебувають власні вектори початкової матриці, а по них і коефіцієнти розподілу амплітуд.

Коефіцієнти розподілу амплітуд коливань восьмивісної цистерни [2, 3, 4] визначалися при значеннях швидкості руху 10, 20, 30  $\text{мс}^{-1}$ . Результати наведено в табл. 5.1. Оскільки швидко загасаючі розв'язки практично не впливають на стійкість руху системи [11], для кожного значення швидкості вибиралися по три власні числа з найбільшими дійсними частинами (у випадку двох спряжених власних чисел вибиралося одне з них). Із власних векторів, що відповідають цим трьом власним числам, отримано коефіцієнти розподілу амплітуд. Оскільки дослідження поведінки елементів системи є наближеним, то в таблиці наведено лише координати, для яких значення коефіцієнтів розподілу амплітуд перевищують 0,05.

Таблиця 5.1

Коефіцієнти розподілу амплітуд

$v, \text{мс}^{-1}$	10			20			30		
$\text{Re } \lambda$	0,003	-0,0209	-0,0216	0,190	0,00157	-0,0038	0,698	0,111	0,0925
$\text{Im } \lambda$	2,37	2,37	2,37	4,72	4,74	4,74	6,93	7,10	7,11
$x_4$	0,422			0,212			0,44		
$\dot{x}_4$	1,0			1,0			1,0		
$x_5$		0,07							
$\dot{x}_5$		0,166			0,166			0,166	

$x_6, x_7$			0,264			0,132			0,088
$\dot{x}_6, \dot{x}_7$			0,625			0,625			0,625
$x_{12} - x_{15}$	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,05			
$\dot{x}_{12} - \dot{x}_{15}$	0,237	0,237	0,237	0,238	0,237	0,237	0,242	0,237	0,237
$x_{20} - x_{23}$	0,1	0,1	0,1	0,05					
$\dot{x}_{20} - \dot{x}_{23}$	0,237	0,237	0,237	0,238	0,237	0,237	0,241	0,240	0,237
$x_{24} - x_{27}$	0,422	0,422	0,422	0,212	0,211	0,211	0,143	0,141	0,141
$\dot{x}_{24} - \dot{x}_{27}$	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

З таблиці видно, що домінуючими (як і слід було сподіватися) є коливання в горизонтальній площині. Найбільші амплітуди коливань відповідають бічному зсуву, казана цистерни (координата  $x_4$ ) й боковин (координати  $x_{24}, x_{25}, x_{26}, x_{27}$ ), а також вилянню казана цистерни (координата  $x_5$ ), надресорних балок (координати  $x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}$ ) і боковин (координати  $x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$ ). З ростом швидкості коефіцієнти розподілу амплітуд, відповідні до переміщень, монотонно убувають. Помітимо також, що зі збільшенням швидкості збільшується частота нижчих тонів коливань.

### 5.5. Оптимізація параметрів електровоза ВЛ-80 з погляду стійкості руху

Якщо при оптимізації параметрів електровоза ВЛ-80 не використовувати яружні методи, то функція  $L(y)$  за перші 26 кроків оптимізації змінюється від  $L(y^{(0)}) = 0,25$  до  $L(y^{(26)}) = -1,75$ , а за інші 35 кроків — зменшується до  $-1,8$  (рис. 5.4). Це пояснюється тим, що в другому випадку максимальні значення по черзі приймали  $\text{Re}\lambda_1$  і  $\text{Re}\lambda_2$ , а градієнти, що відповідають  $\text{Re}\lambda_1$  і  $\text{Re}\lambda_3$ , є спрямованими в різні боки.

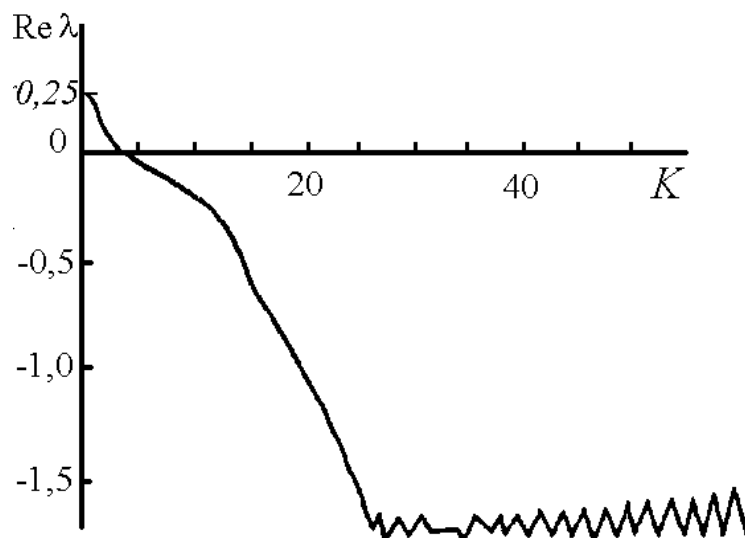


Рис. 5.4. Хід оптимізації параметрів (яружні методи не використовуються)

Тому, при виконанні умови  $\text{Re } \lambda_1 \approx \text{Re } \lambda_2$  враховуємо вплив другого власного числа або другої пари комплексно спряжених чисел (підрозділ 4.3).

На рис. 5.5. наведено результати оптимізації з погляду стійкості руху параметрів  $k_4$  і  $\beta_2$  електровоза ВЛ-80 ( $k_4$  — твердість пружних елементів повідкової букси в поздовжньому напрямку;  $\beta_2$  — коефіцієнт в'язкого тертя демпферів, установлених у горизонтальному поперечному напрямку між кузовом і візком). Тут же зображено лінії рівня цільової функції і дно «яру» (крива 3). Ламана 1 показує хід процесу оптимізації з використанням розглянутого вище «яружного» способу, а ламана 2 — градієнтного методу (цифри зі штрихами — номери кроків наближення).

## 5.6. Висновки до розділу 5

Виконано розрахунки з декомпозиції рівнянь руху ряду складних механічних систем за допомогою методів теорії груп. Розроблено зручний для розрахунків алгоритм виконання обчислення на ПЕОМ.

Установлено, що для застосування методів теорії груп при наявності позиційних неконсервативних сил необхідно вести міркування не на «мові»

квадратичних форм (як це роблять зазвичай), а на «мові» матриць. Позиційні неконсервативні сили, як правило, звужують групу симетрії, що допускається консервативними силами.

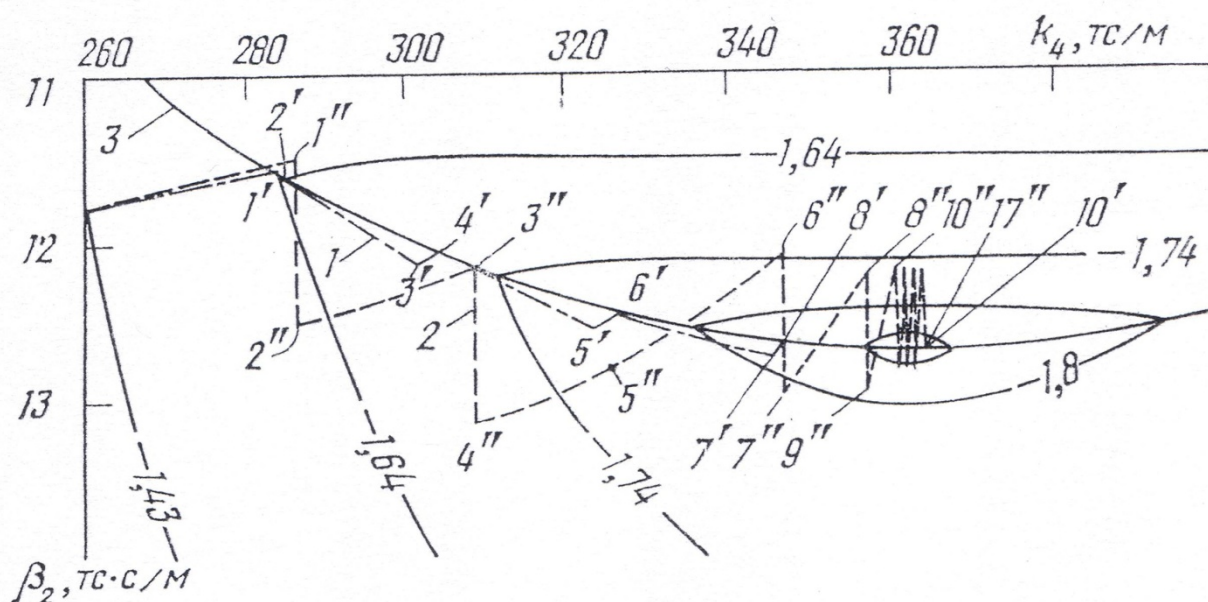


Рис. 5.5. Порівняння методів оптимізації

Далі використовуються алгебраїчні методи, спрямовані на одержання максимально можливої кількості підсистем.

Наведено також результати розрахунків з використанням розроблених способів зведення рівнянь руху суттєво неконсервативної коливальної системи до головних фазових координат й аналізу форм коливань такої системи.

### 5.7. Список використаних джерел до розділу 5

1. Базилевич Ю. Н. Оптимизация параметров рельсовых экипажей по различным целевым функциям / Ю. Н. Базилевич, Н. А. Радченко // Нагруженность, прочность, устойчивость движения механических систем. Киев: Наук. думка, 1980. — С. 48—52



2. Базилевич Ю. Н. О боковых колебаниях восьмиосных экипажей / Ю. Н. Базилевич, Ю. В. Демин, М. Б. Кельрих и др. // В кн.: Конструкторско-технологические исследования в области создания металлургического, горнорудного, подъёмно-транспортного оборудования и цистерностроения. Краматорск: НИИПТмаш., 1985. — С. 90—100.
3. Базилевич Ю. Н. Распределение амплитуд колебаний многомассовой существенно неконсервативной системы / Ю. Н. Базилевич, Ю. В. Демин, Л. М. Коротенко // Колебания и прочность механических систем. — Киев: Наук. Думка, 1986. С. 81—87.
4. Базилевич Ю. Н. Моделирование боковых колебаний четырехосной цистерны с дополнительными упругодиссипативными связями / Ю. Н. Базилевич, Ю. П. Бороненко, Ю. В. Демин и др. // Проблемы динамики, прочности и устойчивости движения железнодорожного подвижного состава. — Днепропетровск: Изд-во ДИИТ, 1986. — С. 104—111.
5. Базилевич Ю. М. Вибір узагальнених координат локомотива з трьома візками з урахуванням симетрії його розрахункової схеми / Ю. М. Базилевич, М. Л. Коротенко // Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки, Біологічні науки. №1, 2000. — С. 13—16.
6. Базилевич Ю. Н. Оптимизация параметров рельсовых экипажей с точки зрения устойчивости движения / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, Н. А. Радченко // Всесоюзная конференция по оптимальному управлению в механических системах. Тезисы докладов. Казань: изд. КАИ, 1977. — С. 9—10.
7. Базилевич Ю. Н. Численное решение задач иерархической декомпозиции линейных математических моделей / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, И. В. Швец // Міждержавна науково-методична конференція “Комп'ютерне моделювання”, Дніпродзержинськ: ДзДТУ, 2001. — С. 45—46.

8. Базилевич Ю. Н. Решение задачи иерархической декомпозиции линейных математических моделей механических систем / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, И. В. Швец // Техническая механика. — 2003, №1. — С. 135—140.
9. Базилевич Ю. Н. Декомпозиция уравнений движения многомассовой механической системы с позиционными неконсервативными силами: автореф. дис. ... канд. физ.-мат наук: спец. 01.02.01 Теоретическая механика / Ю. Н. Базилевич. — Л.: ЛПИ, 1977. — 20 с.
10. Богомаз Г. И. Математическое моделирование колебаний восьмиосной железнодорожной цистерны, транспортирующей жидкие грузы / Г. И. Богомаз, Ю. В. Дёмин, А. Н. Комаренко и др. — Днепропетровск, 1983. — 39 с. — Деп. в ВИНТИ, № 4995/83.
11. Демин Ю. В. Автоколебания и устойчивость движения рельсовых экипажей / Ю. В. Демин, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко и др. — Киев: Наук. думка, 1984. — 160 с.
12. Коротенко М. Л. О работах В. А. Лазаряна в области устойчивости движения рельсовых экипажей и их развитии / М. Л. Коротенко, Ю. Н. Базилевич // // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. — Вип. 30. — Д: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім акад. В. Лазаряна, 2009 — С. 144—149.
13. Лазарян В. А. Динамика вагонов / В. А. Лазарян. — М.: Транспорт, 1964. — 256 с.
14. Лазарян В. А. Динамика транспортных средств: Избр. тр. / В. А. Лазарян. — Киев: Наук. думка, 1985. — 528 с.
15. Лазарян В. А. Устойчивость движения рельсовых экипажей / В. А. Лазарян, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко. — Киев: Наук. думка, 1972. — 199 с.

16. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике: Курс лекций для физиков-теоретиков. Изд. 2 / Г. Я. Любарский. — М.: URSS, 2016 — 360 с.
17. Уилкинсон Дж. Х. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра / Дж. Х. Уилкинсон, С. Райнш. — М.: Машиностроение, 1976. — 389 с.
18. Carter F. W. The running of locomotives with reference to their tendency to derail / F. W. Carter // Selec. Eng. Pap. — / Inst. Civil Eng. — 1930. — № 91. — P. 3—25.
19. Kalker J. J. Simplified theory of rolling contact / J. J. Kalker // Delft Progr. Rep. C. — 1973. — 1. — P. 1—10.→

## РОЗДІЛ 6

### РОЗЩЕПЛЕННЯ РІВНЯНЬ РУХУ СИСТЕМИ ВИСОКОШВИДКІСНОГО ТРАНСПОРТУ НА ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПІДВІШУВАННІ

#### 6.1. Поїзд на магнітнім підвішуванні

Поїзд на магнітнім підвішуванні, магнітоплан або маглев (від англ. *magnetic levitation* — «магнітна левітація»), — це поїзд, що утримується над полотном дороги, рухається і керується силою електромагнітного поля. Такий состав, на відміну від традиційних поїздів, у процесі руху не торкається поверхні рейки. Через те що між поїздом і поверхнею полотна існує зазор, тертя між ними виключається, і єдиною гальмуючою силою є аеродинамічний опір [5].

Найбільшого поширення одержали два варіанти магнітного підвісу. Перший варіант — електромагнітний підвіс — є заснованим на притягаючих зусиллях, що, виникають між установленими на екіпажі електромагнітами й феромагнітною рейкою, покладеною вздовж траси (рис. 6.1). При цьому піднімальна сила є обернено пропорційною квадрату повітряного зазору, який зазвичай становить 10—20 мм. Для подолання принципової нестійкості електромагнітного підвісу використовується система безперервного керування струмами в кожному електромагніті. За таким самим принципом працюють напрямні магніти, призначені для стабілізації руху вагона в горизонтальній площині.

Другий варіант — електродинамічний підвіс — заснований на зусиллях відштовхування між джерелом магнітного поля на борту екіпажа і провідником, покладеним уздовж траси, при їхньому взаємному русі. У процесі руху джерела магнітного поля відносно провідної пластини в останній виникають вихрові струми. Згідно з законом Ленца, магнітне поле

цих струмів є спрямованим протилежно зовнішньому магнітному полю, у результаті чого виникає сила відштовхування. Висота левітації (повітряний зазор) досягає величини 100—250 мм, що знижує вимоги до шляхової структури.

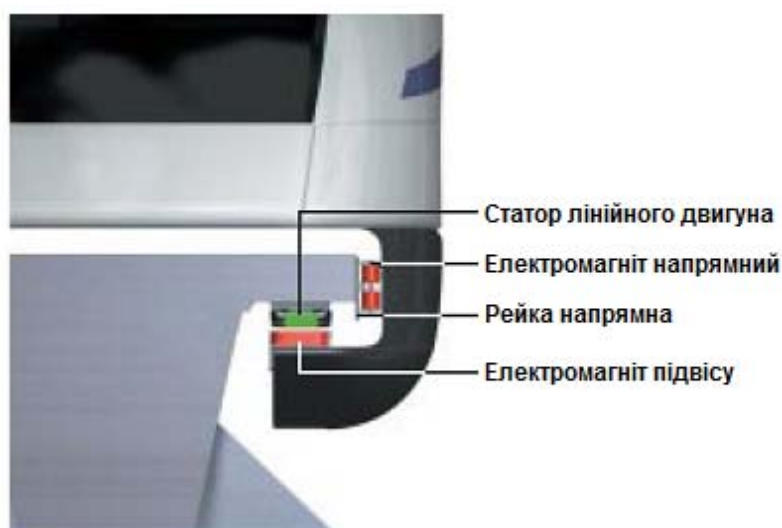


Рис. 6.1. Схема розташування магнітів і рейок (електромагнітний підвіс)

Сама ідея такого транспорту не є новою, економічні й технічні обмеження не дозволили їй розвернутися повною мірою: для публічного використання технологія втілювалася всього кілька раз. В 1970-80 роки розробками транспорту на магнітнім підвішуванні займалися в США, Великобританії, СРСР, Німеччини, Японії. Зокрема фірми «Сименс» і «Крупп» одержували потужну фінансову підтримку від уряду Німеччини. Там було побудовано в 1984 році експериментальну систему Transrapid на електромагнітнім підвішуванні, що працювала донедавна. Загальна довжина: 31,5 км. Максимальна швидкість руху — 501 км/год.

У теперішній час найбільш активні розробки транспорту на магнітнім підвішуванні ведуть Німеччина, Японія й Китай. У Китаї з 2002 року вже працює високошвидкісна (450 км/год.) траса на електромагнітнім підвішуванні від шанхайського аеропорту Пудун до Шанхая. Довжина траси:

30 км. Її побудовано німецькою компанією Transrapid — дочірнім підприємством Siemens AG і ThyssenKrupp. У майбутньому заплановано продовжити дорогу до міста Ханчжоу, після чого її загальна довжина повинна скласти 176 км.

У Японії 21 квітня 2015 року на експериментальній ділянці довжиною 42,8 кілометра поставлено рекорд швидкості для поїздів на магнітнім підвішуванні — 603 кілометра в годину.

Планується, що поїзд на електродинамічним підвішуванні зв'яже Токіо і Нагою в 2027 році. Відстань між цими містами, а це близько 350 кілометрів, він зможе долати за 40 хвилин. Лінію планується продовжити до міста Осака до 2045 року.

## **6.2. Розщеплення рівнянь руху екіпажа на електромагнітнім підвішуванні**

Розглянуто декомпозицію рівнянь руху системи горизонтальної стабілізації екіпажа високошвидкісного наземного транспорту (ВШНТ) із чотирма візками (рис. 6.2). При дослідженні стійкості руху цього екіпажа в горизонтальній площині беруться до уваги такі узагальнені координати [2]:

$$\psi, \gamma, \theta, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{44}.$$

Координати без індексу позначають зсуви й кути повороту кузова, з одним індексом — зсуву й кути повороту відповідних візків,  $\gamma_{kj}$  — бічний зсув  $j$ -го магніту, укріпленого на  $k$ -тому візку.

Крім того, в диференціальні рівняння входять величини струмів в електромагнітах  $i_{kj}$ . Це пов'язано з тим, що величини струмів в електромагнітах не можуть змінюватися миттєво. «Інерція» виникає через індуктивність електромагнітів.

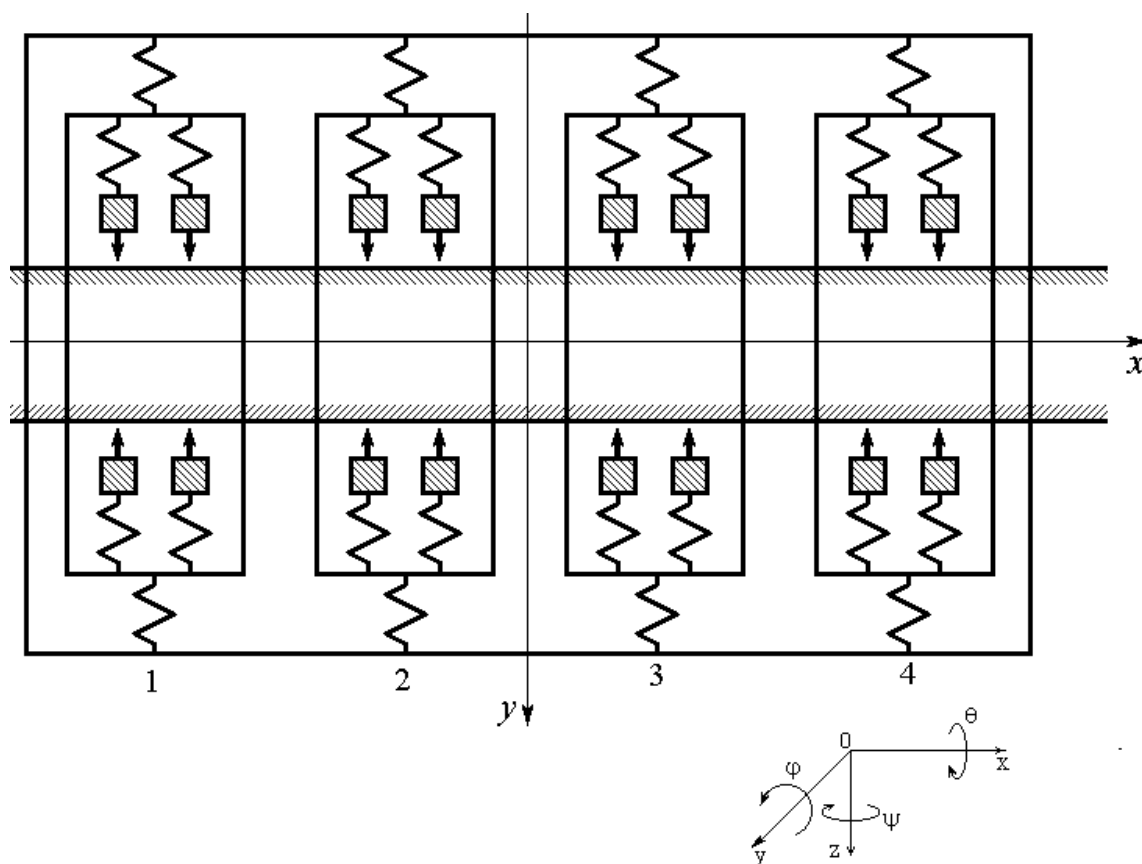


Рис. 6.2. Розрахункова схема екіпажа високошвидкісного наземного транспорту (ВШНТ)

Взаємозв'язок між механічними й електричними величинами такий. Притягаюча сила електромагніту, дорівнює:

$$P = C_m \frac{i_{\text{п}}^2}{\delta_{\text{п}}^2},$$

де  $C_m$  — постійна електромагніту,  $i_{\text{п}}$  — струм,  $\delta_{\text{п}}$  — зазор. При лінеаризації ця залежність замінюється такою:  $P = b_1 + b_2 i - b_3 \delta$ , де

$$b_1 = C_m \frac{i_0^2}{\delta_0^2}, \quad b_2 = 2C_m \frac{i_0}{\delta_0^2}, \quad b_3 = C_m \frac{i_0^2}{\delta_0^3}, \quad i_0 \quad \text{і} \quad \delta_0 \quad \text{—} \quad \text{задані значення}$$

струму й зазору,  $i$  і  $\delta$  — динамічні добавки величин струму й зазору. Система керування подає напругу на електромагніт залежно від величини зазору, швидкості і прискорення зміни величини зазору:

$$U = k_1\delta + k_2\dot{\delta} + k_3\ddot{\delta},$$

де  $U$  — динамічна добавка величини напруги;  $k_1, k_2, k_3$  — коефіцієнти системи автоматичного керування зазором між електромагнітами й шляховою структурою.

Величина струму змінюється у відповідності з рівнянням:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U,$$

де  $L$  і  $R$  — індуктивність і опір обмоток електромагніту.

Система рівнянь має 78-й порядок.

Симетрія екіпажа ВШНТ проявляється в тому, що його розрахункова схема залишається незмінною при таких перетвореннях:  $g_1$  — відбиття всієї системи відносно вертикальної поперечної площини  $Oyz$ ;  $g_2$  — відбиття відносно поздовжньої площини  $Oxz$ ;  $g_3$  — поворот на  $180^\circ$  навколо осі  $Oz$ ;  $g_4$  — тотожне перетворення. Ці перетворення утворюють групу  $G$  симетрії екіпажа ВШНТ.

Матриці перетворення узагальнених координат, відповідні до таких перетворень симетрії, мають такий вигляд:

$$T(g_1) = \text{diag} \left( -1, 1, 1, -M, M, M, M \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right),$$



$$T(g_2) = \text{diag} \left( -1, -1, -1, -E_4, -E_4, -E_4 - E_4 \dot{\times} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$T(g_3) = \text{diag} (1, -1, -1, M, -M, -M, -M \dot{\times} M),$$

$$T(g_4) = E_{31},$$

де  $M = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\dot{\times}$  — знак прямого добутку матриць;  $E_m$  — одинична

матриця порядку  $m$ .

Струми  $i_{kj}$  перетворюються так само, як і бічні переміщення магнітів  $y_{kj}$ .

Група  $G$  збігається з групою симетрії прямокутника  $C_{2h}$  (див. підрозділ 5.3). За допомогою програми GROUPS (підрозділ 2.8) було обчислено проектори на інваріантні підпростори, відповідні незвідним зображенням цієї групи. З лінійно незалежних стовпців всіх цих проекторів складаємо матрицю переходу до нових узагальнених координат.

У результаті розрахунків одержуємо, що система рівнянь 78-го порядку розпадається на чотири підсистеми, що мають порядки 12, 12, 28 і 26.

Новими змінними цих підсистем є такі величини:

$$a) \quad q_1 = \frac{1}{4} (y_{11} - y_{12} + y_{43} - y_{44}),$$

$$q_2 = \frac{1}{4} (y_{13} - y_{14} + y_{41} - y_{42}),$$

$$q_3 = \frac{1}{4} (y_{21} - y_{22} + y_{33} - y_{34}),$$

$$q_4 = \frac{1}{4} (y_{23} - y_{24} + y_{31} - y_{32}),$$

$$s_1 = \frac{1}{4} (i_{11} - i_{12} + i_{43} - i_{44}),$$

$$s_2 = \frac{1}{4} (i_{13} - i_{14} + i_{41} - i_{42}),$$

$$\begin{aligned}
s_3 &= \frac{1}{4} (i_{21} - i_{22} + i_{33} - i_{34}), & s_4 &= \frac{1}{4} (i_{23} - i_{24} + i_{31} - i_{32}), \\
\text{б) } q_5 &= \frac{1}{4} (y_{11} - y_{12} - y_{43} + y_{44}), & q_6 &= \frac{1}{4} (y_{13} - y_{14} - y_{41} + y_{42}), \\
q_7 &= \frac{1}{4} (y_{21} - y_{22} - y_{33} + y_{34}), & q_8 &= \frac{1}{4} (y_{23} - y_{24} - y_{31} + y_{32}), \\
s_5 &= \frac{1}{4} (i_{11} - i_{12} - i_{43} + i_{44}), & s_6 &= \frac{1}{4} (i_{13} - i_{14} - i_{41} + i_{42}), \\
s_7 &= \frac{1}{4} (i_{21} - i_{22} - i_{33} + i_{34}), & s_8 &= \frac{1}{4} (i_{23} - i_{24} - i_{31} + i_{32}), \\
\text{в) } q_9 &= y, & q_{10} &= \theta, & q_{11} &= \frac{1}{2} (\psi_1 - \psi_4), & q_{12} &= \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_3), \\
q_{13} &= \frac{1}{2} (y_1 + y_4), & q_{14} &= \frac{1}{2} (y_2 + y_3), & q_{15} &= \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_4), & q_{16} &= (\theta_2 + \theta_3), \\
q_{17} &= \frac{1}{4} (y_{11} + y_{12} + y_{43} + y_{44}), & q_{18} &= \frac{1}{4} (y_{13} + y_{14} + y_{41} + y_{42}), \\
q_{19} &= \frac{1}{4} (y_{21} + y_{22} + y_{33} + y_{34}), & q_{20} &= \frac{1}{4} (y_{23} + y_{24} + y_{31} + y_{32}), \\
s_9 &= \frac{1}{4} (i_{11} + i_{12} + i_{43} + i_{44}), & s_{10} &= \frac{1}{4} (i_{13} + i_{14} + i_{41} + i_{42}), \\
s_{11} &= \frac{1}{4} (i_{21} + i_{22} + i_{33} + i_{34}), & s_{12} &= \frac{1}{4} (i_{23} + i_{24} + i_{31} + i_{32}), \\
\text{г) } q_{21} &= \psi, & q_{22} &= \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_4), & q_{23} &= \frac{1}{2} (\psi_2 + \psi_3), & q_{24} &= \frac{1}{2} (y_1 - y_4), \\
q_{25} &= \frac{1}{2} (y_2 - y_3), & q_{26} &= \frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_4), & q_{27} &= \frac{1}{4} (\theta_2 - \theta_3), \\
q_{28} &= \frac{1}{4} (y_{11} + y_{12} - y_{43} - y_{44}), & q_{29} &= \frac{1}{4} (y_{13} + y_{14} - y_{41} - y_{42}), \\
q_{30} &= \frac{1}{4} (y_{21} + y_{22} - y_{33} - y_{34}), & q_{31} &= \frac{1}{4} (y_{23} + y_{24} - y_{31} - y_{32}), \\
s_{13} &= \frac{1}{4} (i_{11} + i_{12} - i_{43} - i_{44}), & s_{14} &= \frac{1}{4} (i_{13} + i_{14} - i_{41} - i_{42}),
\end{aligned}$$

$$s_{15} = \frac{1}{4} (i_{21} + i_{22} - i_{33} - i_{44}),$$

$$s_{16} = \frac{1}{4} (i_{23} + i_{24} - i_{31} - i_{32}).$$

Кожному набору змінних відповідає окрема система рівнянь. На відміну від задач, розглянутих у розділі 5, тут подальше розщеплення підсистем є можливим.

### 6.3. Дослідження форм коливань шляхової структури ВШНТ

Розглянуто форми коливань шляхової структури, призначеної для транспортної системи на електромагнітнім підвішуванні. У випадку, коли шлях моделюється у вигляді скінченної балки на твердих опорах, форми коливань визначаються за допомогою власних векторів відповідної матриці.

Розглянуто різні варіанти конструкції шляху й досліджено характеристики як нескінченних, так і скінченних балок із числом опор  $n = 6$  і  $n = 30$ .

Результати дослідження прогинів нескінченної балки представлено у вигляді функції Гріна  $G(x,s)$ , тобто вираз прогину балки в точці  $x$  при дії в точці  $s$  одиничної сили. Для її складання розглянуто спочатку випадок, коли сила діє на ділянці  $[0, l]$ .

Позначимо згинальні моменти над опорами через  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{-1}, M_{-2}, \dots$ . Будемо користуватися рівняннями п'яти моментів [4], що мають у цьому випадку вигляд

$$\alpha M_k + \eta M_{k+1} + \gamma M_{k+2} + \eta M_{k+3} + \alpha M_{k+4} = d_k \quad (k \in Z), \quad (6.1)$$

де  $a = \frac{1}{kl^2}$ ;  $\rho = \frac{l}{6EJ}$ ;  $\eta = \rho - 4\alpha$ ;  $\gamma = 6\alpha + 4\rho$ ;  $EJ$  — твердість балки;  $K$  —

пружність опор;  $d_{-3} = -\alpha(l - c)$ ;  $d_{-2} = -\frac{c\rho}{l^2}(l - c)(2l - c) - \alpha(3c - 2l)$ ;

$d_{-1} = -\frac{c\rho}{l^2}(l^2 - c^2) - \alpha(l - 3c)$ ;  $d_0 = -\alpha c$ ;  $d_v = 0$  при  $v \notin \{-3, -2, -1, 0\}$ ,  $c$  — від-

стань від точки додатка сили до найближчої ліворуч опори.

Розглянемо спочатку рівняння з номерами  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Цій підсистемі відповідає ділянка балки, що розташована правіше першого прольоту. Підсистему рівнянь можна розглядати як однорідне різницеве рівняння четвертого порядку [4].

Складемо характеристичне рівняння для (6.1):

$$\alpha + \eta\lambda + \gamma\lambda^2 + \eta\lambda^3 + \alpha\lambda^4 = 0. \quad (6.2)$$

Це — зворотне алгебраїчне рівняння. Розділивши рівняння (6.2) на  $\lambda^2$ , одержуємо  $\alpha(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}) + \eta(\lambda + \frac{1}{\lambda}) + \gamma = 0$ . Робимо заміну змінних  $x = \lambda + \frac{1}{\lambda}$  і враховуємо рівність  $x^2 = (\frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2) + 2$ . Після цього одержуємо квадратне рівняння. При його розв'язанні враховуємо рівності  $\eta = \rho - 4\alpha$  й  $\gamma = 6\alpha + 4\rho$ . Знаходимо значення  $x_{1,2}$ . Далі знаходимо  $\lambda$  з рівності  $x = \lambda + \frac{1}{\lambda}$ . У результаті одержуємо всі 4 кореня рівняння (6.2):

$$\lambda = (x_j \pm \sqrt{x_j^2 - 4}) / 2, \text{ де } x_{1,2} = \frac{-\eta \pm \sqrt{\rho(\rho - 24\alpha)}}{2\alpha}.$$

Ці коріння мають такі властивості.

1. Якщо  $\lambda_1$  — корінь рівняння (6.2), то  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$  теж корінь цього

рівняння.

2. Якщо коріння рівняння (6.2) є відмінними від 1, то два з них за модулем є більшими за одиницю і два — меншими.

Далі розглядаємо випадки, коли всі  $\lambda_i$  є різними й, отже, відмінними від 1. Тоді загальний розв'язок рівняння (6.1) при  $k \geq 1$  має вигляд

$$M_k = \tilde{C}_1 \lambda_1^k + \tilde{C}_2 \lambda_2^k + \tilde{C}_3 \lambda_3^k + \tilde{C}_4 \lambda_4^k,$$

причому числа  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  за модулем є меншими за одиницю, а  $\lambda_3$  й  $\lambda_4$  — більшими.

З фізичних міркувань зрозуміло, що  $M_\infty = 0$ . Із цього, як неважко довести, випливає  $\tilde{C}_3 = \tilde{C}_4 = 0$ . Отже, розв'язок рівняння (6.1) при  $k \geq 1$  такий:

$M_k = \tilde{C}_1 \lambda_1^k + \tilde{C}_2 \lambda_2^k$ . У випадку комплексних власних чисел його зручніше представити у вигляді  $M_k = r^k (\hat{C}_1 \cos k\varphi + \hat{C}_2 \sin k\varphi)$ , де  $re^{i\varphi} = \lambda_1$ . Запишемо розв'язок у загальному вигляді  $M_k = C_1 y_1(k) + C_2 y_2(k)$ , де  $y_1(k)$ ,  $y_2(k)$  — відповідна фундаментальна система розв'язків. Постійні  $C_1$  і  $C_2$  можна визначити за даними значеннями  $M_1$  і  $R_1$  на першій опорі, але краще їх визначити разом з іншими невідомими.

Ізгібні моменти на ділянці балки, що лівіше прольоту, де прикладено силу, також описуються однорідним різницеvim рівнянням. Відмінність лише в тому, що опори тепер мають номери  $0, -1, -2, -3, \dots$ . Тому вираз моменту буде таким:  $M_{1-k} = C_0 y_1(k) + C_{-1} y_2(k)$ . Або, інакше  $M_p = C_0 y_1(1-p) + C_{-1} y_2(1-p)$ ,  $p = 0, -1, -2, \dots$ . Об'єднавши його з виразом моментів, знайденим раніше, одержимо

$$M_p = \begin{cases} C_1 y_1(p) + C_2 y_2(p) & \text{при } p \geq 1, \\ C_0 y_1(1-p) + C_{-1} y_2(1-p) & \text{при } p \leq 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Об'єднаємо вираз для моментів  $M_p$  ( $p = -3, -2, \dots, 4$ ) з рівняннями системи (6.1), що мають номери  $k = -3, -2, -1, 0$ . Одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  12-го порядку. Розв'язавши таку систему рівнянь, знайдемо значення постійних  $C_j$ , використовуючи які, можна обчислити значення моментів за формулами (6.3). Оскільки коефіцієнти матриці  $A$  залежать лише від жорсткостей  $EJ$ ,  $k$  і довжини прольоту  $l$ , для побудови ліній прогинів або ліній впливу зручно знайти матрицю  $A^{-1}$  й розв'язати систему за формулою  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ .

Позначимо силу, спрямовану нагору й діючу на лівий кінець  $i$ -го прольоту балки, через  $Q_{i-1}^{(1)}$ , на правий кінець — через  $Q_i^{(2)}$ . З основної системи для першого прольоту знаходимо  $Q_0^{(1)} = (M_1 - M_0 + l - c) / l$ ,  $Q_1^{(0)} = (M_0 - M_1 + c) / l$ . В аналогічний спосіб одержуємо  $Q_{i-1}^{(1)} = (M_i - M_{i-1}) / l$ ,  $Q_i^{(2)} = (M_{i-1} - M_i) / l$  при  $i \neq 1$ .

Сила  $Q_i$ , стискаюча  $i$ -ту пружну опору, дорівнює сумі сил  $Q_i^{(1)}$  і  $Q_i^{(2)}$ .

Тому

$$Q_i = \begin{cases} \frac{1}{l}(M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1} + l - c) & \text{при } i = 0, \\ \frac{1}{l}(M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1} + c) & \text{при } i = 1, \\ \frac{1}{l}(M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}) & \text{при } i \notin \{0, 1\}. \end{cases}$$

Прогин у точці  $x$  визначаємо як суму прогину  $w$ , викликаного вигином відповідного прольоту балки, і прогину  $u$ , викликаного прогинами балки над

опорами:  $v = w + u$ ,  $u(b) = \frac{1}{k}(Q_{i+1} + \frac{b}{l}(Q_i + Q_{i-1}))$ , де  $i$  — номер прольоту;  $b$  — відстань від початку прольоту до точки  $x$ .

Значення  $w(b)$  визначаємо за методом початкових параметрів:

$$w = \begin{cases} w_0 & \text{при } k \neq 0, \\ w_0 + \frac{1}{6EJ} \left( b(l-c)(c(2l-c) - b^2) + (b-c)_+^3 \right) & \text{при } k = 0, \end{cases}$$

де  $w_0 = \frac{1}{6EJ} \left( (2M_k + M_{k+1})lb - 3M_k b^2 - (M_{k+1} - M_k) \frac{b^3}{l} \right)$ . Знак «+» після дужок

означає, що вираз в дужках замінюється нулем, коли воно приймає від'ємне значення.

Необхідно обчислити прогин у точці  $x$  від одиничної сили, прикладеної в точці  $s$ , а в розрахункових формулах використано змінні  $c$ ,  $b$ ,  $k$ . Для визначення цих змінних розглянемо два варіанти вибору осі абсцис (див. рис. 6.3). Вісь  $Ox$  є нерухливою (положення точки  $O$  фіксоване). Цієї осі відповідають змінні  $x$  й  $s$ . Положення осі  $O'x'$  залежить від величини  $s$ . Точка  $O'$  поміщено на початок того прольоту, де прикладено силу. Змінна  $c$  — координата точки додатка сили в новій системі координат ( $0 \leq c \leq l$ ). Проліт, де знаходиться точка  $x$ , у новій системі координат має номер  $k + 1$ , а відстань від початку прольоту до цієї точки дорівнює  $b$ , причому  $0 \leq b \leq l$ . Нові змінні визначаються за формулами

$$c = s - \left[ \frac{s}{l} \right] l, \quad b = x - \left[ \frac{x}{l} \right] l, \quad k = \left[ \frac{x}{l} \right] - \left[ \frac{s}{l} \right].$$

Тут вираз  $[a]$  означає цілу частину числа  $a$ .

Лінію прогину від дії розподіленого навантаження  $q(x)$ , що починається в точці  $A$  й має довжину  $L$ , обчислено за допомогою формули

$$v(x) = \int_A^{A+L} g(s)G(x,s) ds.$$

Визначено прогини шляху під дією ваги вагона, що рухається при різних значеннях пружності опор (балка при цьому вважається невагомою). Числові значення такі:  $EJ = 1,232 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $L = 7 \text{ м}$ ,  $q = 7143 \text{ Н/м}$ . Отримані лінії прогинів наведено на рис. 6.3. Крива 1 відповідає жорсткості опор  $K = 985 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$ , крива 2 —  $K = 985 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$ .

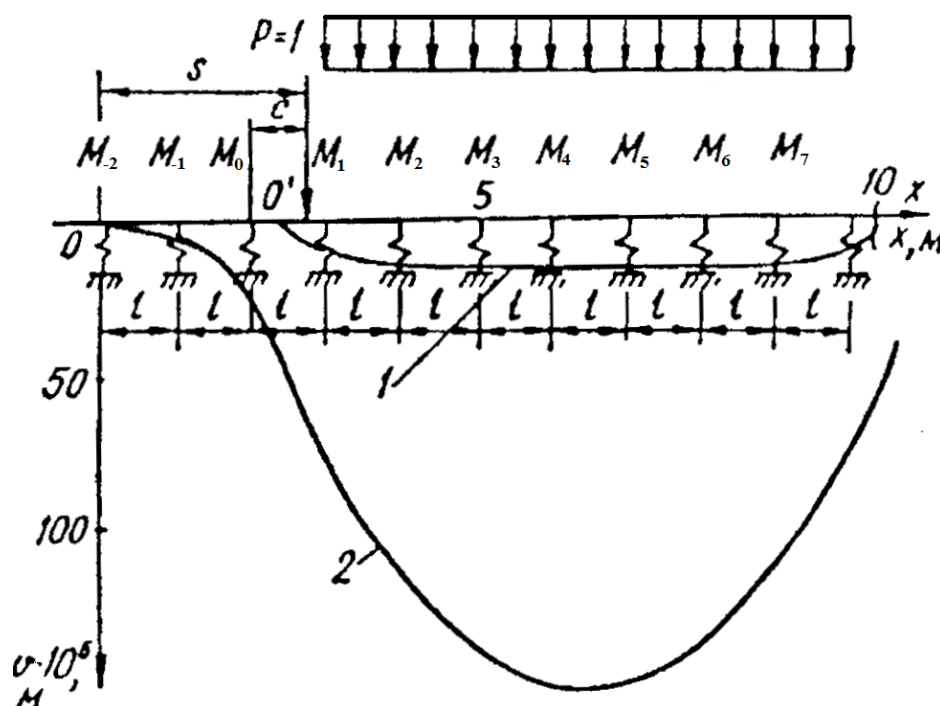


Рис. 6.3. Прогин нескінченної балки на пружних опорах.

Лінія 1 —  $K = 985 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$ , лінія 2 —  $K = 985 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$

Власні частоти й форми коливань скінченних балок визначаємо для випадку абсолютно твердих шарнірних опор. Користуємося рівнянням [1]:



$W^{IV} - \beta^4 W = 0$ , де  $\beta^4 = \omega^2 \frac{\rho F}{EJ}$ ,  $\omega$  — кругова частота коливань;  $F$  — площа поперечного переріза балки. Розв'язок цього рівняння, як відомо, може бути записано у вигляді

$$W(x) = W(0) \cdot S_1(\beta x) + \frac{W'(0)}{\beta} S_2(\beta x) + \frac{W''(0)}{\beta^2} S_3(\beta x) + \frac{W'''(0)}{\beta^3} S_4(\beta x), \quad (6.4)$$

де  $S_i(\beta x)$  — функції Кривої. Позначимо через  $M_0, M_1, \dots, M_n$  згинальні моменти біля відповідних опор. При дослідженні коливань нерозрізної балки з рівновіддаленими опорами зручно визначати числа  $\beta$  за допомогою рівняння трьох моментів, яке в цьому випадку має вигляд [1]:

$$M_{m-1}b + M_m a + M_{m+1}b = 0, \quad b = S_4(\lambda), \quad a = 2(S_2(\lambda)S_3(\lambda) - S_1(\lambda)S_4(\lambda)), \quad \lambda = \beta l.$$

Краї балки закріплено шарнірно, тому  $M_0 = M_n = 0$ . Одержуємо систему рівнянь

$$M_{m-1}b(\lambda) + M_m a(\lambda) + M_{m+1}b(\lambda) = 0 \quad (m = \overline{1, n-1}), \quad M_0 = M_n = 0. \quad (6.5)$$

У випадку, коли всі моменти  $M_i$  дорівнюють нулю, форми коливань кожного із прольотів нерозрізної балки збігаються з формами коливань однопрольотної балки. Відповідні власні числа визначаються за формулою  $\lambda = k\pi$ ,  $k \in N$ . Для знаходження інших власних чисел вирішуємо рівняння  $D(\lambda) = 0$ , де  $D(\lambda) = \det A(\lambda)$ ,  $A(\lambda)$  — матриця коефіцієнтів системи (6.5).

Кругові  $\omega_i$  й лінійні  $f_i$  частоти визначаються за формулами

$$\omega_i = \left(\frac{\lambda_i}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}, \quad f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}.$$

Було складено програму для відділення й уточнення коренів рівняння  $D(\lambda) = 0$ . В табл. 6.1 наведено значення  $\lambda_i, f_i$  при числі прольотів  $n = 6$ . У табл. 6.2 — перші 60 значень  $\lambda_i$  при  $n = 30$ .

Таблиця 6.1

Значення  $\lambda_i, f_i$  при числі прольотів  $n = 6$

Перша зона згущення			Друга зона згущення		
$i$	$\lambda_i$	$f_i$	$i$	$\lambda_i$	$f_i$
1	3,14159	662,8	7	6,28318	2651
2	3,26054	711,4	8	6,40985	2759
3	3,55641	849,4	9	6,7076	3021
4	3,92660	1035	10	7,06858	3355
5	4,29753	1240	11	7,42954	3707
6	4,60142	1422	12	7,72696	4009

Таблиця 6.2

Коріння рівняння частот при  $n = 30$

$i$	$\lambda_i$	$i$	$\lambda_i$	$i$	$\lambda_i$	$i$	$\lambda_i$
1	3,1416	16	3,9226	31	6,28	46	7,0686
2	3,1466	17	4,0027	32	6,2887	47	7,1425
3	3,1615	18	4,0783	33	6,3049	48	7,2149
4	3,1859	19	4,1529	34	6,3312	49	7,2886
5	3,2192	20	4,2262	35	6,3665	50	7,3600
6	3,2605	21	4,2975	36	6,4099	51	7,4295
7	3,3091	22	4,3663	37	6,4599	52	7,4967
8	3,3638	23	4,4319	38	6,5157	53	7,5609

9	3,4339	24	4,4936	39	6,5762	54	7,6213
10	3,4883	25	4,5504	40	6,6404	55	7,6770
11	3,5564	26	4,6014	41	6,7076	56	7,7270
12	3,6273	27	4,6455	42	6,7772	57	7,7702
13	3,7004	28	4,6814	43	6,8486	58	7,8054
14	3,7750	29	4,7080	44	6,9212	59	7,8316
15	3,8505	30	4,7245	45	6,9947	60	7,8477

Ненульові розв'язки системи (6.5) при  $n = 6$  представлено в табл. 6.3. Кожне з них знайдено як власний вектор матриці  $A(\lambda_i)$ , що відповідає нульовому власному числу цієї матриці.

Таблиця 6.3

Згинальні моменти, відповідні до різних форм коливань

$i$	$M_{i1}$	$M_{i2}$	$M_{i3}$	$M_{i4}$	$M_{i5}$
2; 12	0,28868	-0,5	0,57735	-0,5	0,28868
3; 11	0,5	-0,5	0	0,5	-0,5
4; 01	0,57735	0	-0,57735	0	0,57735
5; 9	-0,5	-0,5	0	0,5	0,5
6; 8	0,28868	0,5	0,57735	0,5	0,28868

Одержимо аналітичні вирази форм коливань. Для цього розглянемо довільний проліт балки. Згинальний момент на початку прольоту позначимо символом  $M_p$ , наприкінці —  $M_k$ . Правила знаків і напрямку осей вибираємо такі, як і в [3]. Крайові умови тут такі:  $W(0) = 0$ ;  $EJW'(0) = -M_p$ ;  $W(l) = 0$ ;  $EJW'(l) = -M_k$ .

Підставивши їх в (6.4), одержимо вираз для  $W(x)$  з точністю до постійного множника  $\tau$ :

$$\tau W(x) = d S_2(\beta x) - g S_3(\beta x) + h S_4(\beta x),$$

де  $d = M_{II}(S_2 S_3 - S_1 S_4) + M_K S_4$ ;  $g = M_{II}(S_2^2 - S_4^2)$ ;  $h = M_{II}(S_1 S_2 - S_3 S_4) - M_K S_2$  при  $\beta l \neq k\pi$ , а при  $\beta l = k\pi$ :  $d = -S_1$ ,  $g = 0$ ,  $h = S_2$  (тут опущено аргумент  $\beta l$  функції  $S_j$ ).

#### 6.4. Висновки до розділу 6

Екіпаж на електромагнітнім підвішуванні — це приклад електромеханічної системи. Тут роль змінних відіграють як механічні узагальнені координати, так і величини струмів в електромагнітах. Для декомпозиції рівнянь використовуються властивості симетрії обраної розрахункової схеми. Розрахунки виконуються за допомогою теорії зображень скінченних груп. Це дозволяє до складання рівнянь знайти набори нових змінних, при яких рівняння розпадутся на незалежні підсистеми. Отримано, що досліджувана система рівнянь 78-го порядку розпадається на чотири підсистеми, що мають порядки 12, 12, 28 і 26.

Визначено, також, форми коливань шляхової структури транспортної системи на електромагнітнім підвішуванні. Ці результати дають можливість досліджувати коливання системи екіпаж-шлях у випадках, коли шлях моделюється як нескінченної, так і скінченними балками.

#### 6.5. Список використаних джерел до розділу 6

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). — М.: Машиностроение, 1978 — 1979 — Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978. — 352 с.

2. Коротенко М. Л. Боковые колебания экипажа с бесконтактным подвесом / М. Л. Коротенко, В. Л. Копорулин, Е. П. Крышко // Проблемы динамики, прочности и устойчивости движения железнодорожного подвижного состава. — Днепропетровск: ДИИТ,

3. Лазарян В. А. Техническая теория изгиба / В. А. Лазарян.— Киев: Наук. думка, 1976.— 208 с.

4. Рабинович И. М. Курс строительной механики / И. М. Рабинович. — М.: Госстройиздат, 1954. — Ч. 2. — 544 с.

5. Maglev [E-resource] // Wikipedia, the free encyclopaedia. — 2015 — Access to the resource: [https://en.wikipedia.org/wiki/Maglev#cite\\_note-31](https://en.wikipedia.org/wiki/Maglev#cite_note-31).→

## РОЗДІЛ 7

### АНАЛІЗ МАТРИЧНИХ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДІВ ДЕКОМПОЗИЦІЇ

#### 7.1. Аналіз матричних моделей вартісного балансу за допомогою власних векторів матриці повних витрат

Статичний баланс багатопродуктової економіки можна записати у вигляді [3, 4]:

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (7.1)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  — вектор випуску, що характеризує випуск продуктів за рік;  $A = \| a_{ij} \|$  — матриця прямих витрат;  $a_{ij}$  — кількість продукту  $i$ -тої галузі, що витрачається для виробництва одиниці продукції  $j$ -тої галузі;  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$  — вектор кінцевих продуктів;  $b_i$  — кількість продукту  $i$ -тої галузі, що виступає в якості кінцевого результату виробничої діяльності за рік;  $t$  — знак транспонування. Звідси випливає, що

$$\mathbf{x} = C\mathbf{b}, \quad (7.2)$$

де  $C = (E - A)^{-1}$ . Матрицю  $C$  називають матрицею повних витрат.

Для докладного аналізу моделі розглянемо власні числа  $\lambda_i$  і власні вектори  $\mathbf{s}_i$  матриці  $C$  [2]. Далі розглянуто випадок, коли матриця  $C$  має просту структуру, тобто їй відповідає діагональна жорданова форма. Нехай  $S$  — матриця, стовпцями якої є власні вектори  $\mathbf{s}_i$ . Робимо заміну змінних  $\mathbf{x} = S\mathbf{y}$ ;  $\mathbf{b} = S\mathbf{d}$  у рівняннях (7.2) й одержуємо:

$$\mathbf{y} = \Lambda \mathbf{d}, \text{ де } \Lambda = S^{-1}CS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ 0 & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

У результаті перетворень рівняння (7.2) приводяться до простішого вигляду:

$$y_i = \lambda_i d_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Залишається з'ясувати сенс змінних  $y_i$ ,  $d_i$ . Вектор  $\mathbf{s}_i$  будемо трактувати як комплекс виробництв. Власні числа в такому випадку характеризують «коефіцієнт корисної дії» комплексу. Якщо коефіцієнт є малим, то комплекс «працює» ефективно, тобто для одержання результуючої продукції  $i$ -того комплексу немає необхідності в значному надвиробництві цієї продукції.

Власні числа  $\mu_i$  матриці  $A$  пов'язані з  $\lambda_i$  таким співвідношеннями  $\lambda_i = \frac{1}{1 - \mu_i}$ ;

$\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1}$ . Тому рівняння (7.1) у нових змінних мають вигляд  $y_i = \mu_i y_i + d_i$ ,

$i = \overline{1, n}$ .

Як приклад розглянемо усереднений баланс за першу половину 80-х років [3]. Дані наведено в табл. 7.1.

Таблиця 7.1.

## Коефіцієнти повних витрат

	Важка пром-сть	Легка пром-сть	Буд-цтво	Сільське і лісове госп-ство	Транспорт і зв'язок	Торгівля тощо	Інші галузі
--	----------------	----------------	----------	-----------------------------	---------------------	---------------	-------------

Важка пром-сть	1,9681	0,3661	0,9079	0,4406	0,4779	0,146	0,4294
Легка пром-сть	0,0596	1,5898	0,0385	0,0834	0,0259	0,0363	0,0345
Буд-цтво	0	0	1	0	0	0	0
Сільське і лісове госп-ство	0,0566	0,5835	0,0308	1,2769	0,0179	0,0292	0,0223
Транспорт і зв'язок	0,1581	0,0673	0,0752	0,0554	1,0402	0,0217	0,1777
Торгівля тощо	0,0436	0,143	0,0212	0,0559	0,0117	1,0074	0,1758
Інші галузі	0,0057	0,0037	0,0031	0,0027	0,0023	0,0065	1,0061

У результаті одержуємо такі власні вектори, що характеризують виробничі комплекси (табл. 7.2.):

Таблиця 7.2.

## Виробничі комплекси

	Номер комплексу						
	1	2	3	4	5	6	7
Важка промисловість	0,658	-0,421	-0,235	-0,201	-0,004	-0,232	0,26
Легка промисловість	0,089	0,186	-0,077	-0,029	0,004	0,01	0,008
Будівництво	0	0	0	0	0,313	0	0
Сільське і лісове господарство	0,103	0,281	0,555	0,036	-0,01	0,012	-0,017
Транспорт і зв'язок	0,104	-0,07	-0,078	0,137	-0,601	0,481	-0,498



Торгівля тощо	0,042	0,04	0,054	0,489	0,069	-0,214	-0,196
Інші галузі	0,004	-0,001	0	0,109	0,001	0,051	0,02
Власні числа	2,174	1,579	1,172	1,028	1,000	0,976	0,960

З таблиці видно, що, наприклад, перший комплекс «працює» з коефіцієнтом 2.17, тобто на кожний рубль прямих витрат доводиться ще 1 руб. 17 коп. непрямих витрат.

## 7.2. Найкращий поділ на блоки матричних макроекономічних моделей

Деякі макроекономічні моделі описують міжгалузевий баланс за допомогою декількох матриць. У цьому випадку не можливо застосувати підхід, коли використовуються власні вектори матриці (підрозділ 7.1). Однак може існувати перетворення змінних, що дозволяє розділити рівняння на кілька незалежних підсистем [1]. Якщо такий поділ є можливим, то отримані підсистеми описують деякі «блоки» (або «комплекси») видів продукції й технологічних способів. Кожний з них можна аналізувати окремо від інших.

Модель Наймана записується в такий спосіб [3, 4]:

$$\mathbf{u} = A\mathbf{x}, \mathbf{v} = B\mathbf{x}, \quad (7.3)$$

де  $\mathbf{x} \in R^n$  — вектор інтенсивностей використання технологічних способів,  $\mathbf{u} \in R^m$  — вектор витрат,  $\mathbf{v} \in R^m$  — вектор випуску продукції,  $A$  й  $B$  — матриці розмірності  $m \times n$ .

Для декомпозиції цих рівнянь потрібно знайти заміну змінних

$$\mathbf{x} = S\mathbf{x}', \mathbf{v} = H\mathbf{v}', \mathbf{u} = H\mathbf{u}', \quad (7.4)$$

після якої систему (7.3) буде наведено до максимально можливої кількості незалежних підсистем меншого порядку. Тут  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{u}'$  — вектори нових змінних. Неважко помітити, що після перетворення матриці придбають вигляд:  $\hat{A} = H^{-1}AS$ ,  $\hat{B} = H^{-1}BS$ .

В аналогічний спосіб одержуємо, що  $H = v(T_1)$ ,  $S = v(T_2)$ . Тут  $T_1$  і  $T_2$  — розв'язки системи матричних рівнянь  $T_1A = AT_2$ ,  $T_1B = BT_2$ ,  $v(X)$  — матриця, стовпцями якої є вектори канонічного базису (власні й приєднані вектори) матриці  $X$ . При цьому хоча б одна з матриць  $T_k$  повинна мати не менше двох різних власних чисел, інакше декомпозиція є неможливою.

Роль допоміжних матриць відіграють

$$C_1 = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 2E_n \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

Таким чином, задача про знаходження перетворення (7.4) для розщеплення рівнянь (7.3) зводиться до задачі одночасного зведення допоміжних матриць (7.5) до блочно-діагонального вигляду через перетворення подібності.

Динамічну модель Леонтьєва може бути записано у вигляді [3, 4]:

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + Kdx/dt + \mathbf{g}, \quad (7.6)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  — вектор випуску, що характеризує випуск продуктів за рік;  $A = \|a_{ij}\|$  — матриця прямих витрат;  $a_{ij}$  — кількість продукту  $i$ -тої галузі, що витрачається для виробництва одиниці продукції  $j$ -тої галузі;  $K = K_0(E - A)$ ;  $K_0$  — матриця коефіцієнтів повної приростної капіталомісткості (тобто коефіцієнти пропорційності між частками інвестицій продукції одних галузей у розширення виробництва інших і

швидкостями росту відповідних елементів вектора кінцевих продуктів);  $E$  — одинична матриця;  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T$  — вектор споживання. При заміні змінних

$$\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$$

виконується перетворення подібності для матриць  $A$  і  $K$ . Одержуємо знайомі задачі про перетворення двох матриць — задача 1 і задача 2 (підрозділ 1.8). Розв'язок першої задачі викладено в розділі 2, а другий — у розділі 3.

Для розрахунків використано офіційні статистичні дані про економіку України. Вони щорічно публікуються в статистичних збірниках. При цьому дані про міжгалузевий баланс з'являються з великим запізненням. Ці дані публікуються також на офіційному сайті (<http://ukrstat.gov.ua/>) Держкомітету статистики України. Після входу на сайт потрібно вибрати закладку «Статистична інформація», потім розділ «Національні рахунки», підрозділ «Таблиця "витрати-випуск" (у цінах споживачів)». З'являться дані за черговий рік. В «Архіві» — дані, починаючи з 2003 року.

Статистичні дані дозволяють обчислити матрицю прямих витрат  $A$ . Але скласти безпосередньо динамічну модель Леонт'єва є неможливим тому, що немає даних про розподіл виробничих нагромаджень (інвестицій) по галузях. Це можна зробити, враховуючи зміни балансу за ряд років за допомогою спеціальних методів. Для складання більш докладних моделей (наприклад, модель Неймана) офіційних статистичних даних взагалі недостатньо.

Було виконано розрахунки з аналізу офіційних статистичних даних і складанню макроекономічних моделей.

Підтвердилося те, що коефіцієнти матриці прямих витрат змінюються повільно. Навіть у мінливий період 1989–2000 років структурні зміни, відповідні переходу від епохи «холодної війни» до сучасності, відбивалися порівняно повільними змінами цих коефіцієнтів.

Що ж стосується динамічної моделі, то з'ясувалося, що вона надає недостатньо точні результати для інтервалу, що включає 1994–1998 роки. Доцільно вибирати в якості початку інтервалу 1998 рік (або більш пізній), коли намітився підйом економіки. Досліджувана кількість галузей повинна бути невеликою через обмежену кількість даних.

Розглянемо задачу ідентифікації параметрів динамічної моделі Леонтьєва. Скласти цю модель означає знайти матриці  $A$  й  $K$ , що беруть участь у рівняннях (7.6). Матрицю  $A$ , як було сказано вище, можна знайти безпосередньо за опублікованим міжгалузевим балансом. Замість матриці  $K$  можна знайти матрицю коефіцієнтів повної приростної капіталомісткості  $K_0$ . Відповідні диференціальні рівняння в матричній формі мають вигляд:

$$\mathbf{b} = K_0 \mathbf{b} / dt + \mathbf{g}.$$

Виходить обчислювальна задача: підібрати елементи матриці  $K_0$  так, щоб відмінність вектора кінцевих продуктів  $\mathbf{b}(t)$ , обчисленого інтегруванням рівнянь, і фактичного було мінімально можливим. Величина, що мінімізується, — це середньоквадратичне відхилення всіх елементів векторів за всі роки розглянутого інтервалу часу.

Слід зазначити, що задачі ідентифікації відносяться до некоректних задач, тобто до таких, для яких мала зміна вихідних даних може звести до чималої зміни результату. Це вимагає уважного ставлення до вибору використовуваного методу оптимізації й до аналізу отриманих результатів.

Баланс однієї галузі може бути записаний так [4]:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = D\mathbf{z} + C\mathbf{y}, \\ \mathbf{z} = P\mathbf{z} + N\mathbf{y}, \end{cases} \quad (7.7)$$

де  $\mathbf{u} \in C^m$  — споживана сировина й матеріали,  $\mathbf{z} \in C^n$  — проміжний продукт галузі,  $\mathbf{y} \in C^p$  — кінцеві продукти галузі,  $D, C, P, N$  — матриці відповідних розмірів.

Ставить інтерес декомпозиція рівнянь (7.7) за допомогою заміни змінних

$$\mathbf{u} = S_1 \mathbf{u}', \quad \mathbf{z} = S_2 \mathbf{z}', \quad \mathbf{y} = S_3 \mathbf{y}'. \quad (7.8)$$

Перетворені матриці стануть такими:

$$\tilde{P} = S_2^{-1} P S_2, \quad \hat{N} = S_2^{-1} N S_3, \quad \hat{D} = S_1^{-1} D S_2, \quad \hat{C} = S_1^{-1} C S_3.$$

Для знаходження перетворення будемо використовувати множину розв'язків системи матричних рівнянь

$$H_2 P = P H_2, \quad H_2 N = N H_3, \quad H_1 D = D H_2, \quad H_1 C = C H_3. \quad (7.9)$$

Вважаємо, що власні числа матриць  $H_1$  і  $H_3$  пронумеровано в такий спосіб: спочатку ті з них, які збігаються із власними числами матриці  $H_2$ , у тому ж порядку, потім — інші власні числа.

Через  $\nu(D)$  позначаємо матрицю, що приводить дану матрицю  $D$  до жорданової форми.

Якщо серед розв'язків системи (7.9) є такий, що хоча б одна з матриць  $H_k$  має не менше двох різних власних чисел, то заміна змінних (7.8) при  $S_k = \nu(H_k)$  приводить рівняння (7.7) до підсистем менших розмірів. Це впливає з теорем 1.1 і 1.2.

Роль допоміжних матриць відіграють квадратні матриці порядку  $l = n + m + p$ :

$$C_1 = \text{diag}(E_p, 2E_n, 3E_m), C_2 = \begin{bmatrix} 0 & D & C \\ 0 & P & N \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Взаємозв'язок між матрицею перетворення подібності  $R$  і матрицями (7.8) перетворень такий:  $\text{diag}(S_1, S_2, S_3) = R \nu(R^{-1}C_1R)$ .

В аналогічний спосіб можна виконати аналіз інших макроекономічних моделей використовуючих декілька матриць. У всіх цих випадках можливість або неможливість декомпозиції залежить від структури досліджуваної економічної системи. Тому розроблений підхід можна трактувати як виявлення схованої симетрії системи, а наближену декомпозицію (підрозділ 3.3) — як виявлення схованого малого параметра.

### 7.3. Висновки до розділу 7

У даному розділі розроблено методику декомпозиції різних макроекономічних моделей. Якщо система допускає декомпозицію (хоча б наближену), то отримані підсистеми можна трактувати як окремі «комплекси» виробництв.

У деяких випадках моделі міжгалузевго балансу можна використовувати і для аналізу взаємодії підприємств усередині міністерства або корпорації. Тут також можуть бути корисними методи декомпозиції.

### 7.4. Список використаних джерел до розділу 7

1. Базилевич Ю. Н. Наилучшее разделение на блоки матричных макроекономических моделей / Ю. Н. Базилевич // Питання прикладної

математики і математичного моделювання: Зб. наукових пр. — Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2005. — С. 23—28.

2. Базилевич Ю. Н. О методах анализа матричных моделей стоимостного баланса / Ю. Н. Базилевич, В. А. Нецветаев, Е. П. Резник // XXI столетие — проблемы и перспективы освоения месторождений полезных ископаемых: Сб. науч. Трудов НГА Украины. №3, Том. 7. — РИК
3. Гранберг А. Г. Моделирование социалистической экономики / А. Г. Гранберг. — М.: Экономика, 1988. — 487 с.
4. Ицкович И. А. Анализ линейных экономико-математических моделей / И. А. Ицкович. — Новосибирск: Наука, 1976. — 192 с. →

## ВИСНОВКИ

1. На основі аналізу публікацій вітчизняних і закордонних авторів встановлено існування різних напрямків у створенні методів декомпозиції матричних математичних моделей.

2. Запропоновано концепцію, що погоджує різні напрямки в єдине ціле. Це дозволяє більш ефективно вирішувати прикладні задачі.

3. Розроблено теоретичні основи й обчислювальні методи для найкращої декомпозиції лінійних рівнянь через зведення матриць коефіцієнтів до блочно-діагонального вигляду без вимоги про напівпростоту застосовуваних алгебр, скінченності або компактності групи симетрії.

4. Розроблено спосіб виявлення систем, близьких до розщеплюваних систем. Це дозволяє звести початкову задачу до задачі з малим параметром.

5. Встановлено відповідність між задачею декомпозиції керованих систем, які описуються прямокутними матрицями і задачею декомпозиції механічних систем.

6. Встановлено взаємозв'язки між методами, що використовують апріорну інформацію щодо симетрії розрахункової схеми системи, й алгебраїчними методами декомпозиції.

7. Розроблено метод ієрархічної декомпозиції за допомогою зведення матриць до блочно-трикутного вигляду.

8. Розроблено алгоритми для спрощення математичних моделей, що призначені для аналізу задач:

- ◆ дослідження стійкості руху рейкових екіпажів,
- ◆ дослідження руху екіпажів на електромагнітному підвішуванні,
- ◆ дослідження еволюції керованих систем,
- ◆ дослідження макроекономічних моделей Леонт'єва і Неймана,



◆ напівозначеного програмування.

9. Щодо ряду запропонованих моделей виконано практичні розрахунки, що показали ефективність застосовуваних методів для розв'язання актуальних прикладних задач механіки й економіки.

10. Рекомендується така послідовність застосовування методів, які розроблені в дисертації:

- a) спочатку методи теорії груп, які використовують інформацію щодо симетрії розрахункової схеми;
- b) далі зведення до максимально можливої в допустимому класі перетворень кількості незалежних підсистем (метод комутуючої матриці);
- c) далі методи перевірки: чи є розглянута система близькою до розщеплюваної;
- d) останнім — зведення матриць коефіцієнтів до блочно-трикутного вигляду (ієрархічна декомпозиція).

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Андреев Ю. Н. Дифференциально-геометрические методы в теории управления / Ю. Н. Андреев // Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 10. — С. 5—46.
2. Апроянц А. Р. Различные подходы к задаче нахождения общего инвариантного подпространства нескольких матриц / А. Р. Апроянц, Ю. Н. Базилевич, Н. В. Чехранов // Вістник Дніпропетровського університету. Математика. 2005, № 6. — С. 3—6.
3. Базилевич Ю. Н. Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики / Ю. Н. Базилевич. — Киев: Наук. думка, 1987. — 156 с.
4. Базилевич Ю. Н. Разделение на подсистемы уравнений возмущенного движения восьмиосного вагона с несимметричной загрузкой / Ю. Н. Базилевич // Динамика и прочность сложных механических систем. — Киев: Наук. думка, 1977. — С. 24—27.
5. Базилевич Ю. Н. О применении методов теории чувствительности для стабилизации сложных динамических систем / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, В. А. Татарина // Теория инвариантности и её применение. Ч. 2. — Киев: Наук. Думка, 1979. — С. 16—21.
6. Базилевич Ю. Н. Приведение системы линейных дифференциальных уравнений к максимально возможному количеству независимых подсистем / Ю. Н. Базилевич // Дифференц. уравнения. — 1980. — 16, № 2. — С. 360—361.
7. Базилевич Ю. Н. Оптимизация параметров рельсовых экипажей по различным целевым функциям / Ю. Н. Базилевич, Н. А. Радченко // Нагруженность, прочность, устойчивость движения механических систем. Киев: Наук. думка, 1980. — С. 48—52
8. Базилевич Ю. Н. Оценка области притяжения решения уравнений движения с помощью собственных чисел / Ю. Н. Базилевич // Колебания и

- динамические качества механических систем. — Киев: Наук. думка, 1983. — С. 14—17.
9. Базилевич Ю. Н. Механические характеристики путевой структуры скоростной транспортной системы / Ю. Н. Базилевич // Динамические характеристики механических систем. — Киев: Наук. Думка, 1984. — С. 76—81.
10. Базилевич Ю. Н. О боковых колебаниях восьмиосных экипажей / Ю. Н. Базилевич, Ю. В. Демин, М. Б. Кельрих и др. // В кн.: Конструкторско-технологические исследования в области создания металлургического, горнорудного, подъёмно-транспортного оборудования и цистерностроения. Краматорск: НИИПТмаш., 1985. — С. 90—100.
11. Базилевич Ю. Н. Распределение амплитуд колебаний многомассовой существенно неконсервативной системы / Ю. Н. Базилевич, Ю. В. Демин, Л. М. Коротенко // Колебания и прочность механических систем. — Киев: Наук. Думка, 1986. С. 81—87.
12. Базилевич Ю. Н. Численные алгоритмы для разделения уравнений на независимые и слабо связанные подсистемы / Ю. Н. Базилевич // Нагруженность и надежность механических систем. — Киев: Наук. думка, 1987. — С. 53—55.
13. Базилевич Ю. Н. Моделирование боковых колебаний четырехосной цистерны с дополнительными упругодиссипативными связями / Ю. Н. Базилевич, Ю. П. Бороненко, Ю. В. Демин и др. // Проблемы динамики, прочности и устойчивости движения железнодорожного подвижного состава. — Днепропетровск: Изд-во ДИИТ, 1986. — С. 104—111.
14. Базилевич Ю. М. Вибір узагальнених координат локомотива з трьома візками з урахуванням симетрії його розрахункової схеми / Ю. М. Базилевич, М. Л. Коротенко // Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки, Біологічні науки. №1, 2000. — С. 13—16.

15. Базилевич Ю. Н. Наилучшее разделение на блоки матричных макроэкономических моделей / Ю. Н. Базилевич // Питання прикладної математики і математичного моделювання: Зб. наукових пр. — Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2005. — С. 23—28.
16. Базилевич Ю. Н. Точная декомпозиция линейных систем [Электронный ресурс] / Ю. Н. Базилевич // Электронный журнал "Исследовано в России", 018, стр. 182—190. — 2006. — Режим доступа к ресурсу: <http://www.scijournal.ru/articles/2006/018.pdf>, <http://elibrary.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/MFTI/2006/018.pdf>.
17. Базилевич Ю. Н. Новые вычислительные алгоритмы в задачах точной декомпозиции / Ю. Н. Базилевич // Питання прикладної математики і математичного моделювання. — Д.: РВВ ДНУ, 2015. — Вип. 15. — С. 3—8.
18. Базилевич Ю. Н. Об упрощении задачи полуопределенного программирования / Ю. Н. Базилевич // Теорія оптимальних рішень. К.: Ін-т кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2016. — № 15. — С. 103—107.
19. Базилевич Ю. Н. Расщепление уравнений движения экипажа на электромагнитном подвешивании / Ю. Н. Базилевич // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. №1, 2016. — С. 5 — 11.
20. Базилевич Ю. Н. Оценка области притяжения решения в случае системы уравнений высокого порядка / Ю. Н. Базилевич, И. А. Костюшко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. № 25. — Д. : ДНУ, 2016. — С. 18—26.
21. Базилевич Ю. Н. Группа симметрии декомпозируемой системы / Ю. Н. Базилевич // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. — 2016, вип. 1 (20). — С. 3 — 10.
22. Базилевич Ю. Н. О постановке задач точной декомпозиции линейных математических моделей / Ю. Н. Базилевич, И. А. Костюшко //

Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2017. — № 1. — С. 77–82.

23. Базилевич Ю. Н. Наилучшее приведение матриц к блочно-треугольному виду для задач иерархической декомпозиции / Ю. Н. Базилевич // Кибернетика и системный анализ. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 145–153.
24. Базилевич Ю. Н. Приближённая декомпозиция как приём оценки демпфирования колебательных систем / Ю. Н. Базилевич, Р. Б. Грановский, Н. Я. Гаркави, Е. Ф. Фёдоров, В. В. Карпенко, О. Н. Литвиненко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. — Дніпро: Ліра, 2017. — Вип. 26. — С. 22—33.
25. Базилевич Ю. Н. Оптимизация параметров рельсовых экипажей с точки зрения устойчивости движения / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, Н. А. Радченко // Всесоюзная конференция по оптимальному управлению в механических системах. Тезисы докладов. Казань: изд. КАИ, 1977. — С. 9—10.
26. Базилевич Ю. Н. Приведение набора матриц к блочно-треугольному виду с максимальным количеством блоков / Ю. Н. Базилевич // XIX Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений. Часть первая. — Львов: Изд-во ИППММФ АН УССР, 1987. — С. 18.
27. Базилевич Ю. Н. Расщепление уравнений боковых колебаний рельсового экипажа на подсистемы / Ю. Н. Базилевич // Проблемы механики железнодорожного транспорта. Тезисы докл. Всесоюзной конф. — Днепропетровск: ДИИТ, 1988. — С. 42.
28. Базилевич Ю. Н. Декомпозиция уравнений при исследовании устойчивости движения рельсовых экипажей / Ю. Н. Базилевич // Восьмая конференция "Проблемы механики железнодорожного транспорта". Тезисы докладов конференции. — Днепропетровск: ДИИТ, 1992. — С. 23.

29. Базилевич Ю. Н. Компьютерная декомпозиция уравнений движения рельсовых экипажей / Ю. Н. Базилевич // IX Международная конференция: Проблемы механики железнодорожного транспорта: Динамика, надежность и безопасность подвижного состава. Тезисы докладов конференции. — Днепропетровск: Днепропетр. гос. технич. ун-т ж.д. транспорта, 1996. С. 148—149.
30. Базилевич Ю. Н. О методах анализа матричных моделей стоимостного баланса / Ю. Н. Базилевич, В. А. Нецветаев, Е. П. Резник // XXI столетие — проблемы и перспективы освоения месторождений полезных ископаемых: Сб. науч. Трудов НГА Украины. №3, Том. 7. — РИК НГА Украины, 1998. — С. 194—196.
31. Базилевич Ю. Н. Алгоритм нахождения общего решения системы линейных однородных алгебраических уравнений в случае сверхбольшой разреженной матрицы коэффициентов / Ю. Н. Базилевич, А. Л. Булдович // Математические модели и современные технологии. — Киев: Ин-т математики., 1998. — С.12, 13.
32. Базилевич Ю. Н. Последовательная декомпозиция уравнений при исследовании устойчивости движения рельсовых экипажей / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, И. В. Швец // Проблемы механики железнодорожного транспорта: Динамика, надёжность и безопасность подвижного состава. X Международная конференция. Тезисы докладов. — Днепропетровск: Арт-Пресс, 2000. — С. 130—131.
33. Базилевич Ю. Н. Численное решение задач иерархической декомпозиции линейных математических моделей / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, И. В. Швец // Міждержавна науково-методична конференція “Комп’ютерне моделювання”, Дніпродзержинськ: ДзДТУ, 2001. — С. 45—46.
34. Базилевич Ю. Н. Методы точной декомпозиции при анализе динамической модели Леонтьева / Ю. Н. Базилевич, И. В. Швец //

- Міждержавна науково-методична конференція “Проблеми математичного моделювання”. — Дніпродзержинськ, ДзДТУ, 2002. — С. 7.
35. Базилевич Ю. Н. Выявление симметрии и условной симметрии системы вычислительными методами / Ю. Н. Базилевич // IX Крымская международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл. / Таврический национальный ун-т. — Симферополь. 2008. — С. 17.
36. Базилевич Ю. Н. Методы декомпозиции при анализе матричных макроэкономических моделей / Ю. Н. Базилевич // X Крымская международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл. / Таврический национальный ун-т. — Симферополь. 2010. — С. 13
37. Базилевич Ю. Н. Новые алгоритмы иерархической декомпозиции / Ю. Н. Базилевич // Информационные технологии в управлении сложными системами. Сборник докладов научной конференции. — Днепропетровск: Изд-во «Свидлер А. Л.», 2011. — С. 8—10.
38. Базилевич Ю. Н. Декомпозиция уравнений с прямоугольными матрицами коэффициентов / Ю. Н. Базилевич // Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012): межд. конф / Таврический нац. ун-т. — Симферополь: ДИАПИ, 2012. — С. 79.
39. Базилевич Ю. Н. Точная декомпозиция систем линейных уравнений / Ю. Н. Базилевич // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня, 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — К.: НТУУ «КПІ», 2014. — С. 40.
40. Базилевич Ю. Н. Методы точной декомпозиции в линейных динамических задачах / Ю. Н. Базилевич // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: міжнародна науково-практична конф. — Дніпропетровськ: ДНУ, 2015. — С. 14—15.

41. Базилевич Ю. Н. Оптимизация параметров механических систем при овражном характере целевой функции / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, В. А. Татарина // Динамика и прочность сложных механических систем. — Киев: Наук. думка, 1977. — С. 31—33.
42. Базилевич Ю. Н. Приведение системы линейных дифференциальных уравнений к максимально возможному количеству независимых подсистем / Ю. Н. Базилевич. — Минск, 1979. — 18 с. — Деп. ВИНТИ 11.05.79 N 1973—79 Деп.
43. Базилевич Ю. Н. Вычислительный подход к задаче нахождения неприводимых представлений конечной группы / Ю. Н. Базилевич // Прикладные проблемы математического моделирования: Вестник Херсонского государственного технического университета, 1999. — С. 29—31.
44. Базилевич Ю. Н. Решение задачи иерархической декомпозиции линейных математических моделей механических систем / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, И. В. Швец // Техническая механика. — 2003, №1. — С. 135—140.
45. Базилевич Ю. Н. Декомпозиция уравнений движения многомассовой механической системы с позиционными неконсервативными силами: автореф. дис. ... канд. физ.-мат наук: спец. 01.02.01 Теоретическая механика / Ю. Н. Базилевич. — Л.: ЛПИ, 1977. — 20 с.
46. Банах Л. Я. Методы декомпозиции и редукции динамических моделей при колебаниях механических систем. / Л. Я. Банах // Вестник научно-технического развития. — 2012. — № 6 (58). — С. 3—8.
47. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова / Е. А. Барбашин. — М.: Наука, 1970. — 240 с.
48. Белозеров В. Е. О декомпозиции линейных стационарных систем автоматического управления / В. Е. Белозеров, Г. В. Можаяев // Кибернетика и вычисл. техника. — 1983. — Вып. 58. — С. 71—78.



49. Белозеров В. Е. О единственности решения задач декомпозиции и агрегирования линейных систем автоматического управления / В. Е. Белозеров, Г. В. Можаяев // Теория сложных систем и методы их моделирования. — М.: ВНИИСИ, 1982. — С. 4—13.
50. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. — М.: Высш. шк., 1980. — 408 с.
51. Богомаз Г. И. Математическое моделирование колебаний восьмиосной железнодорожной цистерны, транспортирующей жидкие грузы / Г. И. Богомаз, Ю. В. Дёмин, А. Н. Комаренко и др. — Днепропетровск, 1983. — 39 с. — Деп. в ВИНТИ, № 4995/83.
52. Богоявленский А. А. Методы теории групп непрерывных преобразований в механике систем с конечным числом степеней свободы / А. А. Богоявленский, И. С. Емельянова, Л. М. Мархашов и др. // Устойчивость движения, аналитическая механика, управление движением. — М.: Наука, 1981. — С. 69—93.
53. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. — М.: Физматгиз, 1961. — 339 с.
54. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 / В. М. Бондаренко // Мат. сб. — 1975. — 96, № 1. — С. 63—74.
55. Борецкий И. Ф. О единственности декомпозиции в линейной задаче оптимального управления с квадратичным критерием качества / И. Ф. Борецкий, В. Г. Павлов // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 11. — С. 10—15.
56. Булгаков Б. В. Колебания / Б. В. Булгаков. — М.: Гостехтеориздат, 1954. — 891 с.
57. Бурьшкин М. Л. Эффективные методы и программы расчета на ЭВМ симметричных конструкций / М. Л. Бурьшкин, В. Н. Гордеев. — Киев: Будівельник, 1984. — 120 с.

58. Ван дер Варден. Алгебра / Ван дер Варден. — М.: Наука, 1976, 648 с.
59. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). — М.: Машиностроение, 1978 — 1979 — Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978. — 352 с.
60. Вигнер Е. Теория групп и ее приложение к квантово-механической теории атомных спектров / Е. Вигнер. — М.: Изд—во иностр. лит., 1961. — 443 с.
61. Владимиров С. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения с дискретной группой симметрии / С. А. Владимиров // Дифференц. уравнения. — 1975. — 11, № 7. — С. 1180—1189.
62. Воеводин В. В. Развитие методов решения задач алгебры в вычислительном центре Университета / В. В. Воеводин // Вестн. Моск. Унта. Сер. Математика и механика. — 1970. — № 2. — С. 69—82.
63. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.
64. Гарг В. К. Динамика подвижного состава / В. К. Гарг, Р. В. Дуккипати. — М.: Транспорт, 1988, 391 с.
65. Гельфанд И. М. Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве / И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев // Функцион. анализ. — 1969. — 3, Вып. — 4. — С. 81—82.
66. Гельфанд И. М. Неразложимые представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев // Успехи матем. наук, 23:2 (1968), 3—60.
67. Городецкий В.И. Методы теории чувствительности в автоматическом управлении / В.И. Городецкий, Ф.М. Захарин, Е.Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов; под. ред. Е.Н. Розенвассера и Р.М. Юсупова. — JL: Энергия, 1971.—344 с.
68. Гранберг А. Г. Моделирование социалистической экономики / А. Г. Гранберг. — М.: Экономика, 1988. — 487 с.

69. Груйич Л. Т. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях / Л. Т. Груйич, А. А. Мартынюк, М. Риббенс-Павелла. — Киев: Наук. думка, 1984. — 308 с.
70. Декомпозиционные методы в математическом моделировании и информатике. Тезисы докладов 2-ой Московской конференции / Под ред. Ю. Н. Павловского. — М.: ВЦ РАН, 2004. — 213 с.
71. Демин Ю. В. Автоколебания и устойчивость движения рельсовых экипажей / Ю. В. Демин, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко и др. — Киев: Наук. думка, 1984. — 160 с.
72. Джексон Г. Проектирование реляционных баз данных для использования с микроЭВМ / Г. Джексон. — М.: Мир, 1991. — 252 с.
73. Дрозд Ю. А. Конечномерные алгебры / Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко. — Киев: Вища шк., 1980.— 192 с.
74. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах / Ю. А. Дрозд // Матричные задачи. — Киев: Институт математики АН УССР, 1977. — С. 104—114.
75. Дрозд Ю. А. Представление коммутативных алгебр / Ю. А. Дрозд // Функ. анализ и его прилож. 1969. Т. 6, вып. 4. С. 41 — 43.
76. Дышлис А. А. Определение на ЭВМ координат симметрии молекул методом операторов проектирования / А. А. Дышлис, Н. К. Морозова, Н. Б. Гайсина и др. // Науч. конф. "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе". — Киев: ИК АН УССР, 1974. — С. 212— 216.
77. Елкин В. И. Основы геометрической теории нелинейных управляемых систем / В. И. Елкин. — М.: Физматлит, 2014. — 204 с.
78. Жадан В. Г. Об одном варианте допустимого аффинно-масштабирующего метода для полуопределенного программирования / В. Г. Жадан // Тр. ИММ УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 2. — С. 145–160.

79. Злокович Дж. Теория групп и G-векторных пространств в колебаниях, устойчивости и статике конструкций / Дж. Злокович. — М.: Стройиздат, 1977. — 164 с.
80. Ицкович И. А. Анализ линейных экономико-математических моделей / И. А. Ицкович. — Новосибирск: Наука, 1976. — 192 с.
81. Казимирский П. С. О подобии матричных квадратных трехчленов / П. С. Казимирский, В. Р. Зелиско, В. М. Петричкович // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1976. — С. 11—16.
82. Казімірський П. С. Розклад матричних многочленів на множники (II видання) / П. С. Казімірський. — Львів: ІППММ НАНУ, 2015. — 282 с.
83. Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. — М.: Мир, 1971. — 400 с.
84. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
85. Кафи, О'Келли. Классические нормальные формы колебаний демпфированных линейных динамических систем. — Тр. Америк. О-ва инж.-мех. Серия Е. Прикладная механика, 1965, 32, п. 3. — С. 117—123.
86. Коротенко М. Л. Боковые колебания экипажа с бесконтактным подвесом / М. Л. Коротенко, В. Л. Копорулин, Е. П. Крышко // Проблемы динамики, прочности и устойчивости движения железнодорожного подвижного состава. — Днепропетровск: ДИИТ, 1986. — С. 79—87.
87. Коротенко М. Л. О работах В. А. Лазаряна в области устойчивости движения рельсовых экипажей и их развитии / М. Л. Коротенко, Ю. Н. Базилевич // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. — Вип. 30. — Д: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім акад. В. Лазаряна, 2009 — С. 144—149.

88. Косолап А. И. Полуопределенное программирование для решения задач комбинаторной оптимизации / А. И. Косолап, А. С. Перетяцько // Вісник Запорізького національного університету. Серія «Прикладна математика. Інформатика». – 2013. – № 2. – С. 50–55.
89. Крон Г. Исследование сложных систем по частям — диакоптика / Г. Крон. — М.: Наука, 1972. — 544 с.
90. Крон Г. Тензорный анализ сетей / Г. Крон. — М.: Сов. радио, 1978. — 720 с.
91. Крылов Б. Л. Решение в конечном виде проблемы Римана для системы Гаусса / Б. Л. Крылов // Труды Казанского авиационного института, 31, 1956. — С. 203—445.
92. Кублановская В. Н. К решению задач с разреженными матрицами / В. Н. Кублановская, Г. В. Савина, Т. Н. Смирнова // Зап. науч. семинаров Ленинг. отд. математического ин-та АН СССР. — 1973. — Вып. 35. — С. 75—94.
93. Кухтенко А. И. Проблема многомерности в теории сложных систем / А. И. Кухтенко // Кибернетика и вычисл. техника. — 1969. — Вып. 1. — С. 6—35.
94. Кэртис Ч. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр / Ч. Кэртис, И. Райнер. — М.: Наука, 1969. — 668 с.
95. Лазарян В. А. Динамика вагонов / В. А. Лазарян. — М.: Транспорт, 1964. — 256 с.
96. Лазарян В. А. Динамика транспортных средств: Избр. тр. / В. А. Лазарян. — Киев: Наук. думка, 1985. — 528 с.
97. Лазарян В. А. Определение собственных значений матриц высоких порядков при помощи QR-алгоритма / В. А. Лазарян, Л. А. Длугач, И. А. Зильберман и др. // Некоторые задачи механики скоростного рельсового транспорта. — Киев: Наук. думка, 1973. — С. 43—55.

98. Лазарян В. А. Понижение порядка систем нелинейных дифференциальных уравнений путем исключения быстро затухающих решений / В. А. Лазарян, Л. А. Длугач, И. А. Зильберман и др. // Прикл. механика. — 1975. — 11, № 8. — С. 81—88.
99. Лазарян В. А. Техническая теория изгиба / В. А. Лазарян. — Киев: Наук. думка, 1976. — 208 с.
100. Лазарян В. А. Устойчивость движения рельсовых экипажей / В. А. Лазарян, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко. — Киев: Наук. думка, 1972. — 199 с.
101. Ландау Л. Д. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948. — 568 с.
102. Лопатин А. К. Об алгебраической приводимости систем линейных дифференциальных уравнений / А. К. Лопатин // Дифференц. уравнения. — 1968. — 4, № 3. — С. 439—445.
103. Лэсдон Л. Оптимизация больших систем / Л. Лэсдон. — М.: Наука, 1975. — 432 с.
104. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике: Курс лекций для физиков-теоретиков. Изд. 2 / Г. Я. Любарский. — М.: URSS, 2016 — 360 с.
105. Любарский Г. Я. Теория групп и физика / Г. Я. Любарский. — М.: Наука, 1986. — 224 с.
106. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний / Л. И. Мандельштам. — М.: Наука, 1972. — 470 с.
107. Маневич Л. И. О нормальных колебаниях в нелинейных системах с двумя степенями свободы / Л. И. Маневич, М. А. Пинский // Прикл. Механика. — 1972. — 8, № 9. — С. 83—90.
108. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. — М.: Наука, 1971. — 312 с.

109. Митропольский Ю. А. Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики / Ю. А. Митропольский, А. К. Лопатин. — Киев: Наук. думка, 1988. — 272 с.
110. Можаяев Г. В. Об использовании симметрии в линейных задачах оптимального управления с квадратичным критерием качества / Г. В. Можаяев // Автоматика и телемеханика. — 1975. — № 6. — С. 22—30; № 7. — С. 23—31.
111. Морозова Н. К. О приведении по симметрии операторов энергии в теории колебаний молекул / Н. К. Морозова, В. П. Морозов // Докл. АН СССР. — 1968. — 182, № 3. — С. 538—541.
112. Назарова Л. А. Представление колчанов бесконечного типа / Л. А. Назарова // Изв. АН СССР. Сер. Математика. — 1973. — 37, № 4. — С. 752—791.
113. Павлов В. Г. Системы, инвариантные относительно групп преобразований / В. Г. Павлов // Кибернетика и вычисл. техника. — 1983. — Вып. 58. — С. 17—21.
114. Павловский Ю. Н. Декомпозиция моделей управляемых систем / Ю. Н. Павловский. — М.: Знание, 1985. — 32 с.
115. Павловский Ю. Н. Проблема декомпозиции в математическом моделировании / Ю. Н. Павловский, Т. Г. Смирнова. — М.: ФАЗИС, 1998. VI+266 с.
116. Павловский Ю. Н. Теория декомпозиции и некоторые ее приложения [Электронный ресурс] / Ю. Н. Павловский // VIII Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и технологий (ЭКОМОД-2014)». — 2014. — Режим доступа к ресурсу: [http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option\\_lang=rus&presentid=102](http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=102)

117. Павловский Ю. Н. Управление декомпозиционными структурами / Ю. Н. Павловский // Кибернетика и вычисл. техника. — 1983. — Вып. 58. — С. 11—16.
118. Папкович П. Ф. Об одной форме основных дифференциальных уравнений малых колебаний системы, не имеющей гироскопических членов / П. Ф. Папкович // Изв. Ленингр. политехн. Ин-та. Отд. техники, естествознания и математики. — 1929. — Вып. 32. — С. 1—14.
119. Перетяцько А. С. Напіввизначена оптимізація для розв'язування загальних квадратичних задач: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.05.02 / Анастасія Сергіївна Перетяцько. — Дніпропетровськ, 2015 — 181 с.
120. Петрашень М. И. Применение теории групп в квантовой механике / М. И. Петрашень, Е. Д. Трифонов. — М.: Наука, 1967. — 308 с.
121. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. — М.: Наука, 1970. — 279 с.
122. Писанецки С. Технология разреженных матриц / С. Писанецки. — М.: Мир, 1988. — 410 с.
123. Рабинович И. М. Курс строительной механики / И. М. Рабинович. — М.: Госстройиздат, 1954. — Ч. 2. — 544 с.
124. Резников Л. М. Свойства матриц эквивалентных моделей многомассовых диссипативных систем / Л. М. Резников // Динамические характеристики механических систем. — Киев: Наук. Думка, 1984. — С. 15—22.
125. Ройцин А. Б. Некоторые применения теории симметрии в задачах радиоспектроскопии / А. Б. Ройцин. — Киев: Наук. думка, 1973. — 100 с.
126. Рокар И. Неустойчивость в механике. — М.: Издательство иностранной литературы, 1959. — 287 с.
127. Сайт Украинской группы пользователей GAP [Электронный ресурс]. Режим доступа к ресурсу: <http://www.gap-system.org/ukrgap/>



128. Самойленко Ю. И. Методы теории линейных представлений групп симметрии и применение этих методов для дискретных систем / Ю. И. Самойленко // Кибернетика и вычисл. техника. — 1969. — Вып. 2. — С. 37—66.
129. Серр Ж. -П. Линейные представления конечных групп / Ж. -П. Серр. — М.: Мир, 1970. — 132 с.
130. Сметанин Е. В. К расчету крупномасштабной сети декомпозиционным и диакоптическим методами в рамках категорно-тензорной модели сетей. Поиск наиболее эффективного разбиения сети на подсети. / Е. В. Сметанин, Н. Б. Иванова // Вестник Иван. гос. ун-та, серия «Биология. Химия. Физика. Математика». — 2008. Вып. 2 — с. 40—44.
131. Сметанин Е. В. Категорно-тензорная модель сетей с движущимися элементами / Е. В. Сметанин // Там же — с. 44—49.
132. Смирнов В. П. Перестановочно-инверсионная симметрия и факторизационные разложения групп в теории молекул и кристаллов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат наук: спец. 01.04.01 Теоретическая физика / В. П. Смирнов. — Л., 1987. — 32 с.
133. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний / С. П. Стрелков. — М.: Наука, 1964. — 440 с.
134. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы / Р. Тьюарсон. — М.: Мир, 1977. — 189 с.
135. Удилов В. В. Исследование собственных колебаний стержневых систем с групповой симметрией / В. В. Удилов, Г. Т. Ковбаса // Кибернетика и вычисл. техника. — 1969. — Вып. 1. — С. 82—92.
136. Удилов В. В. Об аналитическом конструировании многомерных систем с известной группой симметрии / В. В. Удилов // Кибернетика и вычисл. техника. — 1970. — Вып. 5. — С. 13—18.
137. Удилов В. В. Применение методов абстрактной алгебры при исследовании многомерных систем автоматического управления / В. В.

- Удилов // Кибернетика и вычисл. техника. — 1974. — Вып. 23. — С. 20—27.
138. Уилкинсон Дж. Х. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра / Дж. Х. Уилкинсон, С. Райнш. — М.: Машиностроение, 1976. — 389 с.
139. Фейс К. Алгебра: Кольца, модули и категории: В 2 т / К. Фейс. — М.: Мир, 1977—1979. — Т. 1—2.
140. Ферми Э. Квантовая механика / Э. Ферми. — М.: Мир, 1968. — 367 с.
141. Фомин В. М. Применение теории представлений групп к определению частот и форм свободных колебаний стержневых систем с данной группой симметрии / В. М. Фомин // Распределенное управление процессами в сплошной среде. — Киев: ИК АН УССР, 1969. — Вып. 1. — С. 58—71.
142. Форсайт Дж. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений / Дж. Форсайт, К. Молер. — М.: Мир, 1977. — 168 с.
143. Фущич В. І. Вибрані праці / В. І. Фущич. — Київ: Наук. думка, 2005. — 448 с.
144. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989, 655 с.
145. Чеботарев Н. Г. Введение в теорию алгебр / Н. Г. Чеботарев. — М. ; Едиториал УРСС, 2003. — 88 с.
146. Численный анализ на Фортране: В 4-х т. Под ред. В.В. Воеводина. — М.: Изд-во МГУ, 1973. — Т. 1. — 446 с.
147. Шаваровский Б. З. Преобразования подобия разложимых матричных многочленов и некоторые их связи / Б. З. Шаваровский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 49:9 (2009), 1539—1553.
148. Шаваровский Б. З. Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований / Б. З. Шаваровский // Матем. заметки, 64:5 (1998), 769—782.

149. Шайкин М. Е. Теоретико-групповые методы декомпозиции симметрических многосвязных динамических систем / М. Е. Шайкин // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 9. — С. 22—32.
150. Шарый С. П. Курс вычислительных методов / С. П. Шарый. — Новосибирск: Ин-т вычислительных технологий СО РАН, 2014, — 507 с.
151. Эварестов Р. А. Квантовохимические методы в теории твердых тел / Р. А. Эварестов. — Л.: Изд-во Ленингр. Ун-та, 1982. — 280 с.
152. Эварестов Р. А. Методы теории групп в квантовой химии твердого тела / Р. А. Эварестов, В. П. Смирнов. — Л.: Из-во Ленинград. Ун-та, 1987, — 472 с.
153. Эллиот Дж. Симметрия в физике: В 2 т / Дж. Эллиот, П. Добер. — М.: Мир, 1983. — Т. 1—2.
154. Эстербю О. Прямые методы для разреженных матриц / О. Эстербю, З. Златев. — М.: Мир, 1987. — 120 с.
155. Якубович Е. Д. Построение систем замещения для некоторого класса многомерных линейных систем автоматического управления / Е. Д. Якубович // Изв. вузов. Радиофизика. — 1969. — 12, № 3. — С. 362—377.
156. Bazilevich Yu. N. Hidden Symmetry Exposure. The Mechanical Systems with the Hard Structure of Forces / Yu. N. Bazilevich // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — Kyiv, Institute of Mathematics, 2004. — Vol. 50, Part 3, 1261—1265
157. Bazilevich Yu. N. Similarity transformation of the pair of matrices to the best partitioned-triangular form / Yu. N. Bazilevich // 7-а міжнародна алгебраїчна конференція в Україні: тези доповідей. — Київ, Ін-т математики НАН України, 2009. — С. 21.
158. Bazilevich Yu. N. The Simultaneous Reduction of Matrices to the Block-Triangular Form / Yu. N. Bazilevich [E-resource] // Physics Journal. — 2015. Vol. 1, No. 2, pp. 54—61. Access to the resource: <http://files.aiscience.org/journal/article/html/70400061.html>.

159. Carter F. W. The running of locomotives with reference to their tendency to derail / F. W. Carter // *Selec. Eng. Pap.* — / *Inst. Civil Eng.* — 1930. — № 91. — P. 3—25.
160. Chang E. H. Comparative study of the linear and non-linear locomotive response / E. H. Chang, V. K. Garg, C. H. Goodspeed et al. // *Trans. ASME, Dyn. Syst. Meas. and Contr.* — 1979. — 101, Sept. — P. 263—271.
161. Cohen M. Analytical asymmetrical wareguide junctions / M. Cohen, W. K. Kahn // *IRE Trans. Micr. Theory and Techn.* — 1960. — Oct. — P. 430—441.
162. de Klerk E. Numerical block diagonalization of matrix \*-algebras with application to semidefinite programming / Etienne de Klerk, Cristian Dobre, Dmitrii V. Pasechnik // *Math. Program., Ser. B* (2011) 129: 91—111.
163. Eighth International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. June 21-27, 2009 [E-resource] Access to the resource: <http://www.imath.kiev.ua/~appmath/conf.html>.
164. Falb P. L. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems / P. L. Falb, W. A. Wolovich // *IEEE Trans. Automat. Contr.* — 1967. — 12, № 6. — P. 651—659.
165. Garivaltis D. S. Fatigue damage of the locomotive suspension elements under random loading / D. S. Garivaltis, V. K. Garg, A. F. D'Souza // *Trans. ASME, J. Mech. Design.* — 1981. — 103, Oct. — P. 871—880.
166. Grujić L. T. Asymptotic stability and instability of large-scale systems / L. T. Grujić, D. D. Šiljak // *IEEE Trans. Automat. Contr.* — 1973. — 18, № 6. — P. 636—645.
167. Kalker J. J. Simplified theory of rolling contact / J. J. Kalker // *Delft Progr. Rep. C.* — 1973. — 1. — P. 1—10.
168. Maehara T. A numerical algorithm for block-diagonal decomposition of matrix \*-algebras with general irreducible components / Takanori Maehara, Kazuo Murota // *Japan J. Indust. Appl. Math.* (2010) 27: 263—293.

169. Maglev [E-resource] // Wikipedia, the free encyclopedia. — 2015 — Access to the resource: [https://en.wikipedia.org/wiki/Maglev#cite\\_note-31](https://en.wikipedia.org/wiki/Maglev#cite_note-31).
170. Majumdar A. K. On the decoupling of non-linear systems / A. K. Majumdar, A. K. Choudhury // *Int. J. Contr.* — 1972. — 16, № 4. — P. 705—718.
171. Mitropolsky Yu. A. *Nonlinear Mechanics, Groups and Symmetry* / Yu. A. Mitropolsky, A. K. Lopatin. — Amsterdam: Springer-Science+Business Media, B.Y. 1995, 390 p.
172. Murota K. A numerical algorithm for block-diagonal decomposition of matrix \*-algebras with application to semidefinite programming / Kazuo Murota, Yoshihiro Kanno, Masakazu Kojima, Sadayoshi Kojima. // *Japan J. Indust. Appl. Math.* (2010) 27: 125–160.
173. Sergeichuk V. V. Canonical matrices and related questions / V. V. Sergeichuk // *Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування.* — Т. 57. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. — 326 с.
174. Sergeichuk V. V. Canonical matrices for liner matrix problem / V. V. Sergeichuk // *Linear Algebra and its Applications* 317 (2000) 53 — 102.
175. Shavaovskii B. Z. On a Metod for Reducing a Pair of Matrices to Block Diagonal Form by a Similarity Transformation / B. Z. Shavaovskii // *Computational Mathematics and Mathematical Phisics* Vol. 43 No 9 2003.
176. Todd M. J. Semidefinite optimization / M. J. Todd // *Acta Numerica.* — 2001. — № 10. — P. 515-560.
177. UF Sparse Matrix Collection. [E-resource] // Tim Davis — 2015 — Access to the resource: [http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/list\\_by\\_id.html](http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/list_by_id.html)
178. Wonham W. M. Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: a geometric approach / W. M. Wonham, A. S. Morse // *SIAM J. Contr.* — 1970. — 8, № 1. — P. 1—18.

**ДОДАТОК А. ПРОГРАМА ЗНАХОДЖЕННЯ  
ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ  
АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ  
ВЕЛИКОЇ СИЛЬНО РОЗРІДЖЕНОЇ МАТРИЦІ КОЕФІЦІЄНТІВ**

**А.1. Автори програми**

**Базилевич Юрій Миколайович**

49106 Україна, Дніпро, пр. Героїв, 12, кв. 737

Тел. дом. (0562) 68-83-91, роб. 47-16-00

<b>Булдович Олександр Леонтійович</b>
---------------------------------------

**А.2. Призначення програми**

Програма знаходження загального розв'язку системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь у випадку великої сильно розрідженої матриці коефіцієнтів. Для звичайних матриць також є програми, див. [1, с. 51].

Додаткові можливості програми є такими:

1. Обчислення рангу матриці.
2. Перевірка лінійної залежності векторів.
3. Вибір базису в скінченновимірному підпросторі (мається на увазі підпростір, заданий набором векторів, лінійною оболонкою яких він є).
4. Знаходження підпростору, ортогонального даному.
5. Знаходження власних векторів матриці при відомих власних числах.

### А.3. Підготовка вихідних даних

Щоб скористатися програмою, потрібно записати матрицю коефіцієнтів в упакованому вигляді, тобто без нульових коефіцієнтів.

Можливими є три варіанти задавання файлу з упакованою матрицею:

1. Текстовий файл з роздільником: кожен з ненульових коефіцієнтів є записаним в окремому рядку текстового файлу. При цьому вказуються через коми номер рядка, номер стовпця цього елемента і його значення (див. приклад 1).

2. Текстовий файл. Файл складається аналогічним пункту 1-му чином, але при цьому перший стовпець файлу завширшки 6 символів містить номер рядка, другий стовпець завширшки 6 символів містить номер стовпця цього елемента і третій стовпець завширшки не більше 20 символів містить значення елемента (див. приклад 2).

3. База даних: структуру бази даних наведено нижче, (див. приклад 3), вміст полів бази відповідає вмісту текстового файлу, описаному в пункті 2-му.

### А.4. Приклади

Вихідна матриця (коефіцієнти системи рівнянь)

4.00	– 1.00	0.00	3.00
7.00	0.00	5.00	1.00
0.00	– 0.70	– 2.00	1.70

\*\*\*\* Приклад 1 (текстовий файл з роздільником)

1,1,4.00000  
 1,2,-1.00000  
 1,4,3.00000  
 2,1,7.00000  
 2,3,5.00000  
 2,4,1.00000  
 3,2,-0.70000  
 3,3,-2.00000  
 3,4,1.70000

\*\*\*\* Приклад 2 (текстовый файл)

1 + 1 4.00000  
 1 2 -1.00000  
 1 4 3.00000  
 2 1 7.00000  
 2 3 5.00000  
 2 4 1.00000  
 3 2 -0.70000  
 3 3 -2.00000  
 3 4 1.70000

\*\*\*\* Приклад 3 (база данных)

Structure for database: AA.DBF

Field	Field Name	Type	Width	Dec	Index
1	STK	Numeric	6		
2	STLB	Numeric	6		
3	AA	Float	20	9	



Record#	STK	STLB	AA
1	1	1	4.00000
2	1	2	-1.00000
3	1	4	3.00000
4	2	1	7.00000
5	2	3	5.00000
6	2	4	1.00000
7	3	2	-0.70000
8	3	3	-2.00000
9	3	4	1.70000

Результат розв'язку прикладу є таким (вміст файлу SOLVE.DBF):

1	2	1.000000000
1	1	0.250000000
1	3	-0.350000000
2	4	1.000000000
2	1	-0.750000000
2	3	0.850000000

### **A.5. Використання програми**

Слід звернутися до програми і вказати розміри матриці:  $n$ ,  $m$ , коефіцієнти  $E1$  та  $E2$ , що характеризують точність обчислень. Для прикладу, що розглядається (див. пункт «Приклад»), ці числа дорівнюють:  $n = 3$ ,  $m = 4$ ,  $E1 = 0.000\ 000\ 001$ ,  $E2 = 0.000\ 000\ 01$ .

Далі вказується ім'я файлу, що містить матрицю в упакованому вигляді (див. пункт «Підготовка вихідних даних»), і номер варіанта упаковки.

Якщо фактична кількість рівнянь є більшою, ніж зазначена, то програма ставить питання про необхідність виходу з процесу вирішення.

## А.6. Текст програми SLAU5.PRG

Мова програмування: FoxPro. Версія: від FoxPro 2.6 до Visual FoxPro 9.

Текст програми є таким:

```

*:*****
**
*:      Program: E:\SLAU\SLAU5.PRG
*:
*:      System: Решение системы лин. алгебр. уравнений
*:      Author: Базилевич Ю.Н., Булдович А.Л.
*: Last modified: 19.01.99, 26.12.2015
*:
*:      Calls:  ex2.prg
*:
*:      Uses:  EX.DBF
*:             : SHABLON.DBF
*:             : AA.DBF
*:             : AB.DBF
*:             : SOLVE.DBF
*:
*:      Indexes: STK                (tag in AB.CDX)
*:             : STKSTLB           (tag in AB.CDX)
*:
*:      CDX files: AB.CDX
*:
*:      Other Files: MYHELP
*:             : FOXHELP.DBF
*:*****
**
* nn-количество уравнений

```

\* m -количество неизвестных

\*\*\*\*\*

\* объявление в программах локальных временных

\* переменных и массивов

\*\*\*\*\*

```
PRIVATE nn, m, eps1, eps2, vedstr, minc, minkvo;
        nn1, kel, i, j, K, s, y, multil, p, p2, beg, var1;
        tip, name1, answer2
PRIVATE baz, mass
```

```
SET HELP TO myhelp
ON KEY LABEL f1 HELP
set talk off
```

\* уничтожение старого решения

```
CLOSE DATABASES
```

```
USE solve
```

```
DELETE ALL
```

```
PACK
```

```
nn=3
```

```
m=4
```

\* eps1, eps2-абсолютная и относ.погрешности

```
*eps1=0.000000001
```

```
*eps2=0.000000001
```

```
eps1 = 1.0E-15
```

```
eps2 = 1.0E-9
```

```
tip=1
```

```
name1='aa.DBF'
```

```
answer2=1
```

```
DO ex2
```

```
DO CASE
case answer2=2
  CLOSE DATABASES
  IF FILE('dv_foxhelp.chm')
    SET HELP TO dv_foxhelp.chm
  ENDIF
  set talk on
  RETURN          && R E T U R N
CASE tip=1
  USE (name1)
CASE tip=2
  USE shablon
  erase aa.dbf
  COPY TO aa
  USE aa
  APPEND FROM (name1) SDF
CASE tip=3
  USE shablon
  erase aa.dbf
  COPY TO aa
  USE aa
  APPEND FROM (name1) DELIMITED
ENDCASE

* база данных содержит коэффициенты при неизвестных
erase ab.dbf
COPY TO ab
USE ab
* "обнулить" малые элементы
scan for abs(aa) < eps1
  replace stk with 0
endscan

DIMENSION baz(m)
```

```

FOR i=1 TO m
    baz(i)=0
ENDFOR    && i

INDEX ON stk TAG stk
go bottom
nn1=stk          && фактическое число строк (уравнений)
if nn1 > nn
    y='Всего строк '+ltrim(str(nn1))+ ' а не '+ltrim(str(nn))+'.
Выход?'
    * if quietn(y)
        if MESSAGEBOX(y, 276, 'программа спрашивает') = 6
            CLOSE DATABASES
            IF FILE('dv_foxhelp.chm')
                SET HELP TO dv_foxhelp.chm
            ENDIF
            set talk on
            RETURN          && R E T U R N
        endif
    endif
INDEX ON STR(stk)+STR(stlb) TAG stkstlb

vedstr=1          && номер ведущей строки. Сюда будет перенесена
                  && вед. строка после выбора вед. элемента

SET NEAR ON
DO WHILE vedstr<=nn1
    wait window nowait "Всего уравнений: " + alltrim(str(nn1)) ;
        + '. Обработывается - ' + alltrim(str(vedstr)) + '-
е.'
    SET ORDER TO TAG 1

    * если "ведущая" строка нулевая - удаляем
    IF .NOT.SEEK(vedstr)
        IF (vedstr < nn1)

```

```

DO WHILE SEEK(nn1)
    REPLACE stk WITH vedstr
ENDDO

ELSE
    * "ведущая" строка за пределами матрицы
ENDIF    && (vedstr < nn1)
* ранг матрицы
nn1=nn1-1
ENDIF

IF vedstr <= nn1    && если "ведущая" строка не была
                    && за пределами матрицы
* поиск строки с min к-вом ненулевых эл-тов
minc=vedstr
minkvo=m
SEEK(vedstr)
DO WHILE .NOT.EOF()
    kel=0
    y=stk
    DO WHILE stk=y
        kel=kel+1
        SKIP
    ENDDO    && stk=y
    IF kel<minkvo
        minkvo=kel
        minc=y
    ENDIF    && kel
ENDDO    && .not.eof()

* перестановка строк
IF minc # vedstr
    * vedstr -->-1
    DO WHILE SEEK(vedstr)
        REPLACE stk WITH -1

```

```

ENDDO
* minc -->vedstr
DO WHILE SEEK(minc)
    REPLACE stk WITH vedstr
ENDDO
* -1 -->minc
DO WHILE SEEK(-1)
    REPLACE stk WITH minc
ENDDO
ENDIF

* копируем вед.строку в массив mass (с учетом сортировки)
SET ORDER TO TAG 2
COPY TO ARRAY mass FIELDS stlb, aa FOR stk=vedstr

* количество элементов в массиве
len1 =ALEN(mass,1)

* ведущий элемент-наибольший в строке
* s - искомый элемент;k - номер столбца
K=1
s=ABS( mass(1,2) )
FOR i=2 TO len1
    IF ABS( mass(i,2) ) >s
        K = i
        s=ABS( mass(i,2) )
    ENDIF
ENDFOR  && i
s=mass(K,2)
K=mass(K,1)
baz(K)=vedstr

* Ж о р д а н о в ы      и с к л ю ч е н и я

```

```

* преобразовываем эл-ты ведущей строки
FOR i=1 TO len1
    mass(i,2)=mass(i,2)/s
ENDFOR    && i

SET EXAC OFF
SET NEAR ON

GO TOP
* пока не конец базы данных
DO WHILE (.NOT.EOF())
    y=stk
    * если не ведущая строка, то преобразовываем
    IF (y # vedstr)
        * нахождение в текущей строке i элемента
        * с индексом k
        * если найденный эл-т суц-т( # 0)
        IF SEEK(STR(y)+STR(K))
            multil=aa
            SEEK(STR(y))
            * преобразовываем элементы текущей строки
            FOR j=1 TO len1
                IF SEEK(STR(y)+STR(mass(j,1)))    &&
                    A(y,j)#0

                    p=ABS(aa)
                    var1=aa-mass(j,2)*multil
                    p2=ABS(var1)
                    IF (p2<(eps2*p).OR.(p2<eps1))
                        REPLACE stk WITH 0
                    ELSE
                        * если эл-т в базе данных # 0,
                        * записываем измен-е значение
                        REPLACE aa WITH var1
                    ENDIF
            ENDFOR
        ENDIF
    ENDIF
ENDWHILE

```



```

ELSE      &&  SEEK(STR(y)+STR(mass(j,1)))      &&
A(y,j)#0

      var1=(-1)*mass(j,2)*multi1
      if abs(var1) >= eps1
        * используем пустую запись
        * или добавляем новую
        IF .NOT.SEEK(STR(0))
          APPEND BLANK
        ENDIF
        * добавляем измен-е значение
        REPLACE stk WITH y, stlb WITH mass(j,1),
aa WITH var1

      endif && abs(var1) >= eps1
      ENDIF      &&  SEEK(STR(y)+STR(mass(j,1)))      &&
A(y,j)#0

      ENDFOR      && j
      ENDIF
      ELSE      && y # vedstr
        FOR i=1 TO len1
          REPLACE aa WITH mass(i,2)
          skip
        ENDFOR      && i
      ENDIF      && (y # vedstr)
      SEEK(STR(y+1))      && переход к новой строке
ENDDO      && (.not.eof()).and.(stk # -1)

      SET EXAC ON
      RELEASE mass
      ENDIF      && vedstr <= nn1
      vedstr=vedstr+1
      SET ORDER TO TAG 1
      go bottom
      nn1=stk      && фактическое число строк
ENDDO

```

```
SET NEAR OFF
```

```
* Составление лин. независимых решений
```

```
l=m-nn1
```

```
SELECT B
```

```
USE solve
```

```
K=0      && номер переменной
```

```
FOR i=1 TO m
```

```
  IF baz(i)=0  && если переменная - свободная (не базисная)
```

```
    K=K+1
```

```
    SELECT B
```

```
    APPEND BLANK
```

```
    REPLACE stk WITH K, stlb WITH i, sol WITH 1 && св. переменная = 1
```

```
    FOR j=1 TO m
```

```
      IF baz(j)#0
```

```
        SELECT A
```

```
        SET ORDER TO TAG 2
```

```
        IF SEEK(STR(baz(j))+STR(i))
```

```
          bb=-aa
```

```
          SELECT B
```

```
          APPEND BLANK
```

```
          REPLACE stk WITH K, stlb WITH j, sol WITH bb
```

```
        ENDIF
```

```
      ENDIF
```

```
    ENDFOR    && j
```

```
  ENDIF
```

```
ENDFOR    && i
```

```
wait window nowait "Решение в файле SOLVE.DBF. Ранг равен " ;
```

```
  + alltrim(str(nn1)) + '. К-во решений: ' + alltrim(str(l))  
+ '.'
```

```
CLOSE DATABASES
```

```
IF FILE('dv_foxhelp.chm')
    SET HELP TO dv_foxhelp.chm
ENDIF
set talk on
*: EOF: SLAU5.PRG
```

### A.7. Текст підпрограми ex2.prg

```
* диалог с пользователем                                ex2.prg
*****
DEFINE WINDOW w1 ;
    FROM 1, 1 ;
    TO 23,55 ;
    TITLE "укажите размеры матрицы, точность и тип ввода
исходных данных" ;
    FLOAT ;
    NOCLOSE ;
    PANEL ;
    COLOR SCHEME 1
ACTIVATE WINDOW w1

*COLOR GR+/B,W+/B,GR+/B,GR+/B,GR+/B,GR+/B,W+/B,R+/B,GR+/B,W/B

@ 4,1 SAY "dimension of the matrix"
@ 5,8 GET nn ;
    SIZE 1,6 ;
    DEFAULT 0 COLOR ,W+/BG,,,,,,,,,
@ 5,15 SAY "x"
@ 5,17 GET m ;
    SIZE 1,6 ;
    DEFAULT 0 COLOR ,W+/BG,,,,,,,,,
```

```
@ 7,10 SAY "EPS1"
@ 8,0 GET eps1 ;
    SIZE 1,24 ;
    DEFAULT 0 COLOR ,W+/BG,,,,,,,,,
@ 10,10 SAY "EPS2"
@ 11,0 GET EPS2 ;
    SIZE 1,24 ;
    DEFAULT 0 COLOR ,W+/BG,,,,,,,,,
@ 14,4 SAY "File Type"
@ 16,2 GET tip ;
    PICTURE '@*RVN database;text;delimited text file' ;
    SIZE 1,32,0 ;
    DEFAULT 1
@ 20,7 GET answer2 ;
    PICTURE "@*HT \!<OK>;\?<CANCEL>" ;
    SIZE 1,8,6 ;
    DEFAULT 1
READ CYCLE

RELEASE WINDOW w1
*? nn, m, eps1, eps2, tip, answer2

IF answer2 # 2  && открытие файла
    IF tip = 1
        name1=GETFILE('DBF')
    else
        name1=GETFILE('txt')
    ENDIF
ENDIF

IF EMPTY(name1) && если файл не выбран, то "CANCEL"
    answer2 = 2
ENDIF
```

## А.8. Література

1. Базилевич Ю. Н. Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики / Ю. Н. Базилевич. — Киев: Наук. думка, 1987. — 156 с.
2. Базилевич Ю. Н. Алгоритм нахождения общего решения системы линейных однородных алгебраических уравнений в случае сверхбольшой разреженной матрицы коэффициентов / Ю. Н. Базилевич, А. Л. Булдович // Математические модели и современные технологии. Сб. науч. тр. / НАН Украины. Ин-т математики. — Киев, 1998. — С. 12, 13.

**ДОДАТОК Б. ПРОГРАМА ЗНАХОЖДЕННЯ МНОЖИНИ МАТРИЦЬ,  
КОМУТУЮЧИХ З ДАНИМИ МАТРИЦЯМИ  
(ВИПАДОК ВЕЛИКИХ МАТРИЦЬ)**

Програма знаходить базис централізатора (множини матриць, комутуючих з даними матрицями). Використовується той самий підхід, що й в програмі SLAU5.PRG (додаток А).

Підготовка вихідних даних:

Щоб скористатися програмою, потрібно записати кожен з матриць коефіцієнтів в окремому текстовому файлі. Кожен рядок матриці повинен бути розташованим у відповідному рядку текстового файлу. Елементи рядка розділяються комами.

Приклад:

```
1, 1, 4.2
1, 2, -1
1, 4, 3
2, 1, 7
```

Текст програми:

```
*:*****
**
*:      Program: E:\SLAU_p\CENTER.PRG
*: System:  нахождение множества матриц, коммутирующих с данными
*:      Author:  Базилевич Ю.Н., Булдович А.Л.
*: Copyright (c) 1994, Базилевич Ю.Н., Булдович А.Л.
*: Last modified: 29.04.96
*:      Calls:  MATR.SPR, slau5_.prg
```

```

*:          : MASS()
*:          Uses: EX.DBF
*:          : SHABLON.DBF
*:          : AA.DBF
*:          : AB.DBF
*:          : SOLVE.DBF
*:          Indexes: STK          (tag in AB.CDX)
*:          : STKSTLB          (tag in AB.CDX)
*:          CDX files: AB.CDX
*:          Other Files: MYHELP.dbf
*:          : FOXHELP.DBF
* nmatr - к-во матриц
* n - их порядок
*****
PRIVATE  n,nmatr,kmatr,eps1,eps2,i,j,K,name1,command,smesh
private names, b

set talk off
SET HELP TO myhelp2
ON KEY LABEL f1 HELP
dimension names(2)

n=3
nmatr=2
* eps1,eps2-абсолютная и относ.погрешности
eps1=0.0000000001
eps2=0.00000001

name1='mA.txt'
answer2=1
DO matr.spr
if answer2=1          && если не нажали ESC
    smesh=0
    * используемый алгоритм ограничивает порядок матриц

```

```
* числом 200 (максимальное число символов в записи
* должно быть меньше 40 000)

*создание шаблона для исходных матриц
close databases
erase file2.dbf
create table file2 ( field_name c(10), field_type c(1) ;
    , field_len n(3,0), field_dec n(3,0) )
for i=1 to n
    APPEND BLANK
    REPLACE field_name WITH "f"+alltrim(str(i))
    REPLACE field_type WITH "N"
    REPLACE field_len WITH 20
    REPLACE field_dec WITH 9
next

*составление большой системы уравнений
use
erase uravn.dbf
erase uravn.cdx
create table uravn (STK N(6,0), STLB N(6,0), AA N(18,9) )
copy stru to work
use work

for kmatr=1 to nmatr
    use
    erase file1.dbf
    CREATE file1 FROM file2
    command = 'append from ' + names(kmatr) + ' delimited'
    &command
    copy to array b
    use work
    =furavn(n,@b,smesh)
    smesh = smesh + n^2
```



```
        release b
    next

* вычисление коэффициентов (приведение подобных)
* и удаление нулей
    set safety off
    index on str(stk)+str(stlb) to il
    total to wrk on str(stk)+str(stlb) fields aa
    use wrk
    copy to uravn for abs(aa)>eps1
    use
    set safety on

    erase work.idx
    erase wrk.dbf
    erase work.dbf
    erase file1.dbf
    erase file2.dbf

    m=n*n
    use uravn
    nn=nmatr*n^2
    do slau5_ with m, nn, eps1, eps2
endif      && answer2=1
CLOSE DATABASES

IF FILE('C:\FOXPRO2\FOXHELP.DBF')
    SET HELP TO C:\foxpro2\foxhelp.dbf
ENDIF

set talk on
*: EOF: center.PRG

*
*****
```

```

*          *
*          * 29.04.96          MATR.SPR

```

```
14:50:17
```

```
*          *
```

```
*
```

```
*****
```

```
*          *
```

```
*          * Базилевич Ю.Н. и другие
```

```
*          *
```

```
*          * Copyright (c) 1996 Company Name
```

```
*          * Address
```

```
*          * City,          42-08-21
```

```
*          *
```

```
*          * Description:
```

```
*          * This program was automatically generated by GENSCRN.
```

```
*          *
```

```
*
```

```
*****
```

```
#REGION 0
```

```
REGIONAL m.currarea, m.talkstat, m.compstat
```

```
IF SET("TALK") = "ON"
```

```
    SET TALK OFF
```

```
    m.talkstat = "ON"
```

```
ELSE
```

```
    m.talkstat = "OFF"
```

```
ENDIF
```

```
m.compstat = SET("COMPATIBLE")
```

```
SET COMPATIBLE FOXPLUS
```

```
*
```

```
*****
```

```
*          *
```

```

*           *                               Window definitions
*           *
*
*****

IF NOT WEXIST("_ra00vswts")
    DEFINE WINDOW _ra00vswts ;
        FROM 0, 0 ;
        TO 22,77 ;
        TITLE "Коммутирующая матрица" ;
        FLOAT ;
        NOCLOSE ;
        SHADOW ;
        SYSTEM ;
        COLOR SCHEME 8
ENDIF

*
*****

*           *                               MATR Screen Layout
*           *
*
*****

#REGION 1
IF WVISIBLE("_ra00vswts")
    ACTIVATE WINDOW _ra00vswts SAME
ELSE
    ACTIVATE WINDOW _ra00vswts NOSHOW
ENDIF

@ 5,10 SAY "EPS1"
@ 8,10 SAY "EPS2"
@ 6,0 GET eps1 ;

```

```
        SIZE 1,24 ;
        DEFAULT 0
@ 9,0 GET EPS2 ;
        SIZE 1,24 ;
        DEFAULT " "
@ 1,1 SAY "(с) Базилевич Ю.Н."
@ 0,0 TO 3,36
@ 2,1 SAY "Булдович А.Л. 1996"
@ 12,0 SAY "Порядок"
@ 12,8 SAY "матриц"
@ 14,0 SAY "Их количество"
@ 12,15 GET n ;
        SIZE 1,6 ;
        DEFAULT 0
@ 14,15 GET nmatr ;
        SIZE 1,6 ;
        DEFAULT 0 ;
        VALID _ra00vswzg()
@ 20,7 GET answer2 ;
        PICTURE "@*HT \!OK;\?Отмена" ;
        SIZE 1,8,6 ;
        DEFAULT 1

IF NOT WVISIBLE("_ra00vswts")
    ACTIVATE WINDOW _ra00vswts
ENDIF

READ CYCLE

RELEASE WINDOW _ra00vswts

#REGION 0
IF m.talkstat = "ON"
    SET TALK ON
```

```

ENDIF
IF m.compstat = "ON"
    SET COMPATIBLE ON
ENDIF

*
*****
*      *
*      * _RA00VSWZG          nmatr VALID
*      *
*      * Function Origin:
*      *
*      * From Screen:          MATR,      Record Number:    13
*      * Variable:            nmatr
*      * Called By:            VALID Clause
*      * Object Type:         Field
*      * Snippet Number:      1
*      *
*
*****

FUNCTION _ra00vswzg    && nmatr VALID
#REGION 1
private i,y, text

@ 0, 43 clear
dimension names(nmatr)
for i=1 to nmatr
    @ i,43 say alltrim(str(i)) +') .'
next i
for i=1 to nmatr
    y='ma.txt'
    text='где ' + ltrim(str(i)) + '-я матрица?'

```

```

y=getfile('txt', text)
@ i,49 say y
names(i)=y
next i

```

```

*:*****
**
*:
*:      Program: E:\SLAU\SLAU5_.PRG
*:
*:      System:   Решение системы лин. алгебр. уравнений
(подпрограмма)
*:      Author:  Базилевич Ю.Н., Булдович А.Л.
*:      Last modified: 29.04.96
* nn-количество уравнений
* m -количество неизвестных
* eps1,eps2-абсолютная и относ.погрешности
*****
parameters m, nn, eps1, eps2

PRIVATE  vedstr, minc, minkvo;
        nn1, kel, i, j, K, s, y, multil, p, p2, beg, var1, tip, name1
private baz, mass

DIMENSION baz(m)      && в массив записываются номера базисных
переменных
FOR i=1 TO m
        baz(i)=0
ENDFOR      && i

use uravn      && база данных содержит коэффициенты при неизвестных
* "обнулить" малые элементы
scan for abs(aa) < eps1

```

```

    replace stk with 0
endscan

INDEX ON stk TAG stk
go bottom
nn1=stk          && фактическое число строк (уравнений)
if nn1 > nn
    y='Всего строк '+ltrim(str(nn1))+ ' а не ' ;
                                     +ltrim(str(nn))+'. Выход?'
    if quiestn(y)
        RETURN
    endif
endif
INDEX ON STR(stk)+STR(stlb) TAG stkstlb

vedstr=1        && номер ведущей строки
SET NEAR ON
DO WHILE vedstr<=nn1
    wait window nowait "Всего уравнений: " + alltrim(str(nn1)) ;
        + '. Обрабатывается - ' + alltrim(str(vedstr)) + '-
e.'
    SET ORDER TO TAG 1
    IF .NOT.SEEK(vedstr)
        * если ведущая строка нулевая - удаляем
        IF (vedstr < nn1)
            DO WHILE SEEK(nn1)
                REPLACE stk WITH vedstr
            ENDDO
        ELSE
            * ведущая строка за пределами матрицы
        ENDIF      && (vedstr < nn1)
        * ранг матрицы
        nn1=nn1-1
    ENDIF

```

```

IF vedstr <= nn1      && если ведущая строка не была
                    && за пределами матрицы
* поиск строки с min к-вом ненулевых эл-тов
minc=vedstr
minkvo=m
SEEK(vedstr)
DO WHILE .NOT.EOF()
  kel=0
  y=stk
  DO WHILE stk=y
    kel=kel+1
    SKIP
  ENDDO      && stk=y
  IF kel<minkvo
    minkvo=kel
    minc=y
  ENDIF      && kel
ENDDO      && .not.eof()

* перестановка строк
IF minc # vedstr
  * vedstr -->-1
  DO WHILE SEEK(vedstr)
    REPLACE stk WITH -1
  ENDDO
  * minc -->vedstr
  DO WHILE SEEK(minc)
    REPLACE stk WITH vedstr
  ENDDO
  * -1 -->minc
  DO WHILE SEEK(-1)
    REPLACE stk WITH minc
  ENDDO
ENDIF

```



```

* копируем вед.строку в массив mass (с учетом сортировки)
SET ORDER TO TAG 2
COPY TO ARRAY mass  FIELDS stlb,aa FOR stk=vedstr

* количество элементов в массиве
len1 =ALEN(mass,1)

* ведущий элемент-наибольший в строке
* s - искомый элемент;k - номер столбца
K=1
s=ABS( mass(1,2) )
FOR i=2 TO len1
  IF ABS( mass(i,2) ) >s
    K = i
    s=ABS( mass(i,2) )
  ENDIF
ENDFOR  && i
s=mass(K,2)
K=mass(K,1)
baz(K)=vedstr

* Ж о р д а н о в ы      и с к л ю ч е н и я

* преобразовываем эл-ты "ведущей" строки
FOR i=1 TO len1
  mass(i,2)=mass(i,2)/s
ENDFOR  && i

SET EXAC OFF
SET NEAR ON
GO TOP

* пока не конец базы данных
DO WHILE (.NOT.EOF())

```

```

y=stk
* если не "ведущая" строка, то преобразовываем
IF (y # vedstr)
  * нахождение в текущей строке i элемента
  * с индексом k
  * если найденный эл-т суц-т ( # 0)
  IF SEEK(STR(y)+STR(K))
    multil=aa
    SEEK(STR(y))
  * преобразовываем элементы текущей строки
  FOR j=1 TO len1
    IF SEEK(STR(y)+STR(mass(j,1)))    && A(y,j)#0
      p=ABS(aa)
      var1=aa-mass(j,2)*multil
      p2=ABS(var1)
      IF (p2<(eps2*p).OR.(p2<eps1))
        REPLACE stk WITH 0
      ELSE
        * если э-т в базе данных ( # 0),
        * записываем измен-е значение
        REPLACE aa WITH var1
      ENDIF
    ELSE    &&    SEEK(STR(y)+STR(mass(j,1)))
      &&A(y,j)#0
      var1=(-1)*mass(j,2)*multil
      if abs(var1) >= eps1
        * используем пустую запись
        * или добавляем новую
        IF .NOT.SEEK(STR(0))
          APPEND BLANK
        ENDIF
        * добавляем измен-е значение
        REPLACE stk WITH y, stlb WITH mass(j,1);

```

```

var1
                endif  &&  abs(var1) >= eps1
            ENDIF      &&      SEEK(STR(y)+STR(mass(j,1)))
&&A(y,j)#0
                ENDFOR    && j
            ENDIF
        ELSE          && y # vedstr
            FOR i=1 TO len1
                REPLACE aa WITH mass(i,2)
                skip
            ENDFOR    && i
        ENDIF      && (y # vedstr)
        SEEK(STR(y+1))          && переход к новой строке
    ENDDO          && (.not.eof()).and.(stk # -1)

    SET EXAC ON
    RELEASE mass
    ENDIF  && vedstr <= nn1
    vedstr=vedstr+1
    SET ORDER TO TAG 1
    go bottom
    nn1=stk      && фактическое число строк
ENDDO
SET NEAR OFF

* Составление лин. независимых решений

l=m-nn1

SELECT B
USE solve
DELETE ALL
PACK

```

```
K=0
FOR i=1 TO m
  IF baz(i)=0
    K=K+1
    SELECT B
    APPEND BLANK
    REPLACE stk WITH K, stlb WITH i, sol WITH 1
    FOR j=1 TO m
      IF baz(j)#0
        SELECT A
        SET ORDER TO TAG 2
        IF SEEK(STR(baz(j))+STR(i))
          bb=-aa
          SELECT B
          APPEND BLANK
          REPLACE stk WITH K, stlb WITH j, sol WITH bb
        ENDIF
      ENDIF
    ENDFOR    && j
  ENDIF
ENDFOR    && i

wait window nowait "Решение в файле SOLVE.DBF. Ранг равен " ;
  + alltrim(str(nn1)) + '. Решений - ' + alltrim(str(l)) + ' .'
*: EOF: SLAU5_.PRG
```



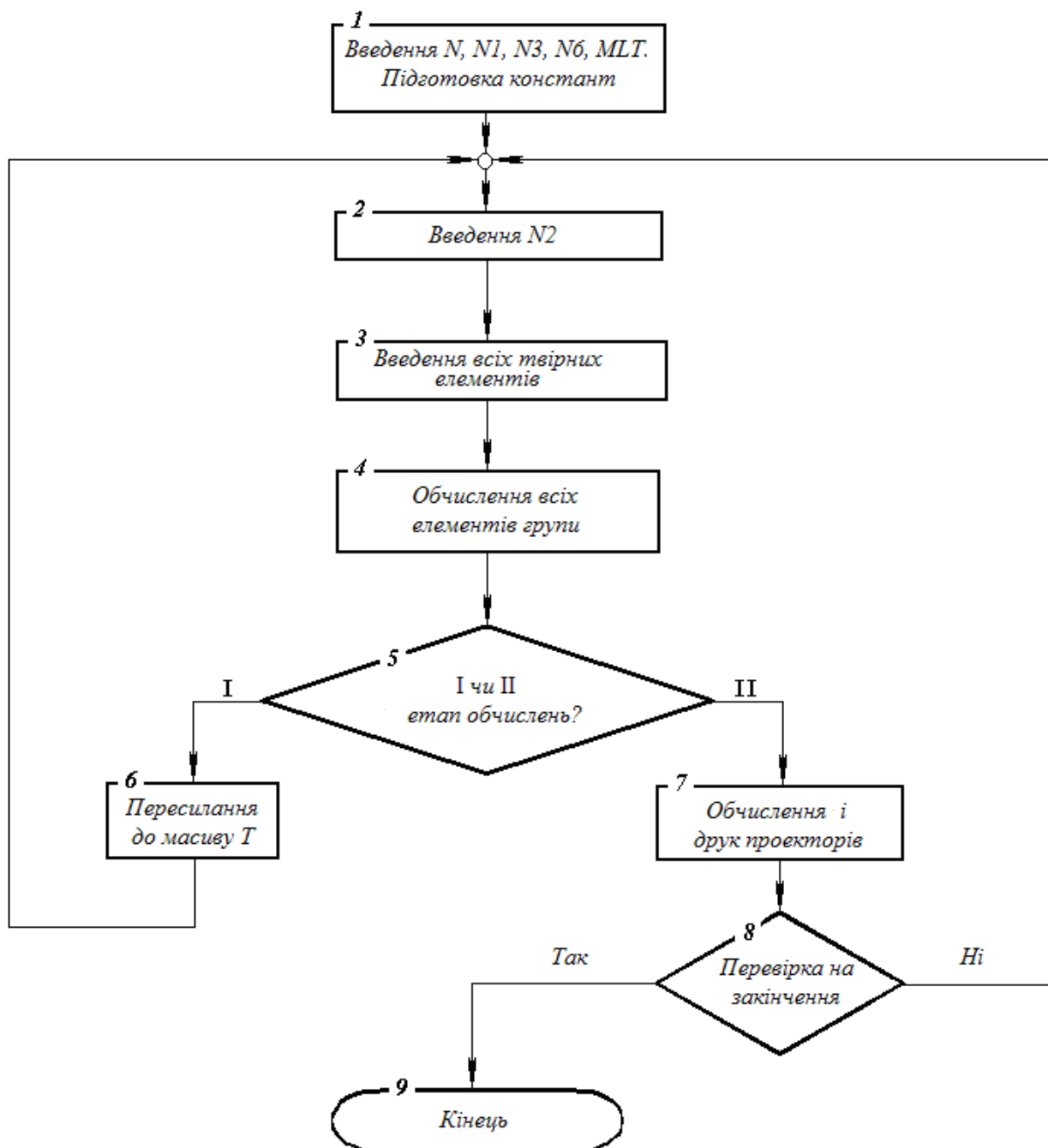


Рисунок. Блок-схема програми.

**Інструкція до програми.** Числовий матеріал для роботи програми готується у вигляді такого набору даних.

Спочатку числа цілого типу —  $N$ ,  $N1$ ,  $N3$ ,  $N6$ , де  $N$  — кількість елементів групи;  $N1$  — кількість твірних;  $N3$  — кількість різних незвідних зображень;  $N6$  — кількість блоків матриць  $T(g_v)$ .

Потім масив чисел цілого типу — таблиця  $MLT$  перемножень для даної

групи — вводиться по стовпцях.

Для кожного незвідного зображення вводяться:  $N2$  — порядок матриць, що вводяться (одне число в рядку); потім матриці твірних незвідних зображень, кожна у вигляді окремого масиву. Аналогічним чином вводиться кожен із блоків матриць звідного зображення  $T(g_v)$ . Одразу після введення числа  $N2$  й матриць твірних вони видаються до друку.

В результаті розв'язку друкуються по рядках проектори  $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{21}, P_{22}, \dots, P_{2s_2}, \dots, P_{N3s_{N3}}$ .

Обмеження:  $N \leq 33$ ;  $N3 \leq 33$ ;  $N2 \leq 12$  (для незвідних зображень  $N2 \leq 3$ ).

**Тестовий приклад.** Група  $C_2$ . Твірний елемент зображення  $T(g_v)$ :

$$T(g_1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таблиця перемноження для групи  $C_2$  є такою:

Номер	
першого співмножника	1
другого співмножника	1
добутку	2

Твірні незвідних зображень  $\tau_1(g_1) = 1$ ;  $\tau_2(g_2) = -1$ .

Текст програми GROUPS є таким:

**\*NAME ТЕОРИЯ ГРУПП**

**PROGRAM GROUPS**

**C-----**

```

С  НАХОЖД. ПРОЕКТОРОВ НА ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА
С  А В Т О Р Ы :   БАЗИЛЕВИЧ Ю.Н. , КОРОТЕНКО Л.М. ,
С                    КОРОТЕНКО Г.М. (ИТМ АН УССР)
      DIMENSION MLT(33,3) , T(99,33) , W(33,144) , B(12,12) ,
1          C (12,12) , A(12,12) , NTAU(99)
2          , C1(144) , B1(144) , A1(144)
      EQUIVALENCE (A,A1) , (B,B1) , (C,C1)
      OPEN(8 , FILE=' numb.ТХТ ')
С-----
      N2МАХ=12
      READ (8,242) N,N1,N3,N6
С  N - К-ВО ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ,  N1 - К-ВО ОБРАЗУЮЩИХ,
С  N3 - К-ВО РАЗЛИЧН. НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ,
С  N6 - К-ВО БЛОКОВ МАТРИЦ ПРИВОДИМОГО ПРЕДСТАВЛ.
      N4=N-N1
      N7=N6+N3
      M=0
      MM=1
      READ (8,242) ((MLT(I,J) , J=1,3) , I=1,N4)
С  MLT - ТАБЛ. ПЕРЕМНОЖЕНИЙ (ТРАНСПОНИРОВАННАЯ)
11  READ (8,242) N2
С  N2 - ПОРЯДОК ВВОДИМЫХ МАТРИЦ
      PRINT 22,N2
      N5=N2*N2МАХ
С...ВВОД ОБРАЗУЮЩИХ
      DO 3 IM=1,N1
2    READ (8,21) ((A(I,J) , J=1,N2) , I=1,N2)
С  A - ОЧЕРЕДНАЯ МАТРИЦА НЕПРИВОДИМОГО (НА
С    ВТОРОМ ЭТАПЕ - ПРИВОДИМОГО) ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
      DO 31 I=1,N2
31  PRINT 25 , (A(I,J) , J=1,N2)
      DO 3 JM=1,N5
3    W(IM,JM)=A1(JM)
С...СОСТАВЛЕНИЕ ВСЕЙ ГРУППЫ МАТРИЦ

```





```

        GO TO 11
242    FORMAT (3I2)
22     FORMAT (3X, 'N2=' , I3)
21     FORMAT (4F5.1)
25     FORMAT (12F10.3)
23     FORMAT (I6, '-Й ПРОЕКТОР')
      END

```

Числовий матеріал для розв'язку тестового прикладу знаходиться в файлі NUMB.TXT:

```

+2+1+2
+1
+1+1+2
+1
+01.0
+1
-01.0
+2
000.0-01.0-01.0000.0

```

Результати розрахунків:

```

N2 = 1
  1.00
N2 = 1
-1.00
N2 = 2
  0.00 -1.00
-1.00 -1.00
  1-Й ПРОЕКТОР
  0.500 -0.500
-0.500  0.500
  2-Й ПРОЕКТОР
  0.500  0.500
  0.500  0.500

```

Другий тестовий приклад:

16+310  
 +8  
 +1+1+4  
 +4+1+5  
 +2+1+6  
 +6+1+7  
 +7+1+8  
 +3+1+9  
 +9+110  
 10+111  
 +3+212  
 12+113  
 13+114  
 14+115  
 +2+216  
 2  
 0.00 1.00-1.00 0.00  
 1.00 0.00 0.00-1.00  
 1.00 0.00 0.00 1.00  
 1  
 -1.00  
 1.00  
 1.00  
 1  
 -1.00  
 -1.00  
 1.00  
 1  
 1.00  
 1.00  
 1.00  
 1  
 1.00  
 -1.00  
 1.00  
 2  
 0.00 1.00-1.00 0.00  
 1.00 0.00 0.00-1.00  
 -1.00 0.00 0.00-1.00  
 1  
 -1.00  
 1.00  
 -1.00  
 1  
 -1.00  
 -1.00  
 -1.00  
 1  
 1.00  
 1.00  
 -1.00

```
1
1.00
-1.00
-1.00
01
-1.00
-1.00
01.00
01
01.00
01.00
-1.00
01
01.00
01.00
01.00
01
-1.00
-1.00
01.00
01
01.00
01.00
-1.00
01
-1.00
-1.00
-1.00
04
0.00 0.00 1.00 0.00
0.00 0.00 0.00 1.00
0.00 1.00 0.00 0.00
1.00 0.00 0.00 0.00
0.00 0.00 0.00 1.00
0.00 0.00 1.00 0.00
0.00 1.00 0.00 0.00
1.00 0.00 0.00 0.00
-1.00 0.00 0.00 0.00
0.00-1.00 0.00 0.00
0.00 0.00-1.00 0.00
0.00 0.00 0.00-1.00
2
0.00 1.00-1.00 0.00
0.00-1.00-1.00 0.00
-1.00 0.00 0.00-1.00
```

## ДОДАТОК Г. ПРОГРАМА ЗВЕДЕННЯ МАТРИЦЬ ДО КЛІТИННО-ТРИКУТНОГО ВИГЛЯДУ

Програму ALG написано мовою Fortran. Нижче наведено текст програми. Числовий матеріал знаходиться в файлі NMBRS1.TXT.

```

C NAME БЛОЧНО-ТРЕУГОЛЬНЫЙ ВИД
  PROGRAM ALG
C-----
C ОДНОВРЕМЕННОЕ ПРИВЕДЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ МАТРИЦ К
C БЛОЧНО-ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ
C АВТОРЫ : БАЗИЛЕВИЧ Ю.Н. , ШВЕЦ И.В.
C-----
C ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ В ФАЙЛЕ nmbrs0.TXT .
C СОДЕРЖАНИЕ ЭТОГО ФАЙЛА:
C N2 - ПОРЯДОК ВВОДИМЫХ МАТРИЦ, NMATR - ИХ ЧИСЛО
C (N2 <= N2MAX = ПОРЯДКАМ МАТРИЦ А, В, ...
C В ОПЕРАТОРЕ DIMENSION) ,
C ДАЛЕЕ - ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЦ.
C-----
  DIMENSION W(50,25),B(5,5),W2(4,25)
  1          ,C(5,5),A(5,5),D(5,5)
  2          ,C1(25),B1(25),A1(25)
  3          ,KB(25),V(25),W1(50,25),SP(25,25)
  EQUIVALENCE                                     (A(5,5),A1(25)
), (B(5,5),B1(25)), (C(5,5),C1(25))
  OPEN(8,FILE='nmbrs0.TXT')
C-----

N2MAX=5
KB STR=50
E1=1.E-9

```

```

E2=1.E-7
11  READ (8,242)N2,NMATR
C   N2 - ПОРЯДОК ВВОДИМЫХ МАТРИЦ, NMATR - ИХ ЧИСЛО
      PRINT 22,N2,NMATR

      NM=N2MAX*N2MAX
      CALL ZERO (0.,N2MAX,N2MAX,A)
      NELM=NM*KB CTP
      CALL ZERO (0.0,KB CTP,NM,W)
      CALL ZERO (0.,KB CTP,NM,W1)
C...ЗАНЕСТИ ЕДИНИЧНУЮ МАТРИЦУ
      K=1
      DO 12 I=1,N2
          W(1,K)=1.0
12      K=K+N2MAX+1
      N5=N2*N2MAX
C...ВВОД ИСХОДНЫХ МАТРИЦ
      N1=NMATR+1
      DO 3 IM=2,N1
          READ(8, 21) ((A(I,J),J=1,N2),I=1,N2)
C   A - ОЧЕРЕДНАЯ МАТРИЦА
          DO 31 I=1,N2
31      PRINT 25,(A(I,J),J=1,N2)
          PRINT *,'W2='
          DO 33 JM=1,N5
              W2(IM,JM)=A1(JM)
              PRINT 25,W2(IM,JM)
33      W(IM,JM)=A1(JM)
3      CONTINUE
C...ВЫДЕЛИТЬ ЛИН. НЕЗ. МАТРИЦЫ
      PRINT *, 'массив W - ВСЕ МАТРИЦЫ, ВЫТЯНУТЫЕ В СТРОКУ'
      DO 41 I=1,N1
41      PRINT 25,(W(I,J),J=1,N5)
      CALL SLAU5(W,N1,N5,E1,E2,L,V,KB CTP,1,KB)

```

```

N1=N5-L
PRINT *, 'НАЧАЛЬНОЕ КОЛ-ВО ЛИН. НЕЗАВ. МАТРИЦ'
PRINT *, N1

C
C...ВЫЧИСЛИТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ, ПРОВЕРИТЬ ЛИН. ЗАВ.
43 CONTINUE
C PRINT *, 'ТО ЖЕ, ПОСЛЕ ВЫДЕЛЕНИЯ ЛИН. НЕЗ. СТРОК'
C DO 432 I=1,N1
C 432 PRINT 25, (W(I,J), J=1,N5)
IF (N1.EQ.N2*N2) THEN
PRINT *, 'НЕ ПРИВОДИМА'
STOP
END IF
N1=N1+1
JJ=1
44 KK=1
C...УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ
46 DO 465 J=1,N5
A1(J)=W(JJ,J)
465 B1(J)=W(KK,J)
DO 13 L=1,N2
DO 13 J=1,N2
C(L,J)=0.
DO 13 K=1,N2
13 C(L,J)=C(L,J)+A(L,K)*B(K,J)
DO 4 J=1,N5
4 W(N1,J)=C1(J)
C...ВЫЧИСЛЯЕМ СЛЕД
S=0.
DO 45 I=1,N2
45 S=S+C(I,I)
SP(KK,JJ)=S
C...ПРОВЕРКА ЛИН. ЗАВИСИМОСТИ
DO 47 I=1,N1

```

```

DO 47 J=1,N5
47      W1(I,J)=W(I,J)
      CALL SLAU5(W1,N1,N5,E1,E2,L,V,KB CTP,1,KB)
      N8=N5-L
C      PRINT 242,JJ,KK,N1,N8
C      DO 48 I=1,N2
C          48
C          PRINT
25,(A(I,J),J=1,N2),(B(I,J),J=1,N2),(C(I,J),J=1,N2)
C  НУЖЕН ЛИ НАМ ЭТОТ НОВЫЙ ЭЛ-Т (Лин. НЕзАВиСим ЛИ Он)?
      IF (N8.GE.N1) GO TO 43

C  КОНЕЦ ЦИКЛОВ ПО  КК  И  ПО  JJ
      KK=KK+1
      IF(KK.LT.N1) GO TO 46
      JJ=JJ+1
      IF(JJ.LT.N1) GO TO 44

C-----
C  ВТОРОЙ ЭТАП РАСЧЕТА
C  N2- порядок матриц
C  N  - ранг алгебры
C  L  - размерность радикала
C  Решаем систему уравнений
C  G(1)y = 0
C  G(2)y = 0
C  .....
C  G(n)y = 0
C-----

      N=N1-1
      DO 50 I=1,N
          PRINT *, 'W='
50      PRINT 25,(W(I,J),J=1,N5)
      IF (N.LT.N2*N2) THEN

```



С...НАЙТИ К-ТЫ ЭЛ-ТОВ РАДИКАЛА АЛГЕБРЫ В БАЗИСЕ W

PRINT 243,N

DO 5 I=1,N

PRINT \*, 'SP='

5 PRINT 25, (SP(I,J), J=1,N)

CALL SLAU5(SP,N,N,E1,E2,L,W1,NM,КВСТР,КВ)

PRINT \*, 'РАЗМЕРНОСТЬ РАДИКАЛА'

PRINT \*,L

С...ПЕРЕСЛАТЬ РЕШЕНИЕ В SP (ОСВОБОДИТЬ W1)

DO 51,I=1,L

PRINT \*, 'W1='

PRINT 25, (W1(I,J), J=1,N)

DO 51 J=1,N

SP(I,J)=W1(I,J)

51 CONTINUE

CALL ZERO (0.,КВ СТР,NM,W1)

С...НАХОЖДЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВ

IP=0

DO 7 IMATP=1,L

СОСТАВИТЬ ЭЛЕМЕНТ РАДИКАЛА

DO 61 I=1,N5

S=0.

DO 6 K=1,N

6 S=S+SP(IMATP,K)\*W(K,I)

61 A1(I)=S

PRINT \*, 'A='

DO 62 I=1,N2

62 PRINT 25, (A(I,J), J=1,N2)

DO 63 I=1,N2

DO 63 J=1,N2

63 W1(IP+I,J)=A(I,J)

IP=IP+N2

7 CONTINUE

```

CALL SLAU5 (W1 , IP , N2 , E1 , E2 , LL , B , KB CTP , N2MAX , KB)
PRINT 27 , LL
PRINT * , 'N2='
PRINT * , N2
PRINT * , 'B='
DO 71 I=1 , LL
71      PRINT 25 , (B (I , J) , J=1 , N2)

С . . . НАХОЖДЕНИЕ ВТОРОГО ПОДПРОСТРАНСТВА
CALL SLAU5 (B , LL , N2 , E1 , E2 , L2 , A , N2MAX , N2MAX , KB)
IF (LL+L2.EQ.N2) THEN
DO 72 I=1 , L2
72      PRINT 25 , (A (I , J) , J=1 , N2)
СОСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ
CALL ZERO (0 . , N2MAX , N2MAX , C)
DO 73 I=1 , LL
DO 73 J=1 , N2
73      C (J , I) =B (I , J)
DO 74 I=1 , L2
DO 74 J=1 , N2
74      C (J , I+LL) =A (I , J)
PRINT * , 'MATRIX S'
DO 75 I=1 , N2
75      PRINT 25 , (C (I , J) , J=1 , N2)
С ПРИМЕЧАНИЕ : ПЕРВЫЕ LL СТОЛБЦОВ МАТРИЦЫ S МОГУТ ОТЛИЧАТЬСЯ
С      ОТ НАЙДЕННЫХ РАНЕЕ (МАТРИЦА В) , НО ОНИ
С      ЯВЛЯЮТСЯ БАЗИСОМ В ТОМ ЖЕ САМОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С ПОЛУЧЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАННЫХ МАТРИЦ
N1=NMATR+1
DO 8 IM=2 , N1
PRINT * , IM-1
DO 83 JM=1 , N5
83      A1 (JM) =W2 (IM , JM)

```

```

      PRINT *, 'W2=ИСХОДНАЯ'
      PRINT 25, (W2(IM, JM), JM=1, N5)
      CALL PODOBIE(A, C, N, NMAX, IER, B, D)
      PRINT *, 'A-ПРЕОБРАЗОВАННАЯ'
      DO 85 I=1, N2
85      PRINT 25, (A(I, J), J=1, N2)
8      CONTINUE

      ELSE
          PRINT 26
      END IF

      ELSE
          PRINT 24
      END IF
26      FORMAT ('НЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ LL+L2=N2')
243     FORMAT (2X, 'РАНГ АЛГЕБРЫ РАВЕН:', I4)
242     FORMAT (3I2)
22      FORMAT (3X, 'N2=', I3, ' NMATR=', I3)
21      FORMAT (9F11.5)
25      FORMAT (8F11.5)
24      FORMAT(' НЕ ПРИВОДИМО')
27      FORMAT (2X, 'ПОРЯДОК 1-ГО БЛОКА РАВЕН:', I4)
C      П Р И М Е Ч А Н И Е
C      Возможен выход в середине программы( возле метки 43)
      END

```

```

      SUBROUTINE SLAU5(A, NN, M, E1, E2, L, V, N2, N3, NMB)
C      ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
C      УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ РАЗРЕЖЕННОСТИ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ
C      А В Т О Р :   Ю.Н. БАЗИЛЕВИЧ
C-----
C      A - МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ.
C      NN*M - ЕЕ РАЗМЕРНОСТЬ.
C      E1, E2 - АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГР.
C      L - К-ВО ЛИН. НЕЗАВИСИМЫХ РЕШЕНИЙ

```

```

C   NMB - В МАССИВЕ ОТМЕЧАЮТСЯ БАЗИСНЫЕ ПЕРЕМ.
C   V - В ПЕРВЫЕ L СТРОК МАТРИЦЫ ЗАНОСЯТСЯ ЛИН. НЕЗАВ. РЕШЕНИЯ
C   N2 - ЧИСЛО СТРОК В ОПИСАНИИ МАТР. А
C   N3 -           - " -           V
C-----
      DIMENSION A(N2,M),NMB(M),V(N3,M)
      INTEGER VEDSTR
      N=NN
      DO 5 I=1,M
5         NMB(I)=0
C.....
      VEDSTR=1
3         CONTINUE
          IF (VEDSTR.GT.N) GO TO 6
C...ПОИСК СТРОКИ С МИН. К-ВОМ ЭЛ-ТОВ
      MINKBO=M
      MINC=VEDSTR
      DO 30 I=VEDSTR,N
          KEL=0
          DO 31 J=1,M
              P=ABS(A(I,J))
31          IF (P.GT.E1) KEL=KEL+1
              IF (KEL.GE.MINKBO) GO TO 30
          MINKBO=KEL
          MIN C=I
30          CONTINUE
          DO 32 J=1,M
              R=A(VEDSTR,J)
              A(VEDSTR,J)=A(MIN C,J)
32          A(MIN C,J)=R
C...ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ - НАИБОЛЬШИЙ В СТРОКЕ
      K=1
      DO 1 J=2,M
          P=ABS(A(VEDSTR,J))

```

```

        P2=ABS (A (VEDSTR, K) )
1      IF (P.GT.P2) K=J
        S=A (VEDSTR, K)
        P=ABS (S)
        IF (P.GT.E1) GO TO 2
C      УДАЛЕНИЕ СТРОКИ
        N=N-1
        IF (VEDSTR.GT.N) GO TO 3
        DO 4 K1=VEDSTR, N
            DO 4 J=1, M
4          A (K1, J) =A (K1+1, J)
        GO TO 3
2      NMB (K) =VEDSTR
C...ЖОРДАНОВЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ
        DO 9 J=1, M
9          A (VEDSTR, J) =A (VEDSTR, J) /S
        DO 7 I=1, N
        IF (I.EQ.VEDSTR) GO TO 7
        AMHOG=A (I, K)
        DO 10 J=1, M
            P=ABS (A (I, J) )
            A (I, J) =A (I, J) -A (VEDSTR, J) *AMHOG
            P2=ABS (A (I, J) )
10         IF (P2.LT.E2*P .OR. P2.LT.E1) A (I, J) =0.
7         CONTINUE
        VEDSTR=VEDSTR+1
        GO TO 3
6         CONTINUE
        L=M-N
СОСТАВЛЕНИЕ ЛИН.НЕЗАВ. РЕШЕНИЙ
        IF (L.GT.N3) RETURN
        DO 12 I=1, L
            DO 12 J=1, M
12         V (I, J) =0.

```

```

K=0
DO 13 I=1,M
    IF (NMB(I) .NE. 0) GO TO 13
    K=K+1
    V(K,I)=1.
    DO 14 J=1,M
14    IF (NMB(J) .NE. 0)    V(K,J)=-A(NMB(J),I)
13    CONTINUE
    RETURN
    END

```

SUBROUTINE PODOBIE (B, S, N, N2, IER, B2, S1)

```

C=====
C...ВЫПОЛНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ
C...S-ИСХОДНАЯ МАТРИЦА (ПОРТИТСЯ)
C    N-ЕЕ ПОРЯДОК
C    N2-ЧИСЛО СТРОК В ОПИСАНИИ МАССИВОВ
C    IER-КОД ОШИБКИ (IER=0 ПРИ УСПЕШНОМ РЕШЕНИИ, ИНАЧЕ 1)
C    B2-РЕЗУЛЬТИРУЮЩАЯ МАТРИЦА
C    S1 - РАБОЧИЙ МАССИВ
C    АВТОРЫ: БАЗИЛЕВИЧ Ю.Н., ШВЕЦ И.В.
C=====
    DIMENSION S (N2, N) , B (N2, N) , B2 (N2, N) , S1 (N2, N)
C...S1-РАБОЧИЙ МАССИВ
    DO 2 I=1, N
        DO 2 J=1, N
2        B2 (I, J)=S (I, J)
C    НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ
    CALL OBRMA (S, N, N2, IER, S1)
    PRINT 25, ((S1 (I, J) , J=1, N) , I=1, N)
25    FORMAT (/2X, 'S1=' , (8F7.2))
C    S1*B->S
    DO 3 I=1, N
        DO 3 J=1, N

```

```

      R=0
      DO 33 L=1,N
33      R=R+S1(I,L)*B(L,J)
3      S(I,J)=R
C      B2->S1
      DO 4 I=1,N
      DO 4 J=1,N
4      S1(I,J)=B2(I,J)
C      S*S1->B2
      DO 5 I=1,N
      DO 5 J=1,N
      R=0
      DO 55 L=1,N
55      R=R+S(I,L)*S1(L,J)
5      B2(I,J)=R
      RETURN
      END

      SUBROUTINE OBRMA(A,N,N2,IER,X)
C      =====
C      ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ. МЕТОД ЖОРДАНА-ГАУССА
C      С ВЫБОРОМ ВЕДУЩЕГО ЭЛЕМЕНТА ПО СТОЛБЦУ
C      А В Т О Р :   Ю.Н. БАЗИЛЕВИЧ
C-----
C      A - МАТРИЦА
C      N - ЕЕ ПОРЯДОК
C      N2 - ЧИСЛО СТРОК В ОПИСАНИИ ДВУМЕРН - МАССИВОВ
C      IER - КОД ОШИБКИ (IER=0 ПРИ УСПЕШНОМ РЕШЕНИИ, ИНАЧЕ IER=1)
C      X - ОБРАТНАЯ МАТРИЦА (РЕЗУЛЬТАТ)
C-----
      DIMENSION A(N2,N), X(N2,N)
      INTEGER VEDSTR
C      ЕДИНИЧНАЯ МАТРИЦА -> X
      CALL ZERO(0.,N2,N,X)
      DO 1 I=1,N

```

```

1      X(I,I)=1.
      IER=1
C.....
      DO 3 VEDSTR=1,N
C      ВЫБОР ВЕДУЩЕГО ЭЛЕМЕНТА ПО СТОЛБЦУ
      P=0.
      DO 31 I=VEDSTR,N
          P2=ABS(A(I,VEDSTR))
          IF (P2.GT.P) THEN
              P=P2
              K=I
          END IF
31      CONTINUE
      IF (P.LT.1.E-25)          RETURN
      IF (K.NE.VEDSTR) THEN
C      ПЕРЕСТАНОВКА СТРОК
          DO 32 J=1,N
              R=A(VEDSTR,J)
              A(VEDSTR,J)=A(K,J)
              A(K,J)=R
              R=X(VEDSTR,J)
              X(VEDSTR,J)=X(K,J)
              X(K,J)=R
32      CONTINUE
      END IF

C...ЖОРДАНОВЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ
      S=A(VEDSTR,VEDSTR)
      DO 9 J=1,N
          A(VEDSTR,J)=A(VEDSTR,J)/S
9      X(VEDSTR,J)=X(VEDSTR,J)/S
      DO 7 I=1,N
          IF (I.EQ.VEDSTR) GO TO 7
          AMHOG=A(I,VEDSTR)

```



```

          DO 10 J=1,N
              A(I,J)=A(I,J)-A(VEDSTR,J)*AMHOG
10          X(I,J)=X(I,J)-X(VEDSTR,J)*AMHOG
7          CONTINUE

3          CONTINUE
          IER=0
          RETURN
          END

          SUBROUTINE ZERO (X,N,M,A)
          DIMENSION A(N,M)
          DO 1 I=1,N
              DO 1 J=1,M
1          A(I,J) = X
          RETURN
          END

```

В якості тестового прикладу обрано такий:

### Приклад Г.1.

$$B_1 = E; B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}.$$

В цьому разі файл NMBRS1.TXT має вигляд:

```

0202
1.00 0.00 1.00 2.00
7.00 4.00-7.00-4.00

```

## ДОДАТОК Г. ПРОГРАМА РОЗВ'ЯЗКУ НЕОДНОРІДНОЇ СИЛЬНО РОЗРІДЖЕНОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Алгоритм розрахунку є аналогічним програмі SLAU5. До квадратної матриці додається права частина за формулою (2.34).

Текст програми slau\_b.PRG:

```

*:*****
**
*:      Program: slau_b.PRG
*:
*:      System: Частное решение системы лин. алгебр.
уравнений,
*: квадратная матрица полного ранга, большая сильно разреженная
система
*:      Author: Базилевич Ю.Н., Булдович А.Л.
*:      Last modified: 19.01.99, 20.12.2015
*:*****
**
* nn-количество уравнений
*****
PRIVATE  nn, m, eps1, eps2, vedstr, minc, minkvo;
        nn1, kel, i, j, K, s, y, multil, p, p2, beg, var1;
        tip, namel, answer2
PRIVATE  baz, mass
set talk off

* уничтожение старого решения
CLOSE DATABASES
USE solve
DELETE ALL
PACK

```

```
nn=3
* eps1, eps2-абсолютная и относ. погрешности
*eps1=0.000000001
*eps2=0.00000001
eps1 = 1.0E-15
eps2 = 1.0E-9
name1 = 'name1.txt'
answer2=1

DO ex3

m = nn + 1    && к-во столбцов расширенной матрицы
DO CASE
case answer2=2
    CLOSE DATABASES
    set talk on
    RETURN          && R E T U R N
OTHERWISE
    USE shablon
    erase aa.dbf
    COPY STRUCTURE TO aa
    USE aa
    APPEND FROM (name1) DELIMITED
ENDCASE

* база данных содержит коэффициенты при неизвестных
erase ab.dbf
COPY TO ab
USE ab
* "обнулить" малые элементы
scan for abs(aa) < eps1
    replace stk with 0
endscan
```

```

DIMENSION baz(m)
FOR i=1 TO m
    baz(i)=0
ENDFOR    && i

INDEX ON stk TAG stk
go bottom
nn1=stk          && фактическое число строк (уравнений)
if nn1 > nn
    y='Всего строк '+ltrim(str(nn1))+ ' а не '+ltrim(str(nn))+'.
Выход?'
    * if quietstn(y)
        if MESSAGEBOX(y, 276, 'программа спрашивает') = 6
            CLOSE DATABASES
            set talk on
            RETURN          && R E T U R N
        endif
    endif
endif
INDEX ON STR(stk)+STR(stlb) TAG stkstlb

vedstr=1          && номер ведущей строки. Сюда будет перенесена
                  && вед. строка после выбора вед. элемента

SET NEAR ON
DO WHILE vedstr<=nn1
    wait window nowait "Всего уравнений: " + alltrim(str(nn1)) ;
        + '. Обработывается - ' + alltrim(str(vedstr)) + '-
e.'
    SET ORDER TO TAG 1

    * если "ведущая" строка нулевая - удаляем
    IF .NOT.SEEK(vedstr)
        IF (vedstr < nn1)
            DO WHILE SEEK(nn1)
                REPLACE stk WITH vedstr
            ENDWHILE
        ENDIF
    ENDIF
ENDWHILE

```

```

        ENDDO
ELSE
    * "ведущая" строка за пределами матрицы
ENDIF    && (vedstr < nn1)
* ранг матрицы
nn1=nn1-1
ENDIF
IF vedstr <= nn1    && если "ведущая" строка не была
                   && за пределами матрицы
* поиск строки с min к-вом ненулевых эл-тов
minc=vedstr
minkvo=m
SEEK(vedstr)
DO WHILE .NOT.EOF()
    kel=0
    y=stk
    DO WHILE stk=y
        kel=kel+1
        SKIP
    ENDDO    && stk=y
    IF kel<minkvo
        minkvo=kel
        minc=y
    ENDIF    && kel
ENDDO    && .not.eof()

* перестановка строк
IF minc # vedstr
    * vedstr -->-1
    DO WHILE SEEK(vedstr)
        REPLACE stk WITH -1
    ENDDO
    * minc -->vedstr

```

```

DO WHILE SEEK(minc)
    REPLACE stk WITH vedstr
ENDDO
* -1 -->minc
DO WHILE SEEK(-1)
    REPLACE stk WITH minc
ENDDO
ENDIF

* копируем вед.строку в массив mass (с учетом сортировки)
SET ORDER TO TAG 2
COPY TO ARRAY mass FIELDS stlb, aa FOR stk=vedstr

* количество элементов в массиве
len1 =ALEN(mass,1)

* ведущий элемент-наибольший в строке
* s - искомый элемент;k - номер столбца
K=1
s=ABS( mass(1,2) )
FOR i=2 TO len1
    IF ABS( mass(i,2) ) >s
        K = i
        s=ABS( mass(i,2) )
    ENDIF
ENDFOR  && i
s=mass(K,2)
K=mass(K,1)
baz(K)=vedstr

* Ж о р д а н о в ы      и с к л ю ч е н и я

* преобразовываем эл-ты ведущей строки
FOR i=1 TO len1

```

```

      mass(i,2)=mass(i,2)/s
ENDFOR  && i

SET EXAC OFF
SET NEAR ON

GO TOP
* пока не конец базы данных
DO WHILE (.NOT.EOF())
  y=stk
  * если не ведущая строка, то преобразовываем
  IF (y # vedstr)
    * нахождение в текущей строке i элемента
    * с индексом k
    * если найденный эл-т суц-т( # 0)
    IF SEEK(STR(y)+STR(k))
      multil=aa
      SEEK(STR(y))
      * преобразовываем элементы текущей строки
      FOR j=1 TO len1
        IF SEEK(STR(y)+STR(mass(j,1)))
          &&
          A(y,j)#0

          p=ABS(aa)
          var1=aa-mass(j,2)*multil
          p2=ABS(var1)
          IF (p2<(eps2*p).OR.(p2<eps1))
            REPLACE stk WITH 0
          ELSE
            * если эл-т в базе данных # 0,
            * записываем измен-е значение
            REPLACE aa WITH var1
          ENDIF
        ELSE  && SEEK(STR(y)+STR(mass(j,1)))  &&
      ENDFOR
    ELSE
      A(y,j)#0
  ENDIF
ENDWHILE

```

```

var1=(-1)*mass(j,2)*multi1
if abs(var1) >= eps1
    * используем пустую запись
    * или добавляем новую
    IF .NOT.SEEK(STR(0))
        APPEND BLANK
    ENDIF
    * добавляем измен-е значение
    REPLACE stk WITH y, stlb WITH mass(j,1),
aa WITH var1
endif && abs(var1) >= eps1
ENDIF && SEEK(STR(y)+STR(mass(j,1))) &&
A(y,j)#0
ENDFOR && j
ENDIF
ELSE && y # vedstr
FOR i=1 TO len1
    REPLACE aa WITH mass(i,2)
    skip
ENDFOR && i
ENDIF && (y # vedstr)
SEEK(STR(y+1)) && переход к новой строке
ENDDO && (.not.eof()).and.(stk # -1)

SET EXAC ON
RELEASE mass
ENDIF && vedstr <= nn1
vedstr=vedstr+1
SET ORDER TO TAG 1
go bottom
nn1=stk && фактическое число строк
ENDDO
SET NEAR OFF

```



\* Составление лин. независимых решений

```

l=m-nn1
SELECT B    && решения будут расположены в строах
USE solve  &&  таблицы solve.dbf
K=0        && номер переменной
FOR i=1 TO m
    IF baz(i)=0  && если переменная - свободная (не базисная)
        K=K+1
        SELECT B
        APPEND BLANK
        REPLACE stk WITH K, stlb WITH i, sol WITH 1 && св. перем-
ая = 1
        FOR j=1 TO m
            IF baz(j)#0
                SELECT A
                SET ORDER TO TAG 2
                IF SEEK(STR(baz(j))+STR(i))
                    bb=-aa
                    SELECT B
                    APPEND BLANK
                    REPLACE stk WITH K, stlb WITH j, sol WITH bb
                ENDIF
            ENDIF
        ENDFOR    && j
    ENDIF
ENDFOR    && i

*USE solve.dbf    && анализ решения
SELECT B
LOCATE FOR Stk = 2
IF FOUND()
    wait window nowait "Бесконечное множество решений"
ELSE

```

```

LOCATE FOR Stlb = m
IF FOUND()
  rr = Sol
  DELETE && убираем вспомогательную переменную
  PACK
  REPLACE ALL Sol WITH - Sol /rr
  DO solv2
  MODIFY COMMAND SOLV2.TXT NOWAIT
  wait window "Решение в файле SOLV2.TXT"
ELSE
  wait window nowait "Нет решения "
ENDIF
ENDIF

```

```
CLOSE DATABASES
```

```
set talk on
```

```
*: EOF: SLAU5.PRG
```

Текст підпрограми ex3.PRG:

```

* диалог с пользователем                                ex3.prg
*****
DEFINE WINDOW w1 ;
  FROM 1, 1 ;
  TO 23,55 ;
  TITLE "укажите порядок исходной матрицы и точность
(eps1, eps2)" ;
  FLOAT ;
  NOCLOSE ;
  PANEL ;
  COLOR SCHEME 1

```

ACTIVATE WINDOW w1

\*COLOR GR+/B,W/B,GR+/B,GR+/B,GR+/B,GR+/B,W+/B,R/B,GR+/B,W/B

\* ,W+/BG,,,,,,,,

\* ,RGB(0,0,0,0,255,255),,,,,,,,,

@ 4,1 SAY "dimension of the matrix"

@ 5,8 GET nn ;

    SIZE 1,6 ;

    DEFAULT 0 COLOR ,W+/BG,,,,,,,,

@ 7,10 SAY "EPS1"

@ 8,0 GET eps1 ;

    SIZE 1,24 ;

    DEFAULT 0 COLOR ,W+/BG,,,,,,,,

@ 10,10 SAY "EPS2"

@ 11,0 GET EPS2 ;

    SIZE 1,24 ;

    DEFAULT 0 COLOR ,W+/BG,,,,,,,,

@ 20,7 GET answer2 ;

    PICTURE "@\*HT \!<OK>;\?<CANCEL>" ;

    SIZE 1,8,6 ;

    DEFAULT 1

READ CYCLE

RELEASE WINDOW w1

\*? nn, m, eps1, eps2, tip, answer2

IF answer2 # 2 && открытие файла

    name1=GETFILE('txt')

ENDIF

IF EMPTY(name1) && если файл не выбран, то "CANCEL"

    answer2 = 2

ENDIF

Текст підпрограми solv2.PRG:

```
*                               solv2.prg
*   составление решения с учётом
*   ненулевых элементов
*****

ERASE solv2.txt

SELECT b
ERASE solv2.dbf
COPY STRUCTURE TO solv2

SELECT c
USE solv2
i=1
DO WHILE i<= nn
    APPEND BLANK
    REPLACE Stlb WITH i, Sol WITH 0
    i = i + 1
ENDDO

SELECT b    && перенос ненулевых эл-тов
SCAN
    xx = stlb
    GO xx IN c
    zz = b.sol
    REPLACE c.sol WITH zz
ENDSCAN


SELECT c
COPY TO solv2.txt FIELDS sol DELIMITED
```

## ДОДАТОК Д. АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

**ЗАТВЕРДЖУЮ**



Ректор Дніпропетровського  
національного університету  
залізничного транспорту  
імені академіка В. Лазаряна

  
О. М. Пшінько  
"06" "03" 2018 р.

### АКТ

про використання результатів дисертації Базилевича Юрія Миколайовича  
на тему: «Методи декомпозиції матричних математичних моделей»

Дніпропетровським національним університетом залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна проводяться науково-дослідні роботи (НДР) з дослідження стійкості руху та вибору оптимальних параметрів рухомого склад залізничного транспорту. Даним актом підтверджується застосування результатів дисертації Базилевича Ю. М. при виконанні НДР за вказаною тематикою.

Використання результатів роботи Базилевича Ю. М. по спрощенню математичних моделей рейкових екіпажів дало такі переваги.

1. Зменшився обсяг роботи, яка потрібна для вибору оптимальних параметрів рухомого складу залізничного транспорту.
2. Підвищилася точність розрахунків динамічних показників.

Цей документ не є підставою для пред'явлення фінансових вимог.

Науковий керівник  
Галузевої науково-дослідної лабораторії  
динаміки та міцності рухомого складу,  
к.т.н., доцент

 С. А. Костриця

Зав. кафедри теоретичної та  
будівельної механіки,  
к.т.н., доцент

 Л. В. Урсуляк

ЗАТВЕРДЖУЮ  
Ректор ДВНЗ «Придніпровська  
державна академія будівництва та  
архітектури»

д.т.н., професор В. І. Большаков



20.12. 2017 р.

про використання результатів дисертаційної роботи Базилевича Ю. М. на тему  
«Методи декомпозиції матричних математичних моделей»

Ми, що підписалися нижче, начальник учбового відділу, д.т.н., проф. Тріфонов І.В., завідуючий кафедрою Автоматики та електротехніки к.т.н., с.н.с. Ткачов В. С., склали цей акт про те, що результат дисертаційної роботи Базилевича Ю. М. впроваджені в учбовий процес по кафедрі автоматики та електротехніки, а саме, в лекції з дисципліни "Штучний інтелект в управлінні технологічними процесами" (тема — «Огляд сучасних методів дослідження динамічних систем») для студентів спеціальності 151 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології"

Довідка видана для пред'явлення за місцем захисту дисертації.

Начальник учбового відділу

д.т.н. проф. Тріфонов І.М.

Завідуючий кафедрою

автоматики та електротехніки

к.т.н., с.н.с. Ткачов В. С.